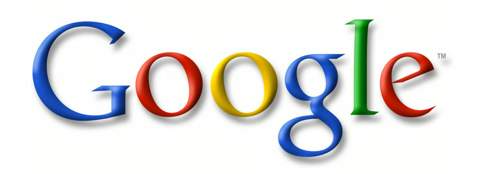
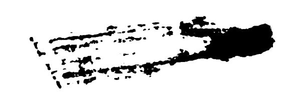
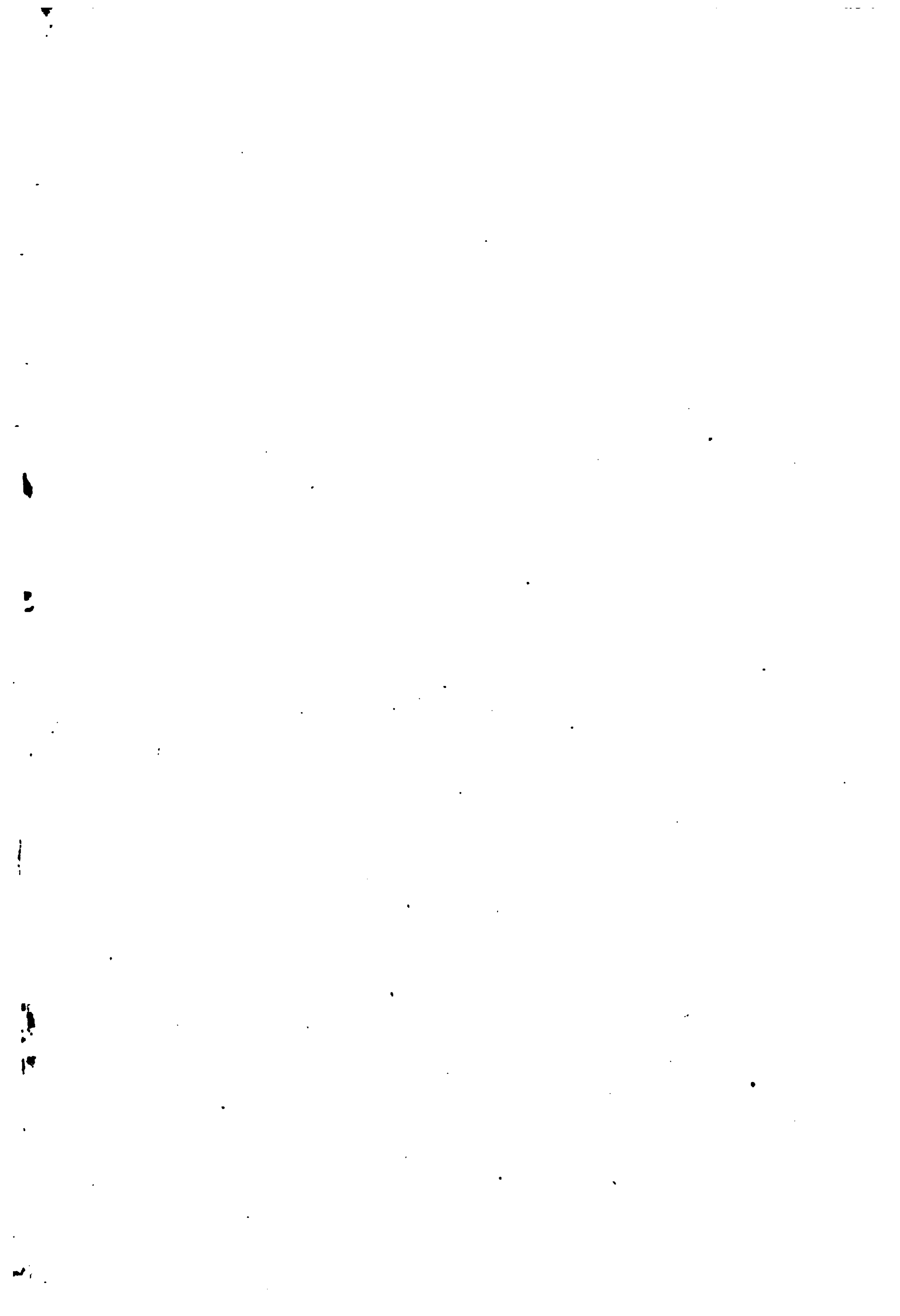




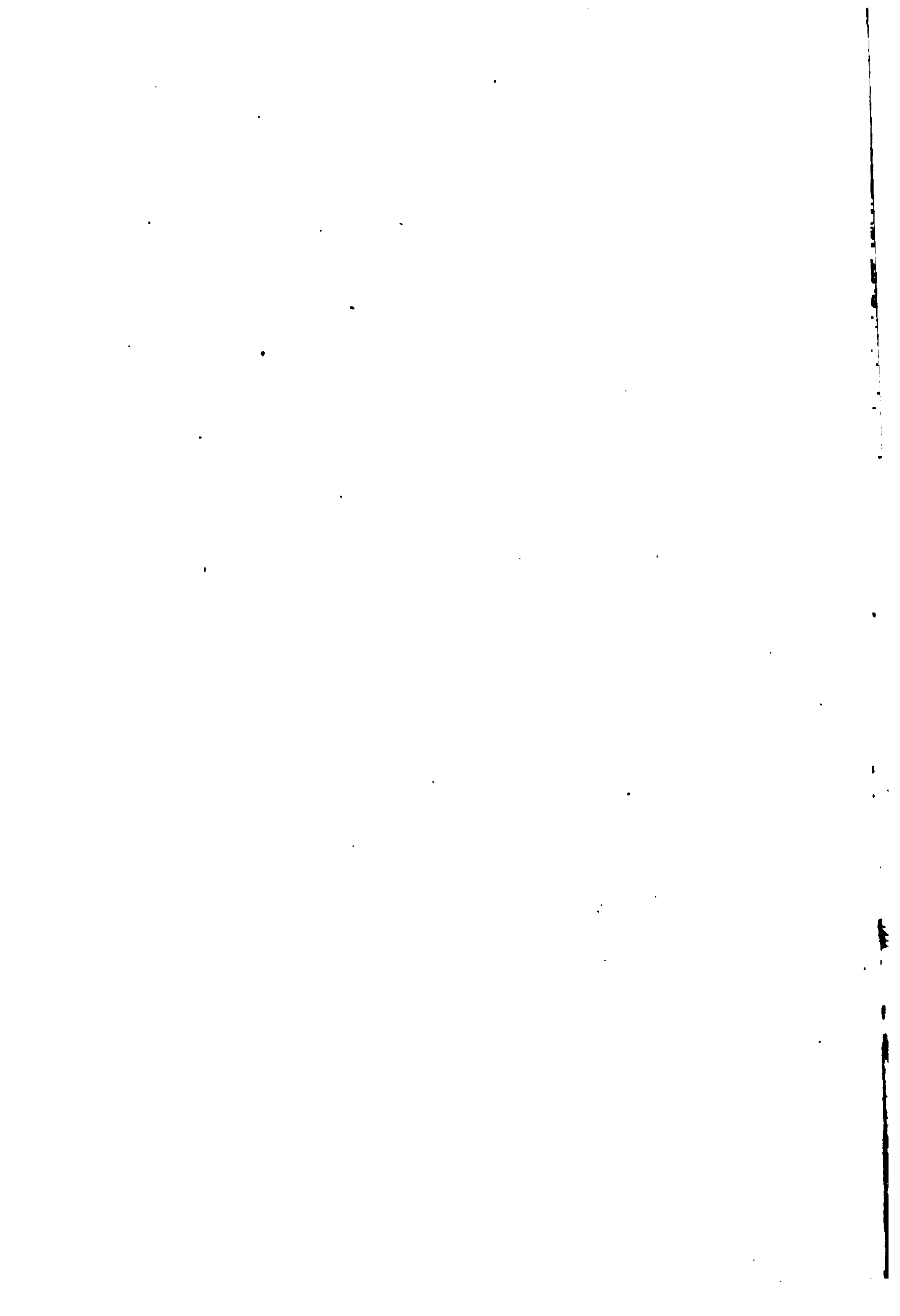

ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
SIGILLUM
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS











ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN.

51. BAND.

MIT 109 FIGUREN IM TEXT UND 8 TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1904.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgaben aus der angewandten Mathematik.

Bücherschau.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND C. RUNGE IN HANNOVER.

51. BAND. 1. HEFT.

MIT 57 FIGUREN IM TEXT UND 3 TAFELN.

Ausgegeben am 2. August 1904.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASZE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

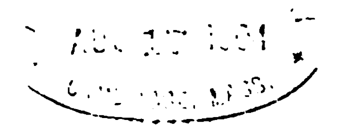
☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

M. Baroni, A. Börsch, G. Bohlmann, K. Doehlemann, V. Fischer, E. Häntzschel, G. Hamel, L. Henneberg, K. Heun, J. Horn, A. Kneser, L. Krüger, F. Ludwig, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, R. v. Mises, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, K. Schwarzschild, A. Sommerfeld, P. Stäckel, C. W. Wirtz, E. Wölffing.



Über neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie nebst einer geometrischen Einführung in dieses Gebiet.

Von FRIEDRICH SCHILLING in Göttingen.

(Mit zwei Tafeln Nr. I u. II.)

Die soeben erschienene zweite Sammlung kinematischer Modelle[1]) bildet die Fortsetzung der bereits 1898 veröffentlichten ersten Sammlung, die hauptsächlich die Theorie der Polbahnen, der genauen Geradführungen und der Erzeugung der allgemeinen und speziellen zyklischen Kurven zur Anschauung bringt.[2]) Besonders an letztere Gruppe anschließend sollen die neuen Modelle, deren Originale der Versammlung in Hamburg (1901)[3]) vorgelegen haben, die wichtigsten *Methoden der Zahnräderkonstruktion* darstellen, indem sie hierbei wieder vor allem die zugrunde liegenden mathematischen Gedanken hervortreten lassen, dem Wunsche entsprechend, der bezüglich einer solchen Sammlung kinematischer Modelle von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auf ihrer Versammlung in Frankfurt a. M. (1896) zum Ausdruck gebracht war.

Die vorliegende Arbeit bringt neben der Beschreibung der Modelle eine kurze, besonders im § 4 neue interessante Resultate darbietende Einführung in das Gebiet der Verzahnungstheorie.[4]) Man wird er-

1) Über den Bezug der Modelle erteilt der Verlag Martin Schilling in Halle a. S. gern nähere Auskunft.

2) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. V, S. 5 (1897) und Bd. VII, S. 7 (1899), sowie diese Zeitschrift, Jahrgang 44, S. 214—227 (1899), (Sonderabdruck, Halle a. S., 1899, S. 1—15), sowie Abdruck in L'enseignement mathématique von Laisant et Fehr, Paris 1900, Bd. II, p. 31—48.

3) Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung Bd. XI, S. 267—269 (1902).

4) Wir wollen gleich hier auf die wichtigsten Lehrbücher hinweisen, welche die Verzahnungstheorie behandeln. Dort finden sich zahlreiche weitere, insbesondere auch historische Literaturangaben: Bach, Die Maschinenelemente, ihre Berechnung und Konstruktion, Stuttgart, 1901, S. 220—308. — Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig, 1888, S. 173—229. — Reuleaux, Lehrbuch der Kinematik II, Braunschweig 1900, S. 457—473 und Der Konstrukteur, Braunschweig 1882—1889, S. 514—599. — Weisbach-Herrmann, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik III, 1, Braunschweig 1876, S. 326—442. — Die technischen Einzelheiten gibt auch in kurzer, übersichtlicher Zusammenstellung: Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“ Abt. I, Berlin 1902, S. 589—604.

kennen, daß diese Betrachtungen sich immerfort mit Begriffen beschäftigen, wie Tangente, Normale, Bogenlänge, Krümmungskreis, Evolute und Evolvente, Äquidistante, Enveloppe, Spitze, Wendepunkt, Doppelpunkt usw. Daher dürften die Modelle zweifellos nicht nur in einer Vorlesung über angewandte Kinematik selbst, sondern auch in solchen über analytische Geometrie oder Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der ebenen Kurven ihre ausgezeichnete Verwendung finden. Soll es doch geradezu eine wesentliche Aufgabe dieser Modelle sein, den kinematischen Betrachtungen besonders auch im Universitätsunterricht, der Einführung der angewandten Mathematik entsprechend, neue Freunde zu gewinnen. Ohne Modelle aber dürfte eine Behandlung solcher Fragen im Unterricht überaus erschwert und wenig erfreulich sein.

Die innige Beziehung der durch die Modelle veranschaulichten Verhältnisse zur *Theorie der Lieschen Berührungstransformationen*, über die ich in Hamburg bereits nähere Mitteilung gemacht habe[1]), möchte ich mir indes für eine Fortsetzung dieser Arbeit aufsparen, die bald folgen soll. Wir haben eben hier ein besonders interessantes Beispiel vor uns, wie moderne, rein mathematische Disziplinen oft aufs engste in Fühlung stehen mit wirklich praktischen Anwendungen.

§ 1. Zwei Modelle zur Erzeugung der Pascalschen Kurven.

Zunächst schien es wünschenswert, den 7 Modellen der früheren Sammlung, welche die Erzeugung der verschiedenen allgemeinen und speziellen zyklischen Kurven darstellen[2]) und von denen wir das Modell 5 nochmals auf Tafel I (Fig. 1) abbilden, noch zwei weitere hinzuzufügen, welche in entsprechender Weise die Erzeugung der sogenannten Pascalschen Kurven, bekanntlich spezielle algebraische Kurven 4. Ordnung (limaçon de Pascal, Pascalsche Schnecke)[3]) veranschaulichen.

Die Umkehrung des Modelles 5 der ersten Serie, des „Ellipsographen" (Tafel I, Fig. 1), führt uns zum *ersten* der beiden neuen Modelle (Tafel I, Fig. 2), dem Satze entsprechend:

(1) *Rollt auf einem festen Kreise k_a ein von ihm innerlich berührter Kreis k_b mit doppeltem Radius ab, so beschreiben drei mit k_b fest ver-*

---

1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. XI, S. 267—269 (1902).

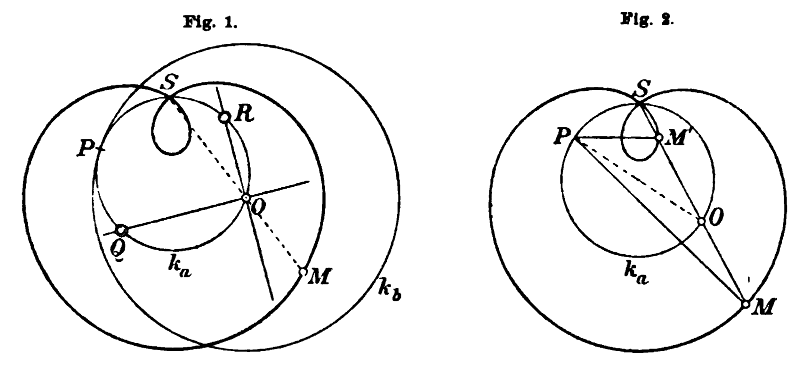
2) Vgl. diese Zeitschrift, Jahrgang 44, 1899, S. 214 ff., Tafel I u. II.

3) Eine ausführliche Behandlung dieser Kurven mit historischen Literaturangaben findet sich bei Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Leipzig 1902, S. 136 ff. und Tafel IV, Fig. 28, a, b, c, S. 142 ff. und S. 498.

bundene Punkte, die bezw. innerhalb, auf und außerhalb des Kreises k_b liegen, entsprechend eine verschlungene, gespitzte und gestreckte Pascalsche Kurve. Von ihnen pflegt man die mittlere auch als *Cardioide* (Herzkurve) zu bezeichnen.

Das Modell illustriert überdies noch folgende Modifikation der Erzeugung dieser Kurven, die auch unmittelbar aus der Umkehrung des Ellipsographen folgt:

(2) *Bewegt sich ein System so, daß die Schenkel eines Winkels QOR in ihm* (der im Modell speziell als ein rechter gewählt ist) *stets je*



durch einen festen Punkt Q und R hindurchgehen, so beschreibt ein beliebiger Punkt M des Systems eine Pascalsche Kurve. (Fig. 1.)

Aus dieser letzten Erzeugungsweise der Pascalschen Kurven, wonach nämlich MO stets wegen der Konstanz des Peripheriewinkels QOS durch einen festen Punkt S auf k_a geht, folgt dann leicht die dritte Erzeugung der Kurven und damit eine einfache Methode zur Konstruktion von beliebig vielen Punkten und Tangenten derselben:

(3) *Man lege einen beliebigen Strahl durch den festen Punkt S des Kreises k_a und trage von seinem zweiten Schnittpunkt O aus die konstante Strecke $s = OM = OM'$ beiderseits ab, dann sind die Endpunkte M und M' zwei Punkte der Pascalschen Kurve und MP, $M'P$ ihre Normalen, wo P der andere Endpunkt des zu O gehörenden Durchmessers von k_a ist.* (Fig. 2.) *Je nachdem $s \lesseqgtr$ als der Durchmesser $2a$ von k_a ist, ergibt sich hierbei eine verschlungene, gespitzte oder gestreckte Pascalsche Kurve.*

Aus dieser letzten Erzeugungsweise läßt sich auch leicht die *Polargleichung* ableiten:

$$r = 2a \cos \varphi + s,$$

wobei S als Pol und die von S ausgehende Durchmesserrichtung des Kreises k_a als Polarachse gewählt ist.

Das *zweite* Modell (Tafel I, Fig. 3) entspricht der Tatsache, daß jede zyklische Kurve in zweifacher Weise durch Abrollen eines beweglichen auf einem festen Kreise erzeugt werden kann.[1]) Demgemäß stellt sich dem obigen Satze (1) der folgende zur Seite, der dann durch das Modell veranschaulicht wird:

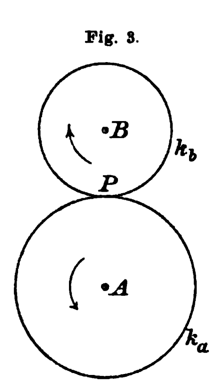
(4) *Rollt auf einem festen Kreise ein ihn äußerlich berührender mit demselben Radius ab, so beschreiben drei mit letzterem festverbundene Punkte, die bezw. außerhalb, auf und innerhalb des beweglichen Kreises liegen, eine verschlungene, gespitzte und gestreckte Pascalsche Kurve.*

Indem ferner die Radien der einander gleichen Kreise dieses zweiten Modelles gleich dem Radius des festen Kreises im ersten Modell gewählt sind, ergibt sich im speziellen in beiden *dieselbe* gespitzte Pascalsche Kurve.[2])

§ 2. Die allgemeine Aufgabe der Verzahnungstheorie.

Wir wenden uns nun zu der *Verzahnungstheorie.* Die hier zu lösende Aufgabe gipfelt in der Untersuchung, *wie sich die Umdrehung um eine festgelagerte Achse $\mathfrak{A}$ auf eine zweite ebenfalls festgelagerte Achse $\mathfrak{B}$ durch Druckkräfte mit Hilfe von Zahnrädern übertragen läßt.* Gilt es nun im folgenden insbesondere zur Erläuterung der Modelle, die mathematischen Grundgedanken dieser Theorie zusammenzustellen, so wollen wir uns von vornherein einmal auf parallele Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und zylindrische Zahnräder beschränken. Da dann nur deren Querschnitte wesentlich sind, so haben wir es also geometrisch mit Problemen in einer Ebene zu tun. Ferner wollen wir der Einfachheit der Darstellung halber voraussetzen, daß das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis $\omega_a : \omega_b$ für die Umdrehung um die beiden Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ konstant bleibt. Dementsprechend kann die relative Bewegung der ebenen Systeme Σ_a und Σ_b der beiden Zahnräderquerschnitte gegen einander durch das ohne Gleiten stattfindende Abrollen zweier solcher Kreise k_a und k_b (Polbahnen, Polkreise, Teilkreise) auf einander veranschaulicht werden (Fig. 3), deren Mittelpunkte die Querschnittsmittelpunkte A, B der Achsen sind

Fig. 3.



1) Vgl. meine Arbeit in dieser Zeitschrift, Jahrgang 44, 1899, Satz 4 S. 219 und Satz 10 S. 221 (Sep.-Abdr. S. 7 und 9). In der Gl. (6) daselbst ist in unserem Falle $\frac{B}{A} = 2$, also $\frac{b}{a} = 1$.

2) Vgl. meine Arbeit in dieser Zeitschrift, Jahrgang 44, 1899, Anmerkung auf Seite 222 (Sonder-Abdr. S. 10).

und deren Radien a, b sich umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten. Die diesen Annahmen entsprechenden Zahnräder pflegt man in der Technik als „Stirnräder" zu bezeichnen.[1])

Außer den Systemen Σ_a und Σ_b kommt noch das ruhende System Σ in Betracht, das also in den festen Punkten A, B bezw. mit Σ_a und Σ_b verbunden ist. Da es wesentlich nur auf die relative Bewegung der Systeme Σ_a, Σ_b und Σ gegen einander ankommt, so werden wir, wenn es vorteilhaft ist, gelegentlich auch wohl allen drei Systemen gleichzeitig noch eine Drehung um den Punkt A mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega_a$ erteilt denken. Dadurch wird das System Σ_a zum ruhenden, während die Bewegung des Systems Σ_b durch Abrollung seines Polkreises k_b auf dem jetzt festen Polkreis k_a bestimmt ist und die des Systems Σ dadurch, daß es mit seinen Punkten A und B an die Systeme Σ_a und Σ_b festgekettet ist.

Je nachdem die ursprüngliche Anschauung der Bewegung der drei Systeme oder die soeben geschilderte unserer Untersuchung oder dem einzelnen Modell zugrunde gelegt ist, wollen wir kurz *von der ersten oder der zweiten Bewegungsart der Systeme* Σ_a, Σ_b, Σ sprechen.

Wir behandeln nun nach einander die folgenden drei Methoden der Verzahnungstheorie und die als ihre Ausführungen sich ergebenden entsprechenden Verzahnungen:

a) *die Methode der Hilfspolbahnen (Zykloidenverzahnung)*,

b) *die Methode der Äquidistanten (Triebstockverzahnung)*,

c) *die Methode der sekundären Polbahnen (Evolventenverzahnung)*.

§ 3. Die Methode der Hilfspolbahnen (Modelle 3 bis 5).

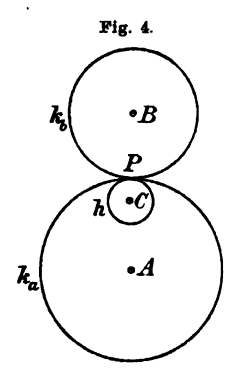
Wir knüpfen unsere Betrachtung sogleich an das *Modell 3* an (vierte Figur der Tafel I). In ihm erkennt man zunächst die beiden Polkreise k_a und k_b mit den festen Mittelpunkten A, B und überdies die sogenannte Hilfspolbahn, die hier ebenfalls als ein Kreis h gewählt ist, im allgemeinen natürlich eine beliebige (analytische) Kurve sein kann, wobei den Radien der drei Kreise k_a, k_b, h die Verhältnisse $4:3:1$ gegeben

---

1) Doch sei ausdrücklich bemerkt, daß alle folgenden Betrachtungen und zwar sowohl die theoretischer wie praktischer Natur sich ohne wesentliche Änderung auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen lassen, wo das Winkelgeschwindigkeitsverhältnis nicht konstant ist oder überdies die Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich im Endlichen schneiden (unrunde, z. B. elliptische Räder, vgl. das Modell 8 der ersten Sammlung, Kegelräder).

sind. Während die beiden Polkreise k_a und k_b auf einander abrollen, rollt gleichzeitig auch der Hilfspolkreis h, ebenfalls ohne Gleitung, auf ersteren ab, sie beständig in ihrem Berührungspunkt berührend (Fig. 4). Es ist daher auch der Mittelpunkt C des Kreises h ein fester Punkt, was indes in Rücksicht auf Verallgemeinerungen unwesentlich ist. Es gilt dann der Satz:

Fig. 4.



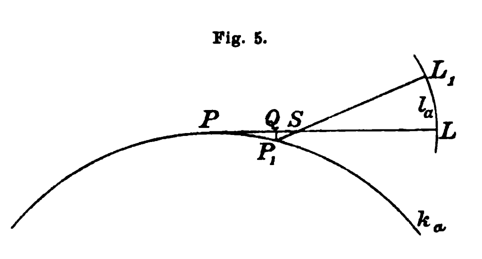
(5) *Denkt man mit der Hilfspolbahn h einen beliebigen Punkt L — wie im Modell den Punkt D oder E — fest verbunden, so beschreibt er in den Systemen Σ_a und Σ_b der Polkreise bei der Abrollung der drei Kreise auf einander zwei Bahnkurven oder „Profilkurven" l_a und l_b, welche sich in jedem Momente in jenem Punkte L berühren, bei der beschriebenen Bewegung also auf einander gleiten. Die gemeinsame Normale der Profilkurven wird jederzeit durch LP gegeben, wo P der gemeinsame Berührungspunkt der Kreise, der „momentane Pol", ist.*[1])

Des weiteren nennen wir der späteren Benutzung wegen (S. 21) noch folgenden Satz:

(6) *Ist die Verbindungslinie LP des beschreibenden Punktes L mit dem momentanen Pole P die gemeinsame Tangente der Polkreise, so ist LP Krümmungsradius sowohl der Profilkurve l_a wie l_b.*

Wir führen den Beweis für die Profilkurve l_a. (Fig. 5.) Ist an Stelle des Berührungspunktes P der unendlich benachbarte Punkt P_1 des Kreises k_a getreten und gleichzeitig L im System Σ_a nach L_1 gelangt und zwar durch Drehung um den momentanen Pol P durch einen Winkel, der hier, wo h den Kreis k_a innerlich berührt gleich der Differenz (im anderen Falle gleich der Summe) der Kontingenzwinkel für das Bogenelement $\widehat{PP_1}$ von k_a und das ihm gleiche von h ist, so ist $L_1 P_1$ die benachbarte Normale. Sie möge die ursprüngliche LP im Punkte S schneiden. Dann ist

Fig. 5.



1) Auf die Verallgemeinerung dieses Satzes, wenn bei gleichzeitiger Abrollung von k_a, k_b, h auf einander nicht ein Punkt L, der mit h fest verbunden ist, entsprechende Profilkurven l_a, l_b beschreibt, sondern eine mit h fest verbundene Kurve l solche als Enveloppen liefert, wollen wir der Kürze halber hier nicht näher eingehen.

lim $QS = 0$ und damit lim $PS = 0$, da P_1 von LP einen unendlich kleinen Abstand höherer Ordnung hat als L_1 von LP.[1])

In unserem Modell ist D speziell *auf* der Peripherie der Hilfspolbahn h gewählt, beschreibt also in den durch Glasscheiben dargestellten Systemen Σ_a und Σ_b eine vierspitzige Hypozykloide d_a und eine dreispitzige Epizykloide d_b. Der Punkt E dagegen ist *außerhalb* h gewählt und beschreibt demnach bezw. eine verschlungene Hypo- und Epitrochoide e_a und e_b. (Die Kurven d_a, d_b sind im Modell rot, die Kurven e_a, e_b grün gezeichnet.) Um die Schönheit dieser Verhältnisse wirklich voll erkennen zu können, ist es natürlich notwendig, das Modell selbst während seiner Bewegung, die mit Hilfe einer auf der Rückseite befindlichen Kurbel auszuführen ist, zu studieren.

Das *Modell 4* (Tafel I) tritt dem vorigen ergänzend zur Seite; es zeigt im wesentlichen dieselben Verhältnisse, nur berührt der Hilfspolkreis h jetzt umgekehrt den Polkreis k_a äußerlich und k_b innerlich.

Das *Modell 5* (Tafel I) veranschaulicht die technische Verwendung der geschilderten geometrischen Beziehungen, nämlich die sogenannte *Zykloidenverzahnung*. Es besteht aus einem Zahnräderpaare mit 8 und 6 je unter sich kongruenten, gleichmäßig angeordneten Zähnen dem Radienverhältnis 4:3 der Polkreise entsprechend; jenes bewirkt jetzt die Umdrehungen der Systeme Σ_a und Σ_b um die festen Punkte A, B. Und zwar sind in diesen (wie analog auch in den später zu besprechenden Modellen 8 und 10) die Zähne verhältnismäßig weit größer und dafür in geringerer Zahl konstruiert, als bei wirklich praktischen Ausführungen, um die Einzelheiten anschaulicher hervortreten zu lassen. Das Modell zeigt im einzelnen in den Systemen Σ_a und Σ_b außer den schwarz gezeichneten Polkreisen k_a und k_b dieselben beiden Paare vier- oder dreispitziger Epi- und Hypozykloiden, wieder in roter Farbe, welche die vorigen beiden Modelle enthalten, und man erkennt leicht, wie Bogen dieser Kurven an den verschiedenen Stellen jedesmal die wesentlich in Betracht kommende Begrenzung der Zähne, ihre „*Flanken*", bilden. Des genaueren begrenzt eine Epi- bezw. Hypozykloide des einzelnen Systems bezw. den als „*Kopf*" und „*Fuß*" bezeichneten Teil an der Flanke jedes Zahnes. Als unwesentliche Begrenzung von Kopf und Fuß sind

---

1) Der Satz (6) gilt entsprechend auch für die Profilkurve bei einer solchen allgemeineren analytischen Polbahn k_a und Hilfspolbahn h, die in dem für beide nicht singulären momentanen Pole P verschiedene Krümmungskreise besitzen, aber nicht mehr für solche, die dort zusammenfallende Krümmungskreise haben; wegen des letzteren Falles sehe man z. B. Schönflies, Geometrie der Bewegung, Leipzig 1886, S. 45, sowie vor allem Mehmke, Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, diese Zeitschrift Bd. 35, 1890, S. 1—24 und 65—81.

Bogen je zweier zu k_a oder k_b konzentrischer Kreise benutzt, die sogenannten *„Kopf- und Fußkreise“*, die im Modell nicht vollständig eingezeichnet sind. Endlich sind noch auf der das ganze Modell bedeckenden Glasscheibe zwei kleine Kreise in blauer Farbe eingezeichnet; sie stellen die sogenannte *„Eingriffskurve“* vor, d. h. den geometrischen Ort der Berührungspunkte entsprechender Zähne in dem festen System Σ. In diesem Falle deckt sie sich mit den beiden Hilfspolkreisen.

Einige wenige technische Einzelheiten, insbesondere übliche Annahmen aus der Praxis dieser Zahnräderkonstruktionen möchte ich im Anschluß an das Modell wenigstens noch kurz berühren. Die Zähne pflegt man stets symmetrisch auszubilden, um die Drehung der Räder im einen oder anderen Sinne zu ermöglichen; die auf einem Radius gemessenen Längen von Zahnkopf und -fuß wählt man im allgemeinen im Verhältnis 3:4, während man die Bogen des Teilkreises (Polkreises), die zur *„Zahnlücke“* und *„Zahnbreite“* gehören, um einigen Spielraum für die Zähne des Gegenrades zu gewinnen, nicht einander gleich macht, sondern gewöhnlich etwa wie 41:39 sich zu einander verhalten läßt. Dementsprechend ist unser Modell im Sinne des im System Σ_a eingezeichneten Pfeiles zu drehen, falls die vorhandenen Profilkurven sich berühren sollen.[1]) Auf die praktischen Methoden, um entsprechende Bogen zweier Profilkurven der Zykloidenverzahnung auf dem Reißbrett zu zeichnen, will ich indes nicht eingehen, nur erwähnen, daß solche insbesondere von Poncelet (1827) und Reuleaux (1861) ausgebildet sind, wobei auch die Eingriffskurven Anwendung finden.[2])

§ 4. Zusammenstellung allgemeiner Sätze der Verzahnungstheorie mit Beispielen.

Im Anschluß an die Entwicklungen des vorigen Paragraphen, die uns vor allem bereits eine wichtige Erzeugungsart entsprechender Profilkurven gaben, wollen wir nun einige allgemeine geometrische Sätze der Verzahnungstheorie zusammenstellen, welche dann bei den anderen Konstruktionsmethoden zur Anwendung gelangen. Ein für allemal sei vorweg die Voraussetzung ausgesprochen, daß alle im folgenden gegebenen Kurven regulären[3]) Charakter besitzen sollen.

---

1) Analoge Bemerkungen technischer Natur gelten auch für die beiden später besprochenen Verzahnungsarten (Modelle 8 und 10).

2) Man sehe z. B. Reuleaux, Lehrbuch der Kinematik, Bd. II, Braunschweig 1900, S. 74 und Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, S. 223 ff.

3) Vgl. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1901, S. 11 und 71.

(7) *Sind außer den Polkreisen k_a und k_b zwei — nach dem Satze (5) gewonnene — Profilkurven l_a und l_b gegeben, so gehört jede von ihnen zur Enveloppe aller Lagen, welche die andere während der Abrollung der Polkreise auf einander annimmt.*

Dieser Satz führt uns sogleich zu der von der speziellen Erzeugungsart des vorigen Paragraphen unabhängigen allgemeinen Definition:

(8) *Zwei Kurvenbogen l_a und l_b, die entsprechend den Systemen Σ_a und Σ_b der gegebenen Polkreise k_a und k_b angehören, nennt man dann einander entsprechende Profilkurven, wenn der eine zur Enveloppe aller Lagen des anderen bei der Abrollung der Polkreise gehört.*

Über die *technische* Brauchbarkeit zweier solcher Profilkurven ist hierdurch natürlich noch nichts ausgesagt.

Aus der Definition folgt sofort:

(9) *Jeder beliebige Kurvenbogen kann stets dann und nur dann als Profilkurve des einen Systems, etwa von Σ_a, aufgefaßt werden, sodaß ihm eine oder mehrere Profilkurven im anderen System Σ_b zugeordnet sind, wenn die Normalen des ersteren den zugehörigen Polkreis k_a reell schneiden.*

Mit anderen Worten besagt dies:

(10) *Man kann die eine Profilkurve unter der angegebenen Einschränkung willkürlich wählen.*

Eine ausführlichere Betrachtung wollen wir dem folgenden Satze (11) widmen. Da dieser Satz nur die Beziehung zwischen der Hilfspolbahn und je *einem* der beiden Systeme — wir bevorzugen etwa Σ_b — betrifft, so wollen wir den Index b an den Bezeichnungen k_b und l_b der Einfachheit halber im folgenden fortlassen:

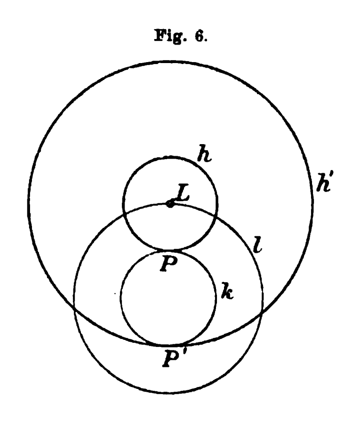
(11) *Ist außer einem Polkreise k und einem Profilkurvenbogen l auf letzterem ein Punkt L in einer solchen Anfangslage L_0 gegeben, daß die Normale in L_0 den Kreis k reell in den Punkten P und P' schneidet, so lassen sich stets zwei solche k anfangs bezw. in P und P' berührende Hilfspolbahnen h und h' bestimmen, daß der mit h oder h' festverbundene Punkt L bei der Abrollung von h oder h' auf k den Bogen l, wenigstens in der Umgebung des Punktes L_0, beschreibt.*[1])

Ehe wir den Beweis dieses wichtigen Satzes durch analytische Bestimmung der Hilfspolbahnen erbringen, wollen wir einige einfache Beispiele vorausschicken, um dadurch die Verhältnisse, die gar nicht so einfach sind, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte, anschaulicher zu machen.

1) Nach dem Satze (5) ist hiermit natürlich, wenn auch der zweite Polkreis in seiner Lage gegeben ist, auch die andere Profilkurve bestimmt und wie dort angegeben zu konstruieren

Beispiel I: Es sei die Profilkurve l *ein zum Polkreise k konzentrischer Kreis.* Dann sind die beiden Hilfspolbahnen h und h' ersichtlich ebenfalls Kreise und zwar mit dem auf l gewählten Punkte L als Mittelpunkt und der Summe bezw. Differenz der Radien von k, l als ihren Radien (Fig. 6).[1])

Fig. 6.

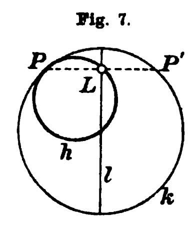


Beispiel II: Es sei l *ein Kreis, dessen Mittelpunkt M auf k gelegen ist.* Die eine Hilfspolbahn ist dann in den Punkt M selbst zusammengezogen.[2])

Beispiel III: Es sei l *ein Durchmesser des Kreises k.* Dann sind die beiden Hilfspolbahnen h und h' (abgesehen von der momentanen Lage) in dem einen Kreise vereinigt, dessen Radius gleich der Hälfte desjenigen von k ist (Fig. 7).

Beispiel IV: Es sei l *eine gewöhnliche Evolvente des Polkreises k.* Da die Normalen in allen Punkten der Evolvente (von der Spitze L_0 abgesehen) beständig h berühren, so fallen die Punkte P und P' und damit auch die Hilfspolbahnen h und h' zusammen. Die Hilfspolbahn besteht in der „Anfangslage" aus der Tangente t des Kreises in der Spitze L_0 und — dem singulären Punkte L_0 entsprechend — aus einem mit t fest verbunden zu denkenden, mit k in dieser Anfangslage sich deckenden Kreise i. (Fig. 8b.) Ersichtlich stellt dies Beispiel auch den einzigen Fall vor, wo einem Profilbogen l nur *eine* Hilfspolbahn auch in Rücksicht auf deren Lage entspricht.

Fig. 7.



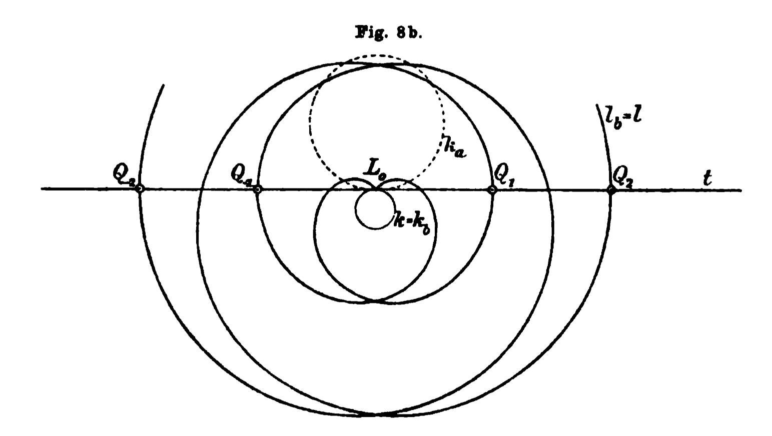
Zusatz: Ist außer $k = k_b$ noch der zweite Polkreis k_a in der Anfangslage gegeben, wo er k_b in L_0 berührt, so besteht die $l = l_b$ entsprechende vollständige Profilkurve l_a im System Σ_a als Enveloppe aller Lagen von l_b bei der relativen Abrollung von k_a und k_b aufeinander (vgl. Satz (8)) zunächst aus der gespitzten Trochoide e, die als

1) Ist außer $k = k_b$ noch der zweite Polkreis k_a in der richtigen Anfangslage gegeben, wo letzterer momentan k_b in P oder P' berührt, so wird die $l = l_b$ entsprechende Profilkurve l_a bez. l'_a ebenfalls durch je einen zu k_a konzentrischen Kreis gegeben. Man sieht leicht, daß indes diese Profilkurvenpaare zu praktischen Zahnräderkonstruktionen nicht anwendbar sind.

2) Nach der Anschauung der Lieschen Theorie der Berührungstransformationen ist M eben der Träger der unendlich vielen durch ihn gehenden Linienelemente.

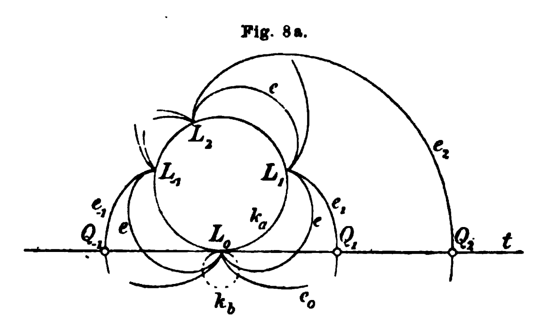
Bahnkurve der Spitze von l_b im System Σ_a erzeugt wird (Fig. 8a), dem Teil $i = k$ der Hilfspolbahn entsprechend, sodann aus im allgemeinen[1]) unendlich vielen gewöhnlichen Evolventen e_n des Kreises k_a

Fig. 8b.



($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Die erste Evolvente e_0 wird von dem Punkte L_0 in Σ_a beschrieben, wenn die zur Hilfspolbahn gehörende Gerade t auf dem in der Anfangslage befindlichen Kreise k_a in der einen oder anderen Richtung abrollt. Die übrigen Evolventen können wir folgendermaßen erzeugt denken: Es möge erst von der Anfangslage aus der zur Hilfspolbahn gehörende Kreis i, wobei er die Gerade t mitnimmt, n-mal ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) in der einen oder anderen Richtung, die durch das Vorzeichen von n bestimmt sei, vollständig auf k_a abrollen, sodaß der Punkt L_0 nach L_n auf k_a gelangt (Fig. 8a). Sodann erst möge t in der einen und anderen Richtung auf k_a abrollen; der anfangs mit L_n zusammenfallende Punkt von t beschreibt dann die Evolvente e_n, deren Spitze also mit einer Spitze der oben genannten Trochoide e zusammenfällt.

Fig. 8a.



In den zusammengehörenden Figuren 8a, b sind die Systeme Σ_a und Σ_b für sich dargestellt, und in jeder von ihnen ist der andere Polkreis in seiner Anfangslage gestrichelt angedeutet. In der Figur 8b

1) Falls nämlich nicht die Radien von k_a und k_b ein rationales Verhältnis haben.

sind allemal die zweiten Schnittpunkte der Geraden t und der Evolvente l_b mit $L_0 = Q_0, Q_n$ $(n = \pm 1, \pm 2 \ldots)$ bezeichnet, wobei $Q_{n-1}Q_n = 2b\varkappa$ ist, wenn b den Radius von k_b bezeichnet. Diese Punkte Q_n sind die momentanen Berührungspunkte der Evolvente l_b in Σ_b und der Evolventen e_n in Σ_a, wenn die Systeme sich in der Anfangslage befinden. Wir fassen unsere Betrachtung in den Satz zusammen:

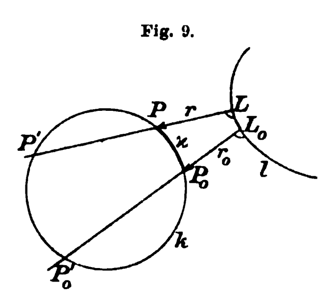
(12) *Ist die Profilkurve l_b des Systems Σ_b eine gewöhnliche Evolvente des Polkreises k_b, so besteht die vollständige Enveloppe aller Lagen von l_b im System Σ_a aus einer gespitzten Trochoide e und aus einer unendlichen oder endlichen Anzahl gewöhnlicher Evolventen des Polkreises k_a, je nachdem das Radienverhältnis von k_a und k_b irrational oder rational ist.*[1])

§ 5. Beweis des Satzes (11) und Folgerungen.

Wir gehen nun zu der in Aussicht genommenen *analytischen Berechnung der Hilfspolbahn* und damit zugleich zum allgemeinen *Beweise des Satzes* (11) über.

Es seien der Polkreis k und die Profilkurve l bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems durch ihre analytischen Gleichungen in Parameterdarstellung bezw. mit dem Parameter $\varkappa$ und λ gegeben. Ferner sei der Punkt L auf l in seiner Anfangslage L_0 durch $\lambda = \lambda_0$ bestimmt und übrigens auf einen hinreichend kleinen von L_0 auslaufenden Bogen von l beschränkt. (Fig. 9.) Man kann dann die Gleichung der Normalen von l im Punkte L aufstellen und die Schnittpunkte P, P' der Normalen mit k durch Funktionen des Parameters $\varkappa$ von λ bestimmen. Einer der Schnittpunkte, etwa P, sei im folgenden bevorzugt und die Strecke LP mit r, L_0P_0 mit r_0 bezeichnet, wo P_0 der zu L_0 gehörende Schnittpunkt ist. Fernerhin sei der Einfachheit halber sogleich eine solche Wahl des Parameters $\varkappa$ angenommen, daß dieser den Bogen $\widehat{P_0P}$ des Kreises k darstellt. Die Strecke r ist nach dem Vorstehenden ebenfalls eine wohlbestimmte Funktion des Parameters $\varkappa$, $r = F(\varkappa)$. Es sei nun von dem Falle abgesehen, daß $r = \text{const.}$ ist; derselbe führt zu einem der Beispiele I

Fig. 9.



1) Auf die durch dieses Beispiel veranschaulichte allgemeine Aufgabe, wie bei gegebenen Kurven k_a, k_b und l_b die vollständige Enveloppe aller Lagen von l_b im System Σ_a zu bestimmen sei, wollen wir nicht näher eingehen.

und II, die im vorigen Paragraphen bereits erledigt sind. Man kann dann stets die inverse Funktion $x = f(r)$ bilden.

Für die gesuchte Hilfspolbahn h, deren Existenz wir einstweilen voraussetzen wollen, führen wir Polarkoordinaten (r, φ) in ihrem System Σ_h ein, wobei in der Anfangslage der Nullpunkt mit L_0 und die positive Richtung der Polarachse mit $L_0 P_0$ zusammenfallen möge, sodaß in der zu bestimmenden Gleichung $\varphi = \varphi(r)$ der Hilfspolbahn die Größe r die frühere Bedeutung daneben behält. Da nun die Bogenlänge s der Hilfspolbahn zwischen den Radienvektoren r_0, r gleich dem Bogen $x = P_0 P$ sein soll, so gilt für die Hilfspolbahn die Gleichung $s = f(r)$. Aus ihr und $\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$ folgt:

$$f'(r) = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}\sqrt{(f'(r))^2 - 1},$$

d. h.

$$\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r}\sqrt{(f'(r))^2 - 1}\, dr. \tag{1}$$

Da $f'(r)$ bekannt oder doch im einzelnen Falle berechnet werden kann, so ist durch dieses bestimmte Integral die gesuchte Gleichung der Hilfspolbahn in Polarkoordinaten (r, φ) gegeben.[1])

Wir haben jetzt jedoch noch den *Beweis* nachzuholen, daß die durch diese Gl. bestimmte Kurve h in der Tat die gewünschte Bedingung erfüllt, d. h. daß bei ihrer Abrollung auf k von der Anfangslage aus der Nullpunkt ihres Systems Σ_h von L_0 aus den Profilkurvenbogen l beschreibt. Dies folgt aber sofort aus folgender geometrischen Überlegung: Die vom Nullpunkt des Systems Σ_h hierbei beschriebene Bahnkurve stellt ersichtlich die Enveloppe der um die einzelnen Punkte

1) Die Gleichung (1) scheint mir bisher nicht aufgestellt zu sein. Ich möchte jedoch auf eine Arbeit des 18jährigen J. Cl. Maxwell hinweisen: The Theory of Rolling Curves (1849), Transactions of the Royal Society of Edinburgh Vol. XVI, Part V, oder Scientific Papers Vol. I, S. 4—29. Dort stellt Maxwell in Anlehnung an Euler andere Gleichungen auf, welche die drei Kurven, die Polkurve, die Hilfspolkurve und die Profilkurve (the Fixed curve, the Rolled curve, the Traced curve) mit einander verknüpfen. Eigenartig ist der Maxwellschen Arbeit, was auch besonderes Interesse erweckt, die Behandlung einer großen Zahl einzelner Fälle und spezieller Beispiele. In der Einleitung wird auch auf die ältere Literatur hingewiesen, deren Autoren Varignon (1704), de la Hire (1706), Nicole (1707) (in „the History of the Royal Academy of Sciences"), Willis (Principles of Mechanism, 1841) sind.

P mit der zugehörigen Strecke r beschriebenen Kreise dar, muß daher mit der Profilkurve l identisch sein, da für diese das Gleiche gilt. —

Bei der Untersuchung, wie weit der Punkt L auf dem gegebenen Bogen l wandern kann, ohne daß das Integral seine Bedeutung verliert, müssen wir zunächst an die Beschränkung erinnern, daß die Normale in L natürlich stets den Polkreis k reell schneiden muß. Wir wollen jedoch noch die Frage diskutieren, die uns zu interessanten, später zur Anwendung kommenden Resultaten führt, *wann bei Fortsetzung des Integrals längs eines nicht ins Unendliche sich erstreckenden Bogens l, ohne daß wir hierbei einen singulären Punkt des Bogens überschreiten oder erreichen, dasselbe unendlich wird.*[1] Dies ist nur möglich, wenn der Integrand $\frac{1}{r}\cdot\sqrt{(f'(r))^2-1}$ von erster oder höherer Ordnung in bezug auf dr unendlich wird. Der Punkt L von l, für den solches, wie wir annehmen wollen, eintritt, sei jetzt der Einfachheit halber geradezu als der Punkt L_0 mit den Koordinaten x_0, y_0 gewählt. Da, wenn L bis nach L_0 sich bewegt, mit dl auch $ds = d\varkappa$ und dr gegen 0 *konvergieren*, d. h. unendlich klein von positiver Ordnung in bezug auf dl werden — der Fall $r = \text{const.}$ ist ja ausgeschlossen — so ist $\frac{ds}{dr} = f'(r)$ für $r = r_0$ endlich oder unendlich von einer Ordnung, die kleiner als 1 in bezug auf dr ist. Es bleibt daher nur der Fall zu behandeln, daß $r_0 = 0$ ist, also L_0 mit P_0 zusammenfällt, was in der Folge angenommen sei.

Der Polkreis k sei nun durch die Gleichungen gegeben:

$$(2)\qquad \left|\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \xi_0'\cdot\varkappa + \frac{\xi_0''}{2}\cdot\varkappa^2 + \cdots, \\ \eta &= \eta_0 + \eta_0'\cdot\varkappa + \frac{\eta_0''}{2}\cdot\varkappa^2 + \cdots, \end{aligned}\right.$$

1) Jede Singularität auf dem in Betracht kommenden Bogen l soll also ausgeschlossen sein; auch r ist nach der Festsetzung stets als endlich anzusehen. Hiermit sind also auch solche an sich interessante Fälle ausgeschlossen, wie sie durch die folgenden 3 Beispiele illustriert seien, bei deren Beschreibung wir der Einfachheit halber gleich von der Hilfspolbahn ausgehen wollen: Die Hilfspolbahn sei in Polarkoordinaten durch die Gleichung 1) $\varphi = \frac{C}{r}$ (hyperbolische Spirale) oder 2) $\varphi = \frac{C}{r - r_1}$ oder 3) $\varphi = \frac{C}{r_1 - r}$ gegeben, wo C und r_1 positive Konstanten seien. Der beschreibende Punkt sei im ersten Falle der asymptotische Punkt, in den beiden andern der Mittelpunkt des asymptotischen Kreises $r = r_1$. Im ersten Falle ist die Profilkurve l eine sich asymptotisch um den Polkreis k ∞ oft windende Kurve, mag die Hilfspolbahn den Kreis k „innerlich" oder „äußerlich" berühren; ähnlich in den beiden andern Fällen, wobei im letzteren bei innerlicher Berührung des Kreises k zu unterscheiden ist, ob $r_1 \gtreqless$ als der Radius von k ist. In allen diesen Fällen wird bei entsprechender Fortsetzung des Integrals $f'(r) = \infty$, ev. noch $r = 0$.

wo (ξ_0, η_0) die Koordinaten des dem Punkte L_0 entsprechenden Punktes P_0 von k und der Parameter $\varkappa$ gleich dem Bogen $\widehat{P_0 P}$ ist. Ebenso sei die Kurve l, auf dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem bezogen, gegeben durch die Gleichungen:

$$(3)\qquad \left| \begin{aligned} x &= x_0 + x_0' \cdot \lambda + \frac{x_0''}{2} \cdot \lambda^2 + \cdots, \\ y &= y_0 + y_0' \cdot \lambda + \frac{y_0''}{2} \cdot \lambda^2 + \cdots, \end{aligned} \right.$$

wo der Parameter λ ebenfalls den Bogen $\widehat{L_0 L}$ bezeichnen möge. Da L_0 kein singulärer Punkt der Kurve ist, so können x_0' und y_0' nicht gleichzeitig verschwinden, was ebenso auch für ξ_0' und η_0' gilt.[1])

Es sei die, positiven Werten von λ entsprechende Richtung der Tangente in L_0 als die positive bezeichnet und diejenige Richtung der Normalen in L_0 als die positive, welche zu der positiven Richtung der Tangente liegt wie die positive y-Achse zur positiven x-Achse. Ist dann mit α der Winkel der positiven Richtung der Normalen in L gegen die positive x-Achse bezeichnet, so ist:

$$\sin\alpha = \frac{dx}{d\lambda},$$

$$\cos\alpha = -\frac{dy}{d\lambda}.$$

Es folgt dann nach (3):

$$(4)\qquad \left| \begin{aligned} \sin\alpha &= x_0' + x_0'' \cdot \lambda + \cdots, \\ \cos\alpha &= -y_0' - y_0'' \cdot \lambda - \cdots \end{aligned} \right.$$

Die Normale im Punkte $L(xy)$, deren Punkte durch die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ bezeichnet seien, ist dann durch die Gleichungen mit dem Parameter r gegeben:

$$\left| \begin{aligned} \bar{x} &= x + \cos\alpha \cdot r, \\ \bar{y} &= y + \sin\alpha \cdot r. \end{aligned} \right.$$

Soll die Normale den Kreis k im Punkte P mit dem Parameter $\varkappa$ schneiden, so gewinnen wir folgende beiden Gleichungen zur Festlegung zusammengehörender Parameterwerte $\varkappa$, λ, r:

$$(5)\qquad \left| \begin{aligned} \left(\xi_0 + \xi_0' \cdot \varkappa + \frac{\xi_0''}{2} \cdot \varkappa^2 + \cdots\right) &= \left(x_0 + x_0' \cdot \lambda + \frac{x_0''}{2} \cdot \lambda^2 + \cdots\right) - \left(y_0' + y_0'' \cdot \lambda + \cdots\right) \cdot r, \\ \left(\eta_0 + \eta_0' \cdot \varkappa + \frac{\eta_0''}{2} \cdot \varkappa^2 + \cdots\right) &= \left(y_0 + y_0' \cdot \lambda + \frac{y_0''}{2} \cdot \lambda^2 + \cdots\right) + \left(x_0' + x_0'' \cdot \lambda + \cdots\right) \cdot r, \end{aligned} \right.$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(6)\qquad \left| \begin{aligned} \xi_0 &= x_0, \\ \eta_0 &= y_0. \end{aligned} \right.$$

---

1) Vgl. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1901, S. 20 ff. und 71.

Der Einfachheit halber sei jetzt das Koordinatensystem so gewählt, daß die positive Richtung der y-Achse mit der positiven Richtung der Normalen in L_0 identisch ist. Dann ist $x_0' = 1$, $y_0' = 0$, (ferner noch $x_0'' = 0$, da $\alpha = 90^0$ für $\lambda = 0$, also in der Entwicklung für $\sin\alpha$ das Glied erster Ordnung in bezug auf λ fehlt).[1])

Da wir uns ferner auf beliebige Nähe von L_0 beschränken, so können wir an Stelle von $\varkappa$, λ, r einführen $d\varkappa$, $d\lambda$, dr. Die Gleichungen (5) gehen dann über in:

$$(5') \quad \left| \begin{aligned} &(\xi_0' d\varkappa + \tfrac{\xi_0''}{2} d\varkappa^2 + \cdots) = (d\lambda + \tfrac{x_0'''}{6} d\lambda^3 + \cdots) - (y_0'' d\lambda + \cdots) dr, \\ &(\eta_0' d\varkappa + \tfrac{\eta_0''}{2} d\varkappa^2 + \cdots) = \left(\tfrac{y_0''}{2} d\lambda^2 + \cdots\right) + (1 + \tfrac{x_0'''}{2} d\lambda^2 + \cdots) dr, \end{aligned} \right.$$

oder bei Vernachlässigung höherer Glieder:

$$(5'') \quad \left| \begin{aligned} &(\xi_0' d\varkappa + \tfrac{\xi_0''}{2} d\varkappa^2 + \cdots) = d\lambda, \\ &(\eta_0' d\varkappa + \tfrac{\eta_0''}{2} d\varkappa^2 + \cdots) = dr + \left(\tfrac{y_0''}{2} d\lambda^2 + \cdots\right). \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$f'(0) = \lim_{r = r_0 = 0} \left(\frac{d\varkappa}{dr}\right) = \frac{1}{\eta_0'} = \frac{1}{\pm \sin\vartheta},$$

wo ϑ der spitze Winkel der Tangenten von k und l im Punkte L_0 sei, d. h.

(13) *$f'(0)$ bedeutet (abgesehen vom Vorzeichen) das Reziproke vom Sinus des spitzen Winkels ϑ, unter dem sich die Kurven k, l im Punkte L_0 schneiden.*

Wir unterscheiden nun die drei Fälle:

1) $f'(0)$ ist von 1 und ∞ verschieden, 2) $f'(0) = 1$, 3) $f'(0) = \infty$.

Der *erste Fall* führt sogleich zu folgendem Ergebnis:

Falls die Kurven k, l weder sich unter einem rechten Winkel im Punkte L_0 schneiden noch sich dort berühren, wird der Integrand der Formel (1), *S.* 13, *für* $\lim r = r_0 = 0$ *von der ersten Ordnung unendlich groß in bezug auf dr, das Integral selbst wird daher bei Annäherung an die Stelle L_0 logarithmisch unendlich*, oder mit anderen Worten:

(14) *Schneidet die Profilkurve l den Polkreis k unter einem von* 0^0 *und* 90^0 *verschiedenen Winkel, so hat die Hilfspolbahn entsprechend einen logarithmischen Asymptotenpunkt.*

Wir werden später den Satz (14) noch an einem bestimmten Beispiel näher studieren (vgl. S. 26); jetzt wollen wir nur noch be-

---

1) Vgl. Scheffers, l. c. S. 5, Satz 1.

merken, daß die Bogenlänge der Hilfspolbahn von einem endlichen Punkte L bis zum Asymptotenpunkte gleichwohl *endlich* bleibt, wie es von der logarithmischen Spirale $\varphi = C \cdot \lg r$ selbst wohlbekannt ist.

Im *zweiten Falle* $f'(0) = 1$, d. h. wenn $\eta_0' = 1$ ist, wird der Integrand der Formel (1) für $\lim r = 0$ von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich klein oder endlich, sodaß auch das Integral bei Annäherung an die Stelle L_0 endlich bleibt, d. h.

(15) *Schneidet die Profilkurve l (in einem nicht singulären Punkte) den Polkreis unter rechtem Winkel, so besitzt die Hilfspolbahn entsprechend keine asymptotische Singularität.*

Veranschaulicht wird dieser Fall durch das Beispiel III, S. 10 (Fig. 7) in dem Momente, wo der Punkt L den Polkreis k erreicht.

Im *dritten Falle* $f'(0) = \infty$, d. h. wenn $\eta_0' = 0$, also $\xi_0' = 1$ ist, ist nach der ersten der Gleichungen (5'') in erster Annäherung $d\lambda = d\varkappa$, nach der zweiten dieser Gleichungen demnach $dr = C \cdot d\varkappa^m$, wo C eine von 0 verschiedene Konstante und m eine positive ganze Zahl ist, die $\geqq 2$ ist. Folglich wird $\frac{d\varkappa}{dr} = f'(r)$ für $\lim r = 0$ unendlich groß von der Ordnung $1 - \frac{1}{m}$ in bezug auf dr.

Der Integrand wird demgemäß für $r = 0$ unendlich groß von der Ordnung $2 - \frac{1}{m}$ in bezug auf dr und das Integral selbst unendlich groß wie $\frac{1}{r^{1-\frac{1}{m}}}$, sodaß die Hilfspolbahn in der Nähe des L_0 entsprechenden Punktes in erster Annäherung durch $\varphi = \frac{c}{r^{1-\frac{1}{m}}}$ dargestellt wird, wo c eine nicht verschwindende Konstante bezeichnet.

(16) *Berührt also die Profilkurve l (in einem nicht singulären Punkte) den Polkreis k, so hat zwar die entsprechende Hilfspolbahn einen algebraischen asymptotischen Punkt, doch bis zu ihm eine endliche Bogenlänge, von einem endlichen Punkte an gerechnet.*

Um ein *Beispiel für diesen dritten Fall* zu erhalten, sei zu dem Kreise k mit dem Radius b seine Tangente im Punkte L_0 als Profilkurve l gegeben. Zur Anwendung der Formel (1) S. 13 sei jetzt indes die äußerste Normale von l, welche den Kreis k noch reell trifft, als die bei der Ableitung der genannten Formel benutzte Anfangslage der Polarachse gewählt und hier mit $\overrightarrow{L_* P_*}$ (anstatt $\overrightarrow{L_0 P_0}$, wie S. 12) bezeichnet. Dementsprechend seien von P_* und L_* die Bogen $\varkappa$ und λ gemessen. (Fig. 10.) Dann ist:

$$s = \varkappa = b \cdot \arcsin \frac{b - r}{b},$$

wo $r = LP$ die Länge der Normalen in einem beliebigen Punkte L bis zum Kreise bezeichnet.

Es folgt:

$$f'(r) = \frac{ds}{dr} = -\frac{b}{\sqrt{b^2 - (b-r)^2}}$$

und nach Formel (1):

$$\varphi = \int_b^{r<b} \frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2}{b^2-(b-r)^2} - 1}\, dr \quad \text{oder} \quad \varphi = \int_b^r \frac{b-r}{r}\frac{1}{\sqrt{2br - r^2}}\, dr.$$

Dies Integral läßt sich leicht auswerten und ergibt:

$$\varphi = \frac{r - \sqrt{b^2-(b-r)^2}}{r} + \arcsin\frac{b-r}{b}, \tag{7}$$

wo für das betrachtete Intervall $0 \leqq r \leqq b$ die Wurzel positives Vorzeichen bekommt und die Ungleichungen $\frac{\pi}{2} \geqq \arcsin\frac{b-r}{b} \geqq 0$ gelten. In der Tat wird dem Satze (16) entsprechend für $\lim r = 0$ die Amplitude φ unendlich groß von derselben Ordnung wie $\lim\limits_{r=0} \frac{-1}{r^{\frac{1}{2}}}$, während die Bogenlänge der Kurve vom Punkte $r = b$, $\varphi = 0$, bis zum Asymptotenpunkt $b\frac{\pi}{2}$ beträgt.

Um die *vollständige* Gestalt der durch die Gleichung (7) definierten Kurve besser zu überblicken, führen wir das neue Polarkoordinatensystem (r, ψ) ein, das durch die Transformation $\psi = \frac{\pi}{2} - 1 + \varphi$ aus dem früheren unter Beibehaltung des Poles hervorgeht. Die Gleichung (7) geht dabei über in:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{b^2-(b-r)^2}}{r} + \arcsin\frac{b-r}{b} \tag{7'}$$

oder

$$\psi = \arccos\frac{r-b}{b} - \frac{\sqrt{b^2-(b-r)^2}}{r}, \tag{7''}$$

wo den Ungleichungen $0 \leqq r \leqq 2b$ entsprechend $\pi \geqq \left|\arccos\frac{r-b}{b}\right| \geqq 0$ gelten möge und die Vorzeichen der Wurzel und des ersten Gliedes stets die gleichen sind.[1])

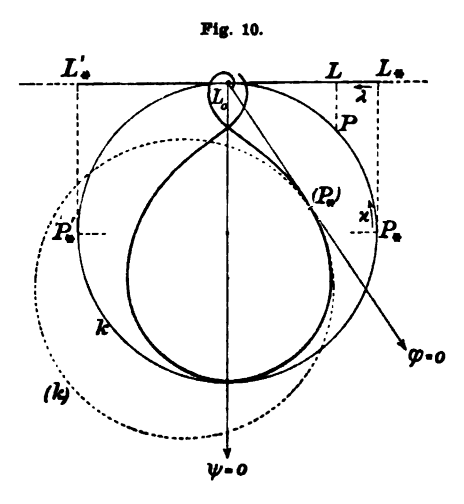
Die vollständige Kurve ist symmetrisch zur neuen Polarachse und besitzt dementsprechend zwei asymptotische Punkte, ihre Gesamtlänge beträgt $2b\pi$. Wir haben es hier mit einem interessanten Beispiele einer „genauen Geradführung" zu tun, wie der folgende Satz näher erläutert:

---

1) Vgl. Maxwell, The Theory of Rolling Curves (1849), Scientific Papers I, S. 24, Exemple 3.

(17) *Rollt die durch die Gleichung (7″) dargestellte Kurve bei richtiger Berührung auf dem Kreise mit dem Radius b ab (Fig. 10), so beschreiben ihre beiden zusammenfallenden Asymptotenpunkte ein Stück einer Tangente des Kreises, und zwar wird eine dem Durchmesser des Kreises gleiche Strecke doppelt beschrieben, wenn die Kurve vollständig von einem bis zum andern Asymptotenpunkte abrollt. In dem Momente, wo P_* oder der gegenüberliegende Punkt P_*' des Kreises (Fig. 10) der Berührungspunkt ist, ist der Kreis selbst Krümmungskreis der Kurve.*[1])

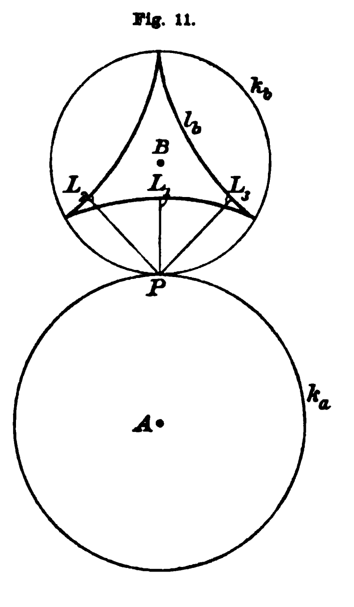
Fig. 10.



§ 6. Beispiel einer Profilkurve und der vollständigen Enveloppe ihrer Lagen im anderen System, Modell 6.

Die geschilderten allgemeinen Verhältnisse zu veranschaulichen soll nun zunächst das Modell 6 (siehe Tafel II) berufen sein, für das die *zweite Bewegungsart* (vgl. S. 5) gewählt ist. In dem einen System, Σ_b, sehen wir dieselbe *Steinersche Hypozykloide* gezeichnet, der wir bereits im Modell 4 begegnet sind. Im System Σ_a ist dann die *vollständige Enveloppe* aller ihrer Lagen bei Abrollung der Polkreise k_a und k_b auf einander dargestellt. Diese Enveloppe besteht einmal aus der vierspitzigen Epizykloide d, die auch im Modell 4 vorkommt, sodann noch aus 2 zweispitzigen Epizykloiden e_1, e_2 und aus einer vierspitzigen Epizykloide i als gemeinsamer Bahnkurve der 3 Spitzen der Hypozykloide. Von einem beliebigen

Fig. 11.

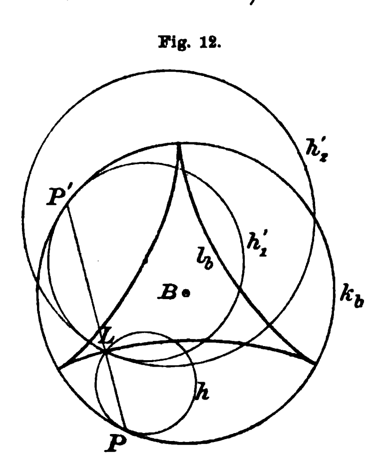


1) Auf die allgemeinere, ebenso einfach sich erledigende Aufgabe, alle Hilfspolbahnen zu bestimmen, deren jede mit einem fest mit ihr verbundenen Punkte bei Abrollung auf einem gegebenen Kreise eine geradlinige Strecke beschreibt, sei hier nur eben hingewiesen.

Punkte P der Polbahn k_b lassen sich nämlich, abgesehen von den Verbindungslinien des Punktes mit den Spitzen, stets drei reelle Normalen auf die Hypozykloide fällen (Fig. 11), den drei Berührungsstellen derselben mit den drei genannten Epizykloiden d, e_1, e_2 für den Moment entsprechend, wenn der ausgewählte Punkt P der Berührungspunkt von k_a und k_b geworden ist.

Von den beiden Hilfspolbahnen, die sich zu der Hypozykloide konstruieren lassen, ist die eine, h, der Kreis, der auch im Modell 4 als solche benutzt ist (Fig. 12). Die andere vollständige Hilfspolbahn h', ist zerfallen und besteht aus einem Kreis h_1', dessen Radius gleich $\frac{2}{3}$ von dem des Polkreises k_b ist, und einem h_1' in dem beschreibenden Punkte L berührenden Kreise h_2' mit gleichem Radius wie der Polkreis k_b (Fig. 12).[1]) (In dieser Hinsicht ist es interessant, die Fälle zu vergleichen, von denen der vorliegende den Übergang darstellt, wo nämlich an Stelle der Hypozykloide eine entsprechende verschlungene oder gestreckte Hypotrochoide tritt, wie deren erste ebenfalls das Modell 4 zeigt, und den Grenzübergang zu unserm Falle zu studieren, der insbesondere das erwähnte Zerfallen der zweiten Hilfspolbahn h' noch deutlicher macht.) Den drei reellen Normalen vom augenblicklichen Pol P aus entsprechend (Fig. 11) sind in jedem Moment relativ zu den Systemen Σ_a und Σ_b eine Lage der Hilfspolbahn h und zwei von h' zu berücksichtigen, also wieder abgesehen von den drei Lagen von h' entsprechend den drei Verbindungslinien von P mit den *Spitzen* der Hypozykloide.

Fig. 12.



§ 7. Methode der Äquidistanten, Triebstockverzahnung, Modelle 7 u. 8.

Gegeben seien wie im entsprechenden *Modell 7* (siehe Tafel II) unter Zugrundelegung der *zweiten* Bewegungsart (vgl. S. 5) die beiden Polkreise k_a und k_b mit dem Radienverhältnis $2:1$, ein Punkt D im System Σ_b, der speziell auf der Peripherie von k_b gewählt ist, und seine Bahnkurve d_a im System Σ_a bei Abrollung der Polkreise, eine

1) Die Hilfspolbahnen h und h_1' entsprechen der doppelten Erzeugung der Hypozykloide als solche mit freiem oder mit bedecktem Zentrum, vgl. meine Arbeit in dieser Zeitschrift Bd. 44, 1899, S. 221. (Sonder-Abdr. S. 9.)

Epizykloide mit den zwei Spitzen D' und D''. Zum Punkte D, der eben als Grenze eines Kreises mit unendlich kleinem Radius aufgefaßt werden kann, ist die *äquidistante Kurve*, der Kreis l, gezeichnet. Diese wird dann in allen ihren Lagen umhüllt von einer in die Kurvenzüge i_1 und i_2 sich zerlegenden Kurve, die, wie leicht zu übersehen ist, ihrerseits die Äquidistante der Epizykloide d_α bildet. Die Kurvenzüge i_1 und i_2 sind unter sich kongruent, nur gegen einander um 180° gedreht, und haben je 2 Spitzen, die sie in einen kleineren und einen größeren Bogen zerlegen. Zu der *vollständigen Äquidistante* der Epizykloide d_α oder der *vollständigen Enveloppe* aller Lagen von l gehören überdies noch die beiden mit l kongruenten Kreise l', l'' um die Punkte D' und D''. Jeder dieser Kreise berührt die Kurvenzüge i_1 und i_2 in den Endpunkten E_1', E_2' und E_{11}'', E_2'' der k_α tangierenden Durchmesser von l' und l'' und stellt zugleich die Krümmungskreise der Kurvenzüge in diesen Punkten dar (vgl. Satz 6, S. 6). Diese letzte Eigenschaft ersieht man am einfachsten daraus, daß ja die Epizykloide d_α und ihre Aquidistanten i_1, i_2 Evolventen derselben Evolute sind. Diese Evolute ist eine zu d_α ähnliche Epizykloide d^*, deren Scheitel in den Spitzen von d_α liegen.[1]) Sie ist auch im Modell 7 eingezeichnet. Auf dieser innerhalb k_α liegenden Evolute d^* liegen daher auch die Spitzen der Kurvenzüge i_1 und i_2[2]), sodaß z. B. der Bogen der Evolute d^* von D' bis zu der benachbarten Spitze von i_1 oder i_2 gleich dem Radius von l ist. Diese Tatsache gestattet analog auch leicht die Fälle zu übersehen, daß etwa der Radius des Kreises l im Gegensatz zu der Annahme des Modelles, gleich oder größer als der Bogen der Evolute d^* von D' bis zu einer ihrer Spitzen (d. h. als der vierte Teil der gesamten Bogenlänge von d^*) gewählt ist, wobei dann die Äquidistanten i_1, i_2 *keine* Spitzen mehr besitzen.

Schließlich ist noch in dem durch eine Glasscheibe dargestellten Systeme Σ die Eingriffskurve e gezeichnet; sie stellt eine verschlungene Pascalsche Schnecke dar (vgl. S. 2). Ihre Entstehung ist am besten bei Annahme der *ersten* Bewegungsart (vgl. S. 5) zu überblicken. Man erhält ja die momentanen Berührungspunkte K_1, K_2 des Kreises l und der Äquidistanten i_1, i_2 (siehe die Abbildung des Modells 7, Tafel II),

---

1) Die Evolute einer gespitzten Trochoide ist eine ähnliche gespitzte Trochoide, deren Scheitel in den Spitzen der ersteren liegen, vgl. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 159.

2) Die Spitzen von i_1, i_2 gehen daher mit anderen Worten aus solchen Punkten der Äquidistanten d_α hervor, deren Krümmungsradien gleich dem Radius des Kreises l sind.

wenn man auf der Verbindungslinie des Poles P mit D von letzterem Punkte aus den Radius von l beiderseits abträgt (vgl. Satz 3, S. 3).

(17) *Je nachdem der Radius von l größer, gleich oder kleiner als der Durchmesser von k_b ist, wird die Eingriffskurve e demnach eine gestreckte, gespitzte oder verschlungene Pascalsche Kurve.*

Die *allgemeinen* Verhältnisse der *„Methode der Äquidistanten"* indes, von dem unser Modell einen speziellen Fall zur Anschauung bringt, seien durch folgenden Satz angedeutet:

(18) *Sind d_a und d_b zwei zu einander gehörende Profilkurven, so gilt gleiches auch von ihren entsprechenden Äquidistanten.*

Das Spezielle unseres Beispieles beruht eben darin, daß die eine Profilkurve, d_b, in den Punkt D zusammengezogen ist.

Das *Modell 8* zeigt nun die Verwendung der geschilderten Methode bei der *Triebstockverzahnung.*[1]) Die Polkreise des Modelles sind dieselben wie vorhin. Die Zähne des einen Rades bestehen aus Zapfen (Triebstöcken) mit kreisförmigem Querschnitt, dem Kreise l des vorigen Modelles entsprechend. Die Begrenzung jedes Zahnes des anderen Rades (Zahnflanke) wird, soweit sie wesentlich ist, von Bogen der dem Kreise l entsprechenden Profilkurve i_1, i_2 gebildet, die eben nach dem Vorstehenden die Äquidistanten der Bahnkurve d_a des Zapfenmittelpunktes sind.[2])

Wir sehen in dem Modell ferner wieder die Eingriffskurve e (blau) des Systems Σ eingezeichnet, eine aus zwei fast gleich großen Schleifen bestehende Pascalsche Kurve.

Doch eine wichtige Bemerkung ist hier noch zu machen, derentwegen wir der Deutlichkeit halber auf das vorige Modell zurückgreifen. Der als Zahnbegrenzung zu benutzende, an eine Spitze S angrenzende Bogen des Äquidistantenzweiges i_1 muß, wie leicht zu erkennen ist, dem kleineren der von seinen Spitzen begrenzten Teile entnommen werden. Nun dringt dieser Bogen jedoch, wie ein solcher in der Figur 13 durch Schraffierung hervorgehoben ist, wo der Deutlichkeit wegen überdies der Querschnittskreis l des Zapfens wieder größer als im Modell 8 gewählt ist, während der Bewegung in das Innere des Kreises l hinein, am meisten, wenn letzterer sich mit seinem Mittel-

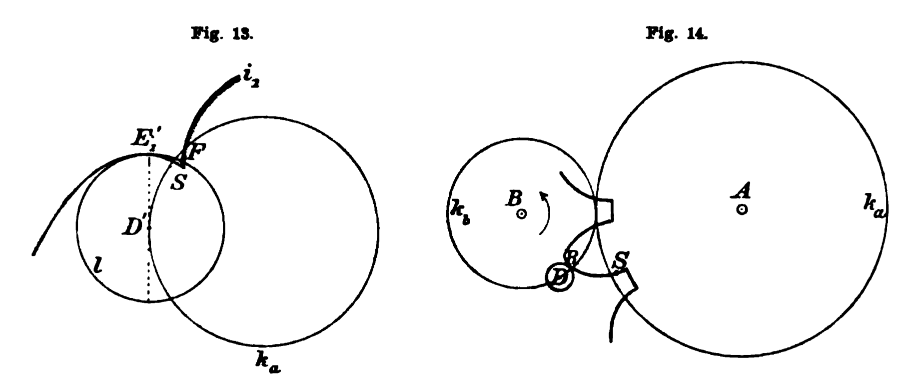
---

1) Vgl. z. B. Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, S. 233.

2) Die Triebstockverzahnung wird zur *Punktverzahnung* (vgl. Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, S. 232), wenn der kreisförmige Querschnitt jedes Zahnes des einen Rades sich auf seinen Mittelpunkt D zusammenzieht, der dann technisch durch eine Ecke oder Spitze an dem Rade ausgebildet wird. Diese Punkte bilden dann allein die wesentliche Zahnbegrenzung, während jeder Zahn des andern Rades vom Bogen der Bahnkurve d_a begrenzt wird.

punkt im Punkte D' befindet (d. h. wenn l Krümmungskreis im Punkte E_1' ist) und würde folglich, streng theoretisch genommen, nicht

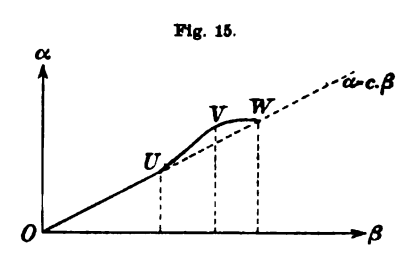
Fig. 13. Fig. 14.



bis zur Spitze S als Zahnbegrenzung benutzt werden können, sondern nur soweit er außerhalb des um D' beschriebenen Kreises l verläuft, d. h. in der Figur 13 bis zum Punkte F.[1])

Doch um diese Verhältnisse genau zu übersehen, wollen wir untersuchen, was geschieht, wenn trotzdem der Bogen i_1 bis zur Spitze S zur wesentlichen Zahnbegrenzung[2]) benutzt wird. Es ist bequem, zu diesem Zwecke für einen Augenblick das Rad im System Σ_b oder das Rad Σ_b, wie wir kurz sagen wollen, als das treibende[3]) anzusehen, und zwar möge es sich entgegengesetzt dem Drehungssinne des Uhrzeigers drehen. Wir verfolgen nun successive den Eingriff eines Triebstockes mit dem Mittelpunkt D in einen Zahn des Rades Σ_a. Dieser Eingriff beginnt mit der Berührung beider im äußersten Berührungspunkte R der Zahnflanke von Σ_a. Von dieser Anfangslage der ersten Berührung aus wollen wir die Drehungswinkel α und β der Systeme Σ_a und Σ_b rechnen, wobei α allemal als Funktion von β bestimmt ist. Bei der weiteren Drehung des Rades Σ_b wandert dann der Berührungspunkt auf der Zahnflanke von Σ_a bis zum Punkte S, der Spitze des Bogens i_1, wobei das Verhältnis $\alpha : \beta$ gleich der Konstanten c (in unserem Beispiel

Fig. 15.



1) Vgl. z. B. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 186.

2) Die unwesentliche Zahnbegrenzung denken wir natürlich so gewählt, daß sie wirklich unwesentlich ist, d. h. die Bewegung nicht beeinflußt. Vgl. Anm. 1, S. 25.

3) Im Modell 8 ist dagegen das Rad Σ_a als das treibende konstruiert.

gleich $1/2$) ist, wie es sein soll.[1]) Es seien die Größen α, β in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gedeutet, und die Funktion $\alpha = c \cdot \beta$ sei der bisher betrachteten Drehung entsprechend durch die Strecke OU veranschaulicht (Fig. 15).

Um die weitere Bewegung zu verfolgen, könnte man annehmen, daß diese zunächst nach dem Gesetz $\alpha = c \cdot \beta$ sich fortsetzte. Doch dann würde der Zahn des Rades Σ_a mit der Stelle S in den Triebstock des Rades Σ_b eindringen. In jedem Moment wird daher das Rad Σ_a sich noch um einen solchen kleinen Winkel ε über den Winkel $c \cdot \beta$ hinaus gedreht haben, daß der Punkt S wieder auf der Peripherie des Triebstockes liegt. Der Winkel ε ist natürlich ebenfalls eine Funktion von β, die von 0 zunächst bis zu einem größten dann erreichten Werte wächst, wenn der Mittelpunkt des Triebstockes auf dem Kreise k_a (oder der momentane Pol im Punkte D') liegt (Fig. 13), um darauf wieder bis zum Werte 0 abzunehmen. Von diesem Zeitpunkte an tritt der Eingriff des nächsten Triebstockes mit dem nächsten Zahne in sein Recht. Die Funktion $\alpha = c \cdot \beta + \varepsilon$ sei schematisch durch den Bogen UVW der Fig. 15 veranschaulicht, wo V dem Maximum von ε entspricht und W auf der Verlängerung von OU liegt. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_a : \omega_b$, das durch die Richtungskoeffizienten der Tangenten der Kurve UVW gegeben wird, bleibt also nicht konstant gleich c, wie vorhin, sondern ist zunächst größer als c, dem Punkte V entsprechend gleich c, und dann kleiner als c. Da also in der Tat die Bewegung streng genommen nicht mehr nach dem vorangestellten Gesetze $\omega_a : \omega_b = c$ erfolgt, dürfte, wie wir bereits sagten, der Bogen i_1 nicht bis zur Spitze zur Zahnbegrenzung des Rades Σ_a benutzt werden. Nun erweist sich indeß in den praktischen Fällen, wo der Durchmesser der Triebstöcke doch verhältnismäßig klein gewählt wird, das Eindringen des Bogens i_1 mit der Spitze S in den um D' beschriebenen Kreis l so gering, daß es in der Zeichnung überhaupt nicht scharf dargestellt werden kann.[2]) (Im Modell 7, wo doch der Kreis l weit größer gewählt ist als in praktischen Fällen, ist der besseren Deutlichkeit wegen dieses Eindringen etwas stärker gezeichnet, als es wirklich statthat; im Modell 8, wo der Durchmesser der 6 Triebstöcke des Rades Σ_b gleich 6,5 mm gewählt wurde, ist, um dieses Eindringen zu

---

1) Der dem Berührungspunkte S entsprechende momentane Pol ist von D' (Fig 13) noch angenähert um die Hälfte des Radius von l entfernt.

2) Die streng rechnerische Behandlung dieser Frage dürfte ihre Schwierigkeit haben. — Schon die Abnutzung der Räder würde übrigens zweifellos größere Veränderungen in der Konstanz von $\omega_a : \omega_b$ bewirken, als dieses Eindringen von i_1 in den Kreis l um D'.

veranschaulichen, ebenfalls die Epizykloide d^* hinzugezeichnet, auf der die Spitzen von i_1, i_2 liegen.)

Es kann daher unbedenklich der Bogen i_1 bis zur Spitze S als Zahnflanke des Rades Σ_a benutzt und dementsprechend, was für die praktische Konstruktion der Zahnräder wichtig ist, das durch den einzelnen Triebstock und seinen gegnerischen Zahn bewirkte Abrollen der Polkreise k_a und k_b wenigstens bis dahin gerechnet werden, daß der Mittelpunkt des Triebstockes momentaner Pol wird. Nebenhin sei noch bemerkt, daß die unwesentliche Begrenzung der 12 Zähne des Systems Σ_a teils von Bogen zum Polkreis k_a konzentrischer Kreise, teils von Radien des Polkreises gebildet ist.[1])

§ 8. Methode der sekundären Polbahnen; Evolventenverzahnung; Modelle 9—11.

Im *Modell 9* erkennen wir unter Zugrundelegung der *ersten* Bewegungsart (vgl. S. 5) in den mit Glasscheiben versehenen Systemen Σ_a und Σ_b außer den Polkreisen k_a und k_b zwei zu ihnen konzentrische Kreise k_a' und k_b', die *„sekundären Polbahnen"*, mit demselben Radienverhältnis wie k_a und k_b. Die durch Abrollung der Polbahnen k_a und k_b aufeinander bestimmte Bewegung der beiden Systeme wird jetzt dadurch hervorgerufen, daß eine technisch als Zahnstange ausgebildete Gerade g, die dann durch den Pol P geht, auf den mit Zahnrädern versehenen sekundären Polbahnen ohne Gleitung abrollt. Ein auf g beliebig gewählter Punkt L beschreibt hierbei gleichzeitig in den Systemen Σ_a und Σ_b zwei Kurven, l_a und l_b, *gewöhnliche Evolventen der Kreise k_a' und k_b'*, die in jedem Moment einander in L berühren und daher entsprechende Profilkurven darstellen. Eine mit der Geraden g sich deckende Gerade im System Σ stellt zugleich die *Eingriffskurve* dar.

Die praktische Anwendung dieser Profilkurven bei der als *Evolventenverzahnung* bezeichneten Zahnräderkonstruktion ergibt sich nach Analogie der früheren Fälle von selbst.[2]) Wir sehen sie im *Modell 10* veranschaulicht. Bogen solcher Evolventenpaare in der Nähe ihrer Spitzen bilden wieder die wesentlichen Teile der Zahnflanken, während die Zähne sonst noch durch konzentrische Kreise und Radien begrenzt werden. Im System Σ_a sind vier, im System Σ_b drei solche Evolventenbogen gezeichnet; überdies ist auch hier im System Σ die Eingriffskurve

---

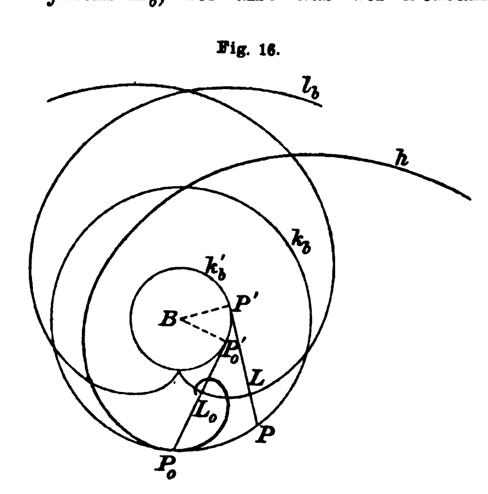
1) Diese von der Spitze S ausgehende radiale Begrenzung würde streng genommen auch das konstante Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten stören, was praktisch jedoch wieder nicht in Betracht kommt.

2) Vgl. z. B. Bach, Maschinenelemente, Stuttgart 1901, S. 233 ff.

als Gerade g_0 hinzugefügt. Man pflegt, um technisch brauchbare Verhältnisse zu bekommen, den Winkel, unter dem die Zentrale AB die Gerade g_0 schneidet, als 75° zu wählen. In unserem Modell ist dieser Winkel indes kleiner als 75° gewählt, da sonst die Verhältnisse bei dem kleinen Maßstabe nicht deutlich genug werden würden.

Wir beschränken uns im folgenden auf den Teil der Figur im System Σ_b, der also aus der Polbahn k_b, der sekundären Polbahn k_b' und der Evolvente l_b besteht. Nach Satz (11), S. 9 muß es nun auch eine Hilfspolbahn h geben, sodaß durch deren Abrollung auf k_b von einem mit ihr fest verbundenen Punkte L ein vorgegebener Bogen der Profilkurve l_b erzeugt wird. Da die Normalen von l_b den Polkreis k_b unter konstantem Winkel schneiden, so müssen die Hilfspolbahnen solche Kurven sein, welche ihre Radienvektoren nach dem Punkte L ebenfalls unter konstantem Winkel schneiden (Fig. 16), d. h.

Fig. 16.



(19) *Jede Hilfspolbahn, welche durch ihre Abrollung auf dem Kreise k_b einen Bogen der zum konzentrischen Kreise k_b' gehörenden gewöhnlichen Evolvente erzeugt, ist eine logarithmische Spirale mit ihrem Asymptotenpunkt als dem die Evolvente beschreibenden Punkte.*[1])

Wir wollen dies Resultat auch analytisch ableiten anknüpfend an die Betrachtungen der Seite 13ff. Die Radien der Kreise k_b und k_b' seien mit b und b' bezeichnet. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen r, r_0, s (S. 13) ist dann (Fig. 16):

$$P_0L_0 - PL = r_0 - r = LP' - L_0P_0' = \frac{b'}{b} \cdot s$$

oder

$$s = (r_0 - r) \cdot \frac{b}{b'} = f(r), \quad \text{d. h.} \quad f'(r) = -\frac{b}{b'}.$$

Folglich ergibt sich nach Formel (1) S. 13

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{b}{b'}\right)^2 - 1}\,\lg\frac{r}{r_0}$$

1) Vgl. Maxwell, The Theory of Rolling Curves, Scientific Papers I, S. 16, sowie Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 185.

oder

$$\varphi = \varepsilon \cdot \lg \frac{r}{r_0}, \quad \text{wo } \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{b}{b'}\right)^2 - 1}$$

ist.

Da $\frac{b'}{b} = \cos\psi$ ist, unter ψ den konstanten Winkel zwischen PL und der Tangente in P an den Kreis k_b verstanden, so ist:

$$\varepsilon = -\operatorname{tg}\psi,$$

und es folgt als Resultat:

(20) *Die Gleichung der als Hilfspolbahn auftretenden logarithmischen Spirale ist:*

$\varphi = -\operatorname{tg}\psi \cdot \lg \frac{r}{r_0}$, *wo ψ zugleich der Steigungswinkel der logarithmischen Spirale ist.*

Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse bietet sich das *Modell 11* dar. Als Erweiterung des Modells 9 konstruiert zeigt es eine solche logarithmische Spirale h, welche gleichzeitig auf k_a und k_b abrollend mit ihrem Asymptotenpunkt zusammengehörende Bogen der Evolventen l_a und l_b beschreibt.

Da *die Bogenlänge S der logarithmischen Spirale* von einem ihrer Punkte (r, φ) bis zum Asymptotenpunkte *endlich* ist, nämlich $S = \frac{r}{\cos\psi}$, so kann die Hilfspolbahn *bis zum Asymptotenpunkt* ohne weiteres auf k_a und k_b abrollen. Der Punkt L wird dann gerade nach den Schnittpunkten T_a und T_b von l_a, l_b bezw. mit k_a, k_b gelangt sein (Abbildung des Modelles 11 auf Tafel II). Da hierbei die logarithmische Spirale sich unendlich oft überschlagen muß, so kommt das Modell dem Augenblick der vollständigen Abrollung natürlich nur nahe, jedoch hinreichend nahe, um den weiteren Verlauf leicht überblicken zu lassen.

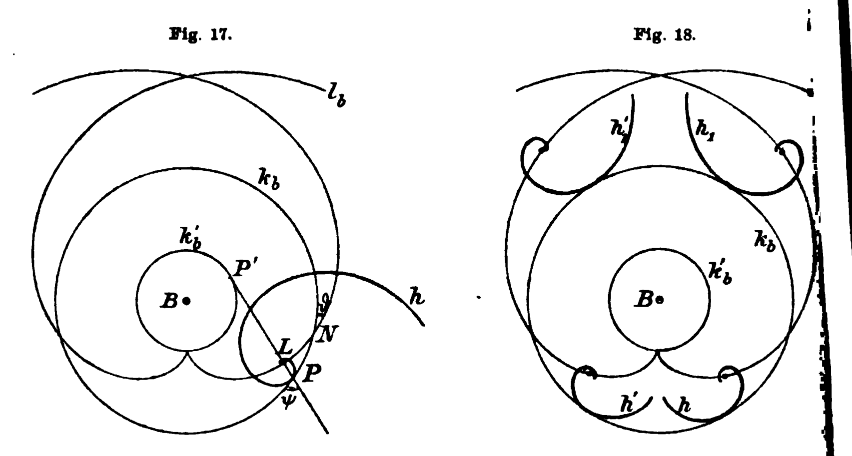
Ferner ist es interessant, am Modell zu beobachten, *wie die Spitze der Evolvente l_b zustande kommt.* In der auf der Tafel II dargestellten Lage des Modelles 11 schneidet die logarithmische Spirale h den Polkreis k_b noch in dem Punkte Q. Dieser Punkt rückt bei einer solchen Abrollung von h auf k_b, bei der k_b sich entgegen dem Sinne des Uhrzeigers dreht, näher und näher an den momentanen Pol P heran, bis er in dem Augenblick mit P selbst zusammenfällt, wo der Asymptotenpunkt L die Spitze von l_b beschreibt. Der Beweis beruht auf dem Hilfssatze:

Der Krümmungsmittelpunkt für einen beliebigen Punkt P einer logarithmischen Spirale ist der Schnittpunkt der Normalen mit dem Lote im Asymptotenpunkt L auf dem Radiusvektor PL.

Wir können daher das Resultat wie folgt aussprechen:

(21) *Bei der Abrollung der logarithmischen Spirale h auf dem kreise k_b wird in dem Augenblicke vom Asymptotenpunkte L die S der Evolvente l_b beschrieben, wenn der Polkreis der Krümmungskreis logarithmischen Spirale in ihrem Berührungspunkte ist.*

Was nun den spitzen Winkel ϑ betrifft, unter dem die Evolvente den Polkreis k_b im Punkte N schneidet, so sei in Figur 17 die loga

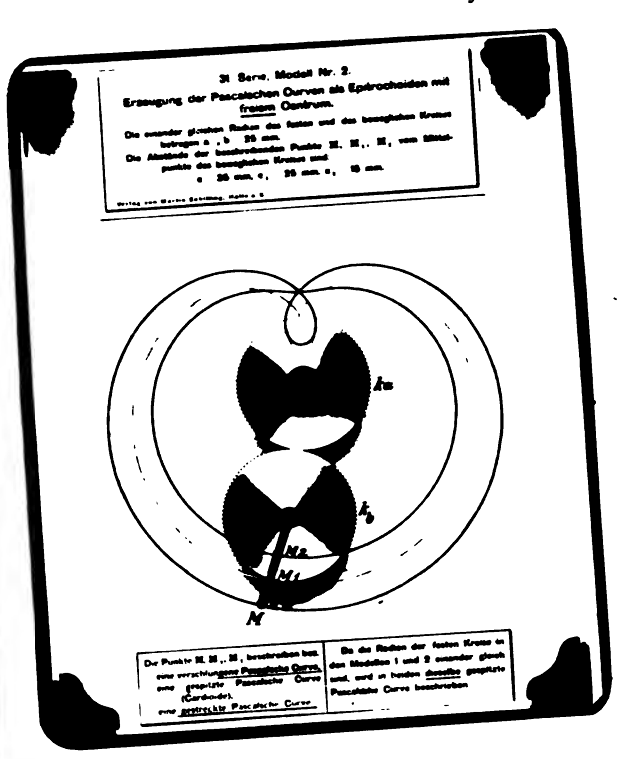


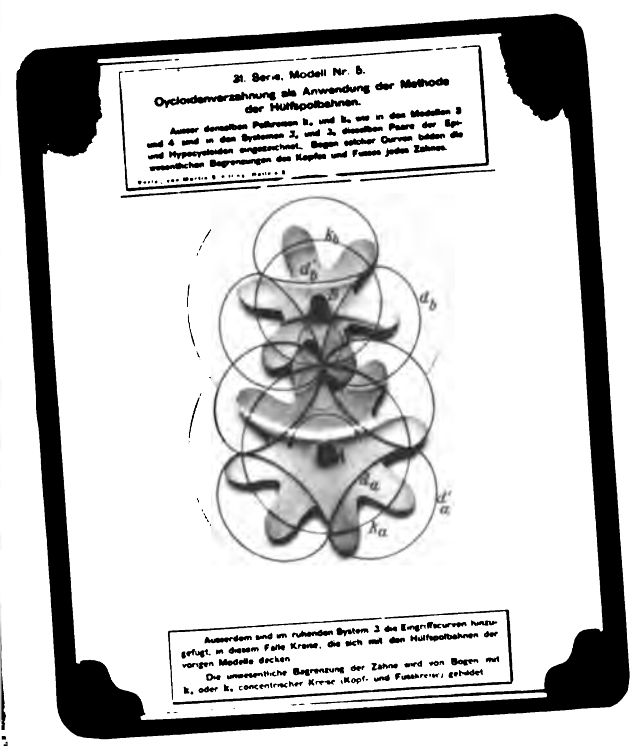
mische Spirale h in einem solchen Momente gezeichnet, wo ihr no übriger Bogen $\widehat{PL}$ bis zum Asymptotenpunkt L sehr klein ist, sod man sowohl den Bogen LN wie PN von l_b und k_b als geradlinig b trachten kann. Da nun nach obiger Formel $S = \frac{r}{\cos\psi}$ der Boge $\widehat{PL} = PN = \frac{PL}{\cos\psi}$ ist, so folgt:

$$\sphericalangle PLN = 90^0, \quad \text{d. h.}$$

(22) *Der Winkel ϑ, unter dem die Profilkurve l_b den Polkreis k_b schneidet, ist das Komplement zu dem Steigungswinkel ψ der Spirale.*

Das gleiche Resultat folgt auch unmittelbar sowohl aus der geometrischen Eigenschaft, daß die Normale von l_b in N ebenfalls den Winkel ψ mit k_b bildet als aus dem allgemeinen Satze (13) S. 16, da $f'(0) = \pm \frac{1}{\sin\vartheta} = -\frac{b}{b'} = -\frac{1}{\cos\psi}$ ist. (Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch auf die beiden Grenzfälle hinweisen, daß $\psi = 0^0$ oder 90^0 ist, d. h. nach der Formel $\cos\psi = \frac{b'}{b}$ der Hilfspolkreis k_b' mit dem Polkreis k_b zusammenfällt oder sich auf den Mittelpunkt von k_b zusammenzieht und die logarithmische Spirale in eine Gerade bezw. einen Kreis





übergeht. In letzterem Falle wird aus der Evolvente l_b ein zu k_b konzentrischer Kreis.)

Was schließlich im allgemeinen Falle die Gesamtheit *aller* möglichen Hilfspolbahnen h_i zur Erzeugung der einzelnen Bogen der Profilkurve l_b betrifft, so erkennt man jetzt leicht:

(23) *Es lassen sich insgesamt vier verschiedene logarithmische Spiralen konstruieren (Fig. 18), von denen mit ihren Asymptotenpunkten zwei, h_1 und h'_1, je einen der beiden außerhalb k_b gelegenen Bogen der Evolvente l_b, die anderen zwei, h, h' je den allemal übrig bleibenden, die Spitze enthaltenden Bogen der Evolvente beschreiben.*

Beitrag zur Kinetik ebener Getriebe.

Von OTTO MOHR in Dresden.

19. *Das Gesetz der Bewegung eines Getriebes.* Die folgende Mitteilung bildet eine Fortsetzung der Abhandlung über die Geometrie der Bewegung ebener Getriebe im 49sten Bande dieser Zeitschrift. Im Abschnitt **10** dieser Abhandlung wurde angegeben, wie die Beschleunigungen aller Teile eines Getriebes auf geometrischem Wege bestimmt werden, wenn für den betreffenden Zeitpunkt bekannt sind: der Lageplan, der Geschwindigkeitsplan und außerdem die Drehbeschleunigung *eines* Gliedes, das als das *geführte* Glied des Getriebes bezeichnet wurde. Die zuletzt genannte Größe ist in der Regel nicht gegeben, sondern sie ist aus den auf das Getriebe einwirkenden Kräften K zu bestimmen. Das Prinzip d'Alemberts, das in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu diesem Zwecke benutzt werden kann, spricht aus, daß die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K eben so groß ist wie die gleichzeitige Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte

$$V = mv',$$

die den Massenpunkten m des Getriebes ihre Beschleunigungen v' erteilen. Unter Arbeitsgeschwindigkeit einer Kraft K versteht man das Produkt aus der Größe der Kraft und ihrer Schubgeschwindigkeit, d. h. der Projektion $v \cos(v, K)$ der Geschwindigkeit v irgend eines Punktes der Kraftgeraden auf die Kraftrichtung. Das Vorzeichen der Arbeitsgeschwindigkeit wird durch den Kosinus des Winkels (v, K) bestimmt. Jenem Prinzip zufolge ist also für jeden Zeitpunkt:

$$\sum Kv \cos(v, K) = \sum Vv \cos(v, V), \tag{63}$$

wenn diese Summen auf alle Kräfte K, V ausgedehnt werden, die bei der Bewegung des Getriebes Arbeit verrichten. Die Gleichung (63) enthält das Bewegungsgesetz eines jeden Getriebes.

20. *Die Zerlegung der Bewegung des Getriebes.* Um vermittels der Gleichung (63) die unbekannte Drehbeschleunigung des geführten Gliedes 1 berechnen zu können, wird es nötig, die hier betrachtete und mit I zu bezeichnende Bewegung des Getriebes nach den Regeln des Abschnittes 10 zu zerlegen in eine bekannte Bewegung II und eine unbekannte Bewegung III. Die Bewegung I wird bestimmt durch die gegebene Drehgeschwindigkeit ω_{11} des geführten Gliedes 1 und durch seine unbekannte Drehbeschleunigung ω'_{11}. Diese Größen haben in den Bewegungen II und III die Werte:

$$\omega_{12} = \omega_{11}, \qquad \omega'_{12} = 0$$

und

$$\omega_{13} = 0, \qquad \omega'_{13} = \omega'_{11}.$$

Die beiden Bewegungen I und II haben sonach denselben Geschwindigkeitsplan, der ebenso wie der Beschleunigungsplan der Bewegung II nach Abschnitt 10 und 11 gebildet werden kann.

Für jeden Punkt des Getriebes ist die Beschleunigung v'_1 der Bewegung I die Resultante aus den Beschleunigungen v'_2 und v'_3 der beiden Bewegungen II und III. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte V ist also gleich der algebraischen Summe der Arbeitsgeschwindigkeiten der Kräfte mv'_2 und mv'_3. Bezeichnet man mit v_1 die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte in der Bewegung I, so nimmt Gleichung (63) hiernach die Form an:

$$(64) \qquad \sum m v'_3 v_1 \cos(v_1, v'_3) = \sum K v_1 \cos(v_1, K) - \sum m v'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2).$$

21. *Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3.* Die Bewegung III ist eine *Anfangsbewegung*, d. h. ihre Geschwindigkeiten sind gleich Null. Ihr Beschleunigungsplan ist daher geometrisch ähnlich dem Geschwindigkeitsplan der Bewegungen I, II. Für jeden Punkt des Getriebes hat die Beschleunigung v'_3 die Größe

$$v'_3 = \frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}} v_1;$$

sie ist der Richtung und dem Sinne nach der Geschwindigkeit v_1 gleich oder entgegengesetzt, je nachdem die Größen ω_{11} und ω'_{11} gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen tragen. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3 hat folglich den algebraischen Wert:

$$(65) \qquad \sum m v'_3 v_1 \cos(v_1, v'_3) = \frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}} \cdot \sum m v_1^2.$$

Die Summe $\sum m v_1^2$ bezeichnet den doppelten Betrag der im ganzen Getriebe enthaltenen kinetischen Energie. Um ihn zu berechnen, bezeichnen wir für irgend ein Glied des Getriebes mit $\bar{m}$ die Gesamtmasse, ω_1 die Drehgeschwindigkeit, S den Schwerpunkt, P den Geschwindigkeitspol des Lageplans, i den Trägheitshalbmesser des Gliedes bezogen auf die normal zur Bildfläche gerichtete Schwerpunktsachse, M einen Punkt des Gliedes von der Masse m, z den Vektor PM und $\bar{z}$ den Schwerpunktsvektor PS. Da

$$v_1 = z\,\omega_1$$

ist, so hat die Summe für das Glied den Wert

$$\sum m v_1^2 = \omega_1^2 \sum m z^2 = \bar{m}\,\omega_1^2 (i^2 + \bar{z}^2) = \bar{m}\,\omega^2 k^2,$$

wenn k die Hypotenuse des durch die Katheten i und $\bar{z}$ bestimmten rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet (Fig. 67). Dieser positive Wert ist für jedes Glied des Getriebes zu bestimmen, und darauf ist die Summe für alle Glieder zu bilden:

L. Fig. 67.

$$(66) \qquad \sum m v_2' v_1 \cos(v_1, v_2') = \frac{\omega_{11}'}{\omega_{11}} \sum \bar{m}\,\omega_1^2 k^2.$$

22. *Die Zusammensetzung der Kräfte $m v_2'$.* Um die Kräfte $m v_2'$ für ein Glied des Getriebes zusammenzusetzen, bezeichnen wir mit ω_2' seine Drehbeschleunigung. Die Koordinaten x, y eines Punktes M (Fig. 68) werden auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt mit dem Schwerpunkt S des Gliedes und dessen x-Achse auch dem Sinne nach mit der Strecke

L. Fig. 68.

$$SQ = q$$

zusammenfällt, die den Schwerpunkt S mit dem Beschleunigungspol Q des Gliedes verbindet. Wir erinnern daran, daß der Punkt Q vermittels des Beschleunigungsplanes durch die Bedingung

$$QSM \approx Q''S''M''$$

bestimmt wird. Die y-Achse hat den durch die Gleichung

$$(y, x) = 90^0$$

bestimmten Sinn, und der Vektor QM wird mit z bezeichnet. Die Kraft $m v_2'$ des Punktes M setzt sich nach Abschnitt 7 aus zwei Kom-

ponenten von den Größen $\sum m\omega_1^2$ und $\sum m\omega_2'$ zusammen. Die erstgenannte Kraft hat Richtung und Sinn der Strecke MQ, während die zweite in der Richtung und dem Sinne der Geraden MN wirkt, die mit MQ den Winkel (MN, MQ) gleich 90^0 oder gleich 270^0 Grad einschließt, je nachdem ω_2' positiv oder negativ ist. Die Komponenten mv_x' und mv_y' der Kraft mv_2' in den Richtungen der Koordinatenachsen haben daher die algebraischen Werte;

$$(67) \qquad \begin{cases} mv_x' = m\omega_1^2(q-x) + m\omega_2' y, \\ mv_y' = -m\omega_1^2 y \qquad + m\omega_2'(q-x). \end{cases}$$

Zur Vereinfachung der Betrachtung machen wir hier die in der Regel erfüllte Voraussetzung, daß die Bildebene eine Symmetrieebene des Gliedes ist. Die für je zwei symmetrisch belegene Massenpunkte zusammengesetzten Kräfte mv_2' liegen also alle in der Bildebene. Nach einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes sind die Summen $\sum mx$ und $\sum my$ gleich Null; folglich haben die Komponenten V_x, V_y der Resultanten V_2 die Werte:

$$(68) \qquad \begin{cases} V_x = \sum mv_x' = \overline{m}\omega_1^2 q, \\ V_y = \sum mv_y' = \overline{m}\omega_2' q. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sprechen aus, daß die Resultante V_2 Richtung und Sinn der Schwerpunktsbeschleunigung v_2' und die Größe

$$V_2 = \overline{m} v_2'$$

hat. Die *Lage* dieser Kraft bestimmt man durch die Abszisse

$$SA = x_2$$

ihres Schnittpunktes A mit der x-Achse, und zwar vermittels der Momentengleichung in bezug auf den Schwerpunkt:

$$-x_2 V_y = -x_2 \overline{m}\omega_2' q = \sum y m v_x' - \sum x m v_y' = \omega_2' \sum m(x^2+y^2) = \overline{m}\omega_2' i^2$$

oder

$$(69) \qquad x_2 = -\frac{i^2}{q}.$$

Man hat also, um den Punkt A auf geometrischem Wege zu bestimmen, normal zu QS die Strecke

$$SJ = i$$

aufzutragen und JA normal zu QJ zu ziehen.

23. *Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K und mv_2'.* In die Summe $\sum K v_1 \cos(v_1, K)$ sind alle äußeren und inneren Kräfte K einzuführen,

die bei der Bewegung des Getriebes Arbeit verrichten, für die also weder v_1 noch $\cos(v_1, K)$ gleich Null ist. Zu den arbeitenden Kräften gehören auch die Bewegungswiderstände, insbesondere die in den Zapfenlagern, Führungen und Gelenken entstehende Reibung. Eine *genaue* Bestimmung der Reibungsarbeit ist schon aus dem Grunde unmöglich, weil das Gesetz der Reibung, d. h. ihre Abhängigkeit von den Gelenkkräften, den Geschwindigkeiten und von dem Zustande der reibenden Flächen nur sehr unvollkommen bekannt ist. Eine weitere Rechnungsschwierigkeit ergibt sich aus dem Umstande, daß die Gelenkkräfte von den Beschleunigungen abhängig sind, und daß es selbst in den einfachsten Fällen untunlich ist, die Reibungsarbeit als Funktion der unbekannten Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes darzustellen. Man ist aus diesem Grunde genötigt, jene Unbekannte zunächst unter Voraussetzung der *reibunglosen* Bewegung oder unter roher Schätzung der Reibungsarbeit zu bestimmen. Alsdann können erforderlichenfalls die Gelenkkräfte ermittelt und die Reibungswiderstände genauer berücksichtigt werden. Wir nehmen an, daß die übrigen arbeitenden Kräfte K gegeben sind; hierzu gehören die Gewichte der Glieder und die Kräfte, die von der Kraftmaschine und von der Arbeitsmaschine auf das Getriebe übertragen werden. Es empfiehlt sich, die auf der rechten Seite der Gleichung (64) stehenden Arbeitsgeschwindigkeiten der Kräfte K und mv'_2 zusammenzufassen. Da die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_2 das *negative* Vorzeichen trägt, so ist für jedes Glied die Resultante R der auf das Glied wirkenden Kräfte K und der *gewendeten* Kraft V_2 zu bilden und ihre Schubgeschwindigkeit $v_1 \cos(v_1, R)$ zu bestimmen. Die auf alle Glieder ausgedehnte Summierung ergibt dann:

$$\sum K v_1 \cos(v_1, K) - \sum m v'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2) = \sum R v_1 \cos(v_1, R). \tag{70}$$

Man kann diese Summe auf graphischem Wege bilden, indem man die Kräfte R in folgender Weise in den Geschwindigkeitsplan versetzt. Es sei $P'A'B'C'D'$ der Geschwindigkeitsplan des Getriebegliedes $ABCD$ (Fig. 69 und 70), ferner D irgend ein Punkt der auf das Glied wirkenden Resultanten R. Durch den Punkt D' lege man eine Kraft R' von der Größe

$$R' = R,$$

deren Richtung und Sinn durch die Bedingung

$$(R, R') = 90^0$$

bestimmt sind. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft R wird dann dargestellt durch die Größe

$$Rv_1 \cos(v_1, R) = R' \; P'D' \; \sin(P'D', R'),$$

d. h. durch das statische Moment der in den Geschwindigkeitsplan versetzten Kraft R' in bezug auf den Pol P', wenn der Hebelarm der Kraft mit dem Geschwindigkeitsmaßstabe gemessen wird. Verfährt man mit allen Kräften R in der angegebenen Weise und bestimmt darauf die Resultante $\overline{R}'$ der in den Geschwindigkeitsplan versetzten Kräfte R' sowie deren Hebelarm $\overline{v}_1$ in bezug auf den Pol P', so ergibt das Moment $\overline{R}'\overline{v}_1$ die Arbeitsgeschwindigkeit aller Kräfte K und mv_2':

$$\sum K v_1 \cos(v_1, K) - \sum m v_2' v_1 \cos(v_1, v_2') = \overline{R}'\overline{v}_1. \tag{71}$$

Es ist zu beachten, daß die Geschwindigkeit $\overline{v}_1$ eine *algebraische* Größe ist; sie trägt das *positive* Vorzeichen, wenn das Moment $\overline{R}'\overline{v}_1$ den positiven Sinn der Uhrzeigerdrehung hat.

24. *Die Drehbeschleunigung* ω_{11}' *des geführten Gliedes.* Die Gleichung (64) ergibt in Verbindung mit den beiden Gleichungen (65) und (71):

$$\omega_{11}' = \omega_{11} \frac{\overline{R}'\overline{v}_1}{\sum m v_1^2} = \frac{\overline{R}' \frac{\overline{v}_1}{\omega_{11}}}{\sum m \left(\frac{v_1}{\omega_{11}}\right)^2}. \tag{72}$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu veranschaulichen, versetzen wir jeden Massenpunkt M des Getriebes nach dem im Geschwindigkeitsplan ihm entsprechenden Punkt M' und bilden hierdurch den Körper G, den wir um eine normal zur Bildebene durch den Pol P' gelegte feste Drehachse schwingen lassen. Wir erinnern daran, daß der Maßstab des Geschwindigkeitsplanes

$$1 \text{ cm} = \mu \text{ cm sek}^{-1}$$

ist (Abschnitt 1). Werden die Abmessungen des Körpers G mit dem Längenmaßstabe

$$1 \text{ cm} = \left(\mu \frac{\text{sek}^{-1}}{\omega_{11}}\right) \text{cm}$$

gemessen, so bezeichnet in bezug auf die Drehachse P': die Größe $\left(\frac{\overline{v}_1}{\omega_{11}}\right)$ den Hebelarm der Kraft $\overline{R}'$, also $\overline{R}' \frac{\overline{v}_1}{\omega_{11}}$ das statische Moment der Kraft $\overline{R}'$, und $\sum m \left(\frac{v_1}{\omega_{11}}\right)^2$ das Trägheitsmoment des Körpers G. Die Gleichung (72) spricht demnach aus, daß die Drehbeschleunigung ω_{11}'

des geführten Gliedes ebenso groß ist wie die Drehbeschleunigung des Körpers G unter Einwirkung der Kraft $\overline{R}'$.

25. *Die Gelenkkräfte bei reibungsloser Bewegung des Getriebes.* Nachdem die Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes durch Gleichung (72) bestimmt worden ist, kann der Beschleunigungsplan der Bewegung I gebildet werden. Man kann darauf für jedes Glied die gegebenen Kräfte K mit den *gewendeten* Kräften $m v'_1$ zu ihren Resultanten S zusammensetzen. Die graphische Bestimmung der Gelenkkräfte soll an einem Beispiel erläutert werden. Das in Fig. 71 dargestellte Getriebe besteht aus dem ruhenden Gliede O und den fünf bewegten Gliedern 1 bis 5. Das Getriebe ist in dem Gelenke B fest, in dem Gelenke A horizontal verschiebbar gelagert. S_1 bis S_5 sind die oben bezeichneten, auf die bewegten Glieder einwirkenden Kräfte S. Diese Kräfte sind nicht voneinander unabhängig: sie erfüllen die durch Gleichung (63) ausgedrückte Bedingung, nach der das *ruhende* Getriebe unter Einwirkung der Kräfte S_1 bis S_5 und der beiden Auflagerkräfte S_a, S_b sich *nicht* in Bewegung setzen würde. Das Getriebe bildet in diesem Zustande ein statisch bestimmtes Fachwerk, in dem *ein* Stab fehlt; der fehlende Stab könnte erforderlichenfalls mit der Spannung Null zwischen zwei beliebige Knoten, z. B. E und G, eingefügt werden. Die aus den fünf Lasten S_1 bis S_5 hervorgerufenen Auf-

L. Fig. 71.

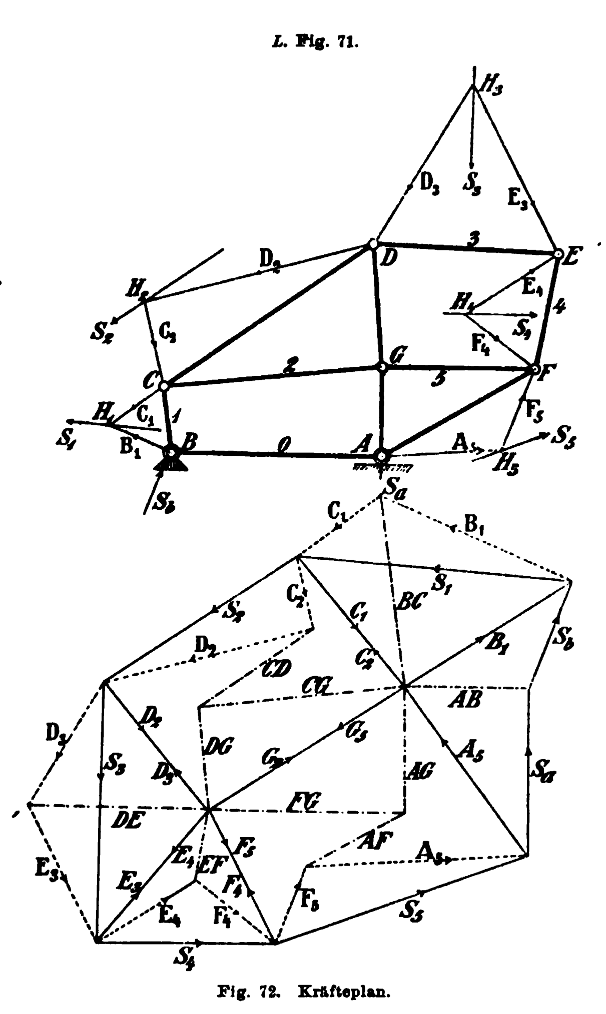


Fig. 72. Kräfteplan.

lagerkräfte S_a, S_b werden bestimmt wie bei der Berechnung eines einfachen Fachwerkes. Daß die sieben Kräfte S eine Gleichgewichtsgruppe bilden, soll durch den Ausdruck

$$O \equiv S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_a + S_b$$

dargestellt werden. In dem Kräfteplan (Fig. 72) kommt diese Tatsache dadurch zum Ausdruck, daß die sieben Kräfte S ein geschlossenes Polygon bilden. Wir ersetzen nun jede der Belastungen S_1 bis S_5 durch zwei Knotenlasten, was durch die Ausdrücke

$$(73)\qquad \begin{cases} S_1 \equiv \mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1, \\ S_2 \equiv \mathrm{C}_2 + \mathrm{D}_2, \\ S_3 \equiv \mathrm{D}_3 + \mathrm{E}_3, \\ S_4 \equiv \mathrm{E}_4 + \mathrm{F}_4, \\ S_5 \equiv \mathrm{F}_5 + \mathrm{A}_5 \end{cases}$$

dargestellt wird. Wir zerlegen also die Kräfte S an den *willkürlich gewählten* Punkten $H_1 H_2 \ldots H_5$ in die angegebenen Komponenten, die auf die Gelenke der betreffenden Glieder wirken. Die Zerlegung ist im Kräfteplan dargestellt. Hierdurch werden wohl die *inneren* Kräfte der Getriebeglieder, nicht aber die *Gleichgewichtsbedingungen* geändert: denn z. B. die beiden Knotenlasten C_2 und D_2 haben dieselbe Arbeitsgeschwindigkeit wie die resultierende Last S_2.

Wir bezeichnen ferner z. B. mit G_2 die Kraft, die vom Gelenk G auf das Glied 2 übertragen wird, und haben zu beachten, daß jedes Glied im Gleichgewicht sich befindet unter Einwirkung der Kraft S und der von ihm aufzunehmenden Gelenkkräfte. Die hieraus sich ergebenden fünf Gleichgewichtsgruppen:

$$(74)\qquad \begin{cases} O \equiv S_1 + C_1 + B_1 \equiv \mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1 + C_1 + B_1, \\ O \equiv S_2 + D_2 + G_2 + C_2 \equiv \mathrm{C}_2 + \mathrm{D}_2 + D_2 + G_2 + C_2, \\ O \equiv S_3 + E_3 + D_3 \equiv \mathrm{D}_3 + \mathrm{E}_3 + E_3 + D_3, \\ O \equiv S_4 + F_4 + E_4 \equiv \mathrm{E}_4 + \mathrm{F}_4 + F_4 + E_4. \\ O \equiv S_5 + A_5 + G_5 + F_5 \equiv \mathrm{F}_5 + \mathrm{A}_5 + A_5 + G_5 + F_5 \end{cases}$$

können im Kräfteplan noch nicht dargestellt werden, weil die *Richtungen* der Gelenkkräfte unbekannt sind. Dagegen können nach den Regeln der graphischen Statik die *Stabkräfte* bestimmt werden, die unter Einwirkung der gegebenen Knotenlasten sich bilden. Wir bezeichnen z. B. mit C_d und D_c die Kräfte, die vom gewichtlosen Stabe CD auf die Gelenke C und D übertragen werden. Beide Kräfte unterscheiden sich von einander nur durch ihren Sinn und tragen im Kräfte-

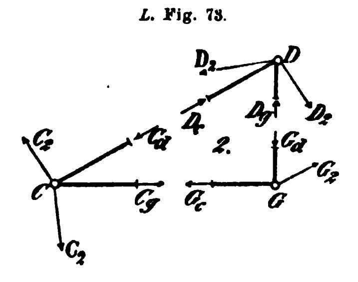
plan die gemeinschaftliche Bezeichnung CD. Die Kräftepolygone der sieben Knoten können in der hierunter angegebenen Reihenfolge gebildet werden:

$$(75)\quad \begin{cases} O \equiv S_b + \mathrm{B}_1 + B_c + B_a, \\ O \equiv \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + C_d + C_g + C_b, \\ O \equiv \mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_3 + D_e + D_g + D_c, \\ O \equiv \mathrm{E}_3 + \mathrm{E}_4 + E_f + E_d, \\ O \equiv \mathrm{F}_4 + \mathrm{F}_5 + F_a + F_g + F_e, \\ O \equiv G_c + G_d + G_f + G_a, \\ O \equiv \mathrm{A}_5 + S_a + A_b \pm A_g + A_f. \end{cases}$$

Nachdem die Stabkräfte bestimmt worden sind, ergeben sich die Gelenkkräfte, indem man für jeden Knoten eines jeden Gliedes das Kräftepolygon bildet:

$$(76)\quad \begin{cases} O \equiv A_g + A_f + \mathrm{A}_5 + A_5, \\ O \equiv \mathrm{B}_1 + B_c + B_1, \\ O \equiv C_b + \mathrm{C}_1 + C_1 \equiv \mathrm{C}_2 + C_d + C_g + C_2, \\ O \equiv D_g + D_c + \mathrm{D}_2 + D_2 \equiv \mathrm{D}_3 + D_e + D_3, \\ O \equiv E_d + \mathrm{E}_3 + E_3 \equiv \mathrm{E}_4 + E_f + E_4, \\ O \equiv F_e + \mathrm{F}_4 + F_4 \equiv \mathrm{F}_5 + F_a + F_g + F_5, \\ O \equiv G_c + G_d + G_2 \equiv G_f + G_a + G_5. \end{cases}$$

Beispielsweise befindet sich das Glied 2 (Fig. 73) im Gleichgewicht unter Einwirkung der beiden Knotenlasten C_2, D_2 und der drei Gelenkkräfte C_2, D_2, G_2. Indem aus jedem der drei Stäbe CD, DG, GC ein Stück herausgeschnitten und durch die Stabkräfte ersetzt wird, entstehen drei Gleichgewichtsgruppen, bestehend aus den Kräften



L. Fig. 73.

$$\begin{array}{llll} \mathrm{C}_2, & C_d, & C_g, & C_2, \\ D_g, & D_c, & \mathrm{D}_2, & D_2, \\ G_c, & G_d, & G_2, & \end{array}$$

deren Polygone im Kräfteplan dargestellt werden.

26. *Die Reibungsarbeit und ihr Einfluß auf die Beschleunigungen des Getriebes.* In der Gleichung (72)

$$\omega_{11}' = \omega_{11} - \frac{\overline{R}' \overline{v}_1}{\sum m v_1^2}$$

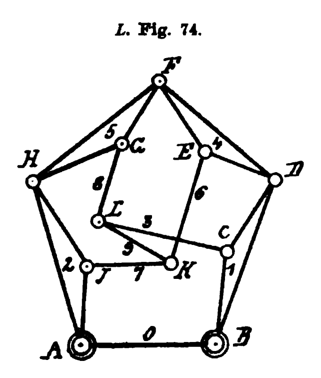
wurden in der Arbeitsgeschwindigkeit $\bar{R}'\bar{v}_1$ die Reibungswiderstände vernachlässigt. Jeder Bewegungswiderstand vermindert die kinetische Energie des Getriebes, er vermindert also den *numerischen* Wert der Drehgeschwindigkeit ω_{11}. Bezeichnet $\sum A$ die Summe der *positiven* Werte aller Arbeitsgeschwindigkeiten der Widerstände, so ist der *berichtigte* Wert (ω'_{11}) der Drehbeschleunigung des geführten Gliedes

$$(\omega'_{11}) = \omega_{11} \frac{\bar{R}'\bar{v}'_1 \pm \sum A}{\sum m v_1^2}, \tag{77}$$

wenn das Vorzeichen von $\sum A$ dem Vorzeichen von ω_{11} *entgegengesetzt* gewählt wird.

Die positiven Einzelbeträge, aus denen sich die Summe $\sum A$ zusammensetzt, können berechnet werden, wenn, was freilich in der Regel nicht der Fall ist, die Reibungskoeffizienten f bekannt sind.

L. Fig. 74.



Ein *einfaches* Gelenk, z. B. das Gelenk F in Fig. 74, verbindet *zwei* Glieder 4 und 5 miteinander. Die beiden Gelenkkräfte sind von derselben positiven Größe

$$F_4 = F_5.$$

Sie erzeugen an der Oberfläche des Gelenkzapfens vom Durchmesser d einen Reibungswiderstand von der Größe fF_4. Ist die Drehgeschwindigkeit ω_4 des Gliedes 4 algebraisch größer als ω_5, so ist $\frac{1}{2}d(\omega_4 - \omega_5)$ der *positive* Wert der relativen Geschwindigkeit der beiden reibenden Flächen gegen einander. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Reibung hat demnach für das einfache Gelenk F den positiven Wert

$$A = \tfrac{1}{2} f F_4 d(\omega_4 - \omega_5). \tag{78}$$

Ein *Doppelgelenk*, z. B. das Gelenk K (Fig. 74), verbindet *drei* Glieder 6, 7, 9 miteinander. Der Gelenkzapfen ist mit *einem* Gliede starr verbunden, und für die Größe der Reibungsarbeit ist es *nicht* gleichgültig, welches Glied den Zapfen trägt; wir nehmen beispielsweise an, daß das Glied 7 den Zapfen trägt, und daß algebraisch

$$\omega_6 > \omega_9 > \omega_7$$

ist. Das Doppelgelenk K besteht also aus den zwei einfachen Gelenken zwischen den Gliedern 6, 7 und 7, 9, und die Arbeitsgeschwindigkeit der Reibung hat zufolge Gleichung (78) den positiven Wert

$$A = \tfrac{1}{2} f d \{ K_6(\omega_6 - \omega_7) + K_9(\omega_9 - \omega_7) \}. \tag{79}$$

Gelenke mit mehr als drei Gliedern kommen in den gebräuchlichen Getrieben nicht vor und brauchen daher hier nicht berücksichtigt zu werden.

27. *Beziehungen zwischen der Anzahl der Glieder eines Getriebes, der Anzahl der Gelenke und der Stäbe.* Wir bezeichnen mit e die Anzahl der einfachen Gelenke des Getriebes, mit d die Anzahl der Doppelgelenke, mit s die Anzahl der Stäbe, mit g die Anzahl der Glieder und nehmen an, daß etwaige Schieberverbindungen nach Abschnitt 5 durch Gelenkverbindungen ersetzt worden sind.

Um $(e+d)$ Gelenke *starr* miteinander zu verbinden, sind $2(e+d)-3$ Stäbe erforderlich. Wenn *ein* Stab einer solchen starren Verbindung beseitigt und ein zweiter festgehalten wird, so entsteht ein Getriebe. Daher ist

$$s = 2(e+d) - 4 = 2(e+d-2). \tag{80}$$

Die Anzahl der Stäbe ist also stets *gerade*. In der Anzahl s sind, wie aus den vorstehenden Angaben hervorgeht, auch die Stäbe enthalten, die zur starren Verbindung der *ruhenden* Gelenke erforderlich sind.

Jedes der e einfachen Gelenke nimmt *zwei* und jedes der d Doppelgelenke *drei* Gelenkkräfte auf, und da jede Gelenkkraft *zwei* Unbekannte enthält, z. B. ihre Projektionen auf zwei feste Achsen, so enthalten die Gelenkkräfte $2(2e+3d)$ unbekannte Größen. Außerdem sind *drei* unbekannte Auflagerkräfte zu bestimmen; in dem Getriebe Fig. 71 z. B. die vertikale Lagerkraft S_a und die beiden Komponenten von S_b. Die Gesamtzahl der Unbekannten ist sonach $4e+6d+3$. Die Berechnung dieser Größen ist, wie aus Abschnitt 25 hervorgeht, eine *bestimmte* Aufgabe. Die unbekannten Kräfte haben nun folgende Bedingungen zu erfüllen:

1) Ein jedes Glied befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der Kraft S und der vom Gliede aufzunehmenden Gelenkkräfte. Diese Bedingung ergibt für jedes Glied drei, für g Glieder also $3g$ Gleichungen.

2) Jedes Gelenk befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der von ihm aufzunehmenden Gelenk- und Lagerkräfte. Da diese Bedingung durch *zwei* Gleichungen ausgedrückt wird, so ergeben sich $2(e+d)$ Gleichungen. Endlich ist zu beachten, daß die Kräfte S durch Gleichung (63) von einander abhängig sind. Diese Gleichung muß sich ergeben, wenn die $(4e+6d+3)$ unbekannten Kräfte aus den $(3g+2e+2d)$ gegebenen Gleichungen eliminiert werden. Folglich ist:

$$(3g+2e+2d)-(4e+6d+3)=1$$

oder

$$g = 2\,\frac{e+2d+2}{3}. \tag{81}$$

Die Anzahl der Glieder mit Einschluß des ruhenden Gliedes ist demnach ebenfalls stets gerade, und die Zahl $e + 2d + 2$ ist teilbar durch drei. Aus den Gleichungen (80) und (81) folgt noch

$$4e + 6d = s + 3g. \tag{82}$$

Demnach ist $(4e - s)$ teilbar durch 6 und $(s + 3g - 6d)$ teilbar durch 4.

Beispiele. Für das in Fig. 71 dargestellte Getriebe ist:

$$e = 7, \quad d = 0, \quad s = 10, \quad g = 6$$

und den Bedingungen (80)—(82) gemäß

$$s = 2(e + d - 2) = 10 = 2(7 - 2),$$
$$g = 2\,\frac{e+2d+2}{3} = 6 = 2\,\frac{7+2}{3},$$
$$4e + 6d = s + 3g = 4 \cdot 7 = 10 + 3 \cdot 6.$$

Ferner ist für das Getriebe Fig. 74:

$$e = 9, \quad d = 2, \quad s = 18, \quad g = 10$$

und übereinstimmend mit den Gleichungen (80)—(82):

$$s = 2(e + d - 2) = 18 = 2(9 + 2 - 2),$$
$$g = 2\,\frac{e+2d+2}{3} = 10 = 2\,\frac{9+4+2}{3}.$$
$$4e + 6d = s + 3g = 4 \cdot 9 + 6 \cdot 2 = 18 + 3 \cdot 10.$$

28. *Die inneren Kräfte eines Getriebegliedes.* Um die Kräfte zu bestimmen, welche die Festigkeit eines Getriebegliedes in Anspruch nehmen, zerlegt man das Glied durch Schnitte, bei einem stabförmigen Körper z. B. durch Querschnitte, in eine Anzahl von Teilen 1, 2, 3,... Für jeden dieser Teile bestimmt man den Schwerpunkt, die Masse $m_1, m_2, m_3, \ldots$, die Schwerpunktsbeschleunigung $v_1', v_2', v_3', \ldots$ und die Resultante der äußeren Kräfte $K_1, K_2, K_3, \ldots$ Die Teile sind so klein zu wählen, daß die Kräfte mv' mit genügender Genauigkeit durch die Kräfte $m_1 v_1', m_2 v_2', \ldots$ ersetzt werden können. Jeder Teil, z. B. der Teil 2, befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der Kraft K_2, der *gewendeten* Kraft $m_2 v_2'$ und der inneren Kräfte, die von den benachbarten Teilen 1 und 3 durch die trennenden Schnitte auf den Teil 2 übertragen werden. Die Festigkeit des Gliedes wird demnach

ebenso in Anspruch genommen wie die eines ruhenden Körpers, auf den die *gewendeten* Kräfte $m_1 v_1'$, $m_2 v_2'$, ... und die äußeren Kräfte K mit Einschluß der Gelenkkräfte einwirken.

29. Literatur.

Radinger, Über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit. Wien 1870, dritte Auflage 1892.

Pröll, Versuch einer graphischen Dynamik, Leipzig 1874.

Heun, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1901. Diese Abhandlung enthält weitere Literaturangaben.

Verwandlung der Polygone in Dreiecke von gleichem Moment beliebigen Grades.

Ein neues Verfahren zur graphischen Bestimmung von Momenten, Schwerlinien, sowie des Rauminhalts von Drehungskörpern.

Von J. SCHNÖCKEL in Aachen.

In dieser Zeitschrift Band 49 (1903) Seite 372—381 hat der Verfasser nachgewiesen, daß sich krummlinig begrenzte, ebene Figuren mit Hilfe eines einfachen Apparats in Dreiecke von gleichem Moment verwandeln lassen. Der Gedanke, die Kurve durch eine ausgleichende Gerade zu ersetzen, sowie das praktisch zur Flächenberechnung vielfach angewendete Verfahren der Verwandlung von Polygonen in Dreiecke, ließ vermuten, daß letztere rein konstruktiv auch nach dem statischen Moment, dem Trägheitsmoment und nach Momenten beliebigen Grades ausgeglichen werden könnten.

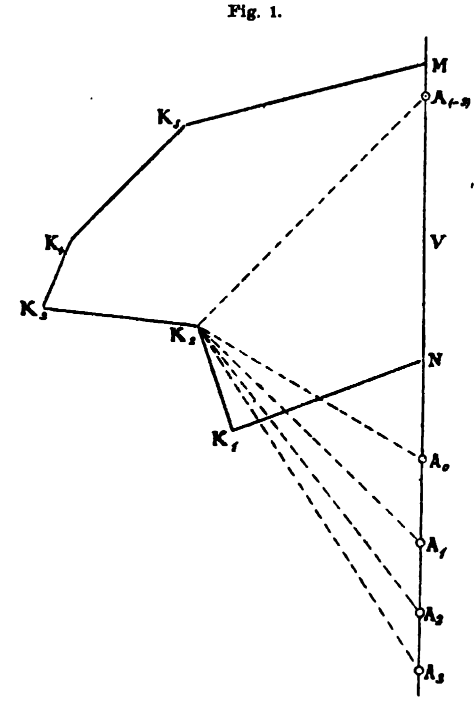
Die Lösung der Aufgabe erfordert eine Erweiterung des über die Verwandlung der Polygone nach Fläche bekannten Lehrsatzes, und für die Praxis bedarf es keines eigenen Apparates, sondern nur zweier Zeichendreiecke und einer Kopiernadel. Die Konstruktion der Schwerlinie und reduzierten Pendellänge eines Polygons gestaltet sich in dieser Weise viel einfacher als es mittelst graphostatischer und anderer Methoden möglich ist, und hat auch den Vorteil großer Sicherheit und Genauigkeit.

Dem Ausgleichungsprinzip liegt die Lösung folgender geometrischen Aufgabe zugrunde.

Ein Polygon in ein anderes von gleichem Moment beliebigen Grades zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Das Polygon $MNK_1K_2K_3K_4K_5$ (Fig. 1) soll in ein Sechseck von gleichem Moment n-ten Grades verwandelt werden. Die Momentengleichung möge lauten $\sum_n = \int xy^n dy$, wo y das Lot von einem beliebigen Punkte des Polygons auf MN als X-Achse (Leitlinie) bezeichnet.

Fig. 1.



Will man den Linienzug NK_1K_2 durch eine ausgleichende Gerade ersetzen, ohne das „Moment 0ten Grades“ $\sum_0 = \int x dy =$ Fläche des Polygons zu verändern, so zieht man nach einem bekannten Lehrsatz der Planimetrie $K_1A_0 \parallel K_2N$. Dann ist A_0K_2 die gesuchte Gerade.

Zur Ausgleichung nach dem statischen Moment $\sum_1 = \int xy dy$ macht man $K_1A_1 \parallel K_2A_0$ und erhält A_1K_2 als ausgleichende Gerade. Das Siebeneck $MNK_1K_2K_3K_4K_5$ ist in das ihm bezüglich des statischen Moments gleiche Sechseck $MA_1K_2K_3K_4K_5$ verwandelt worden.

Zieht man zur Ausgleichenden ersten Grades K_2A_1 die Parallele K_1A_2, so gleicht A_2K_2 den Linienzug NK_1K_2 nach dem Moment $\sum_2 = \int xy^2 dy$ (Trägheitsmoment) aus.

Allgemein wird das Polygon nach dem Moment $\sum_n$ in ein anderes verwandelt, das eine Seite weniger hat, indem man zur Ausgleichenden $(n-1)$-ten Grades $K_2A_{(n-1)}$ die Parallele K_nA_n zieht. Das gesuchte Polygon ist $MA_nK_2K_3K_4K_5$.

Für $n = -1$ und -2 versagt das Verfahren, wie später in der Theorie bewiesen wird; dagegen ist die Ausgleichung nach dem Moment $\sum_{(-3)} = \int \frac{x}{y^3} dy$ sehr einfach. Man zieht zu NK_1 die Parallele VK_2 und dann $A_{(-3)}K_2 \parallel VK_1$. Das momentengleiche Sechseck ist $MA_{(-3)}K_2K_3K_4K_5$.

Für $\sum_{(-n)}$ findet man den Punkt $A_{(-n)}$ allgemein, indem man $K_2 A_{(-n)} \parallel K_1 A_{(-n+1)}$ macht.

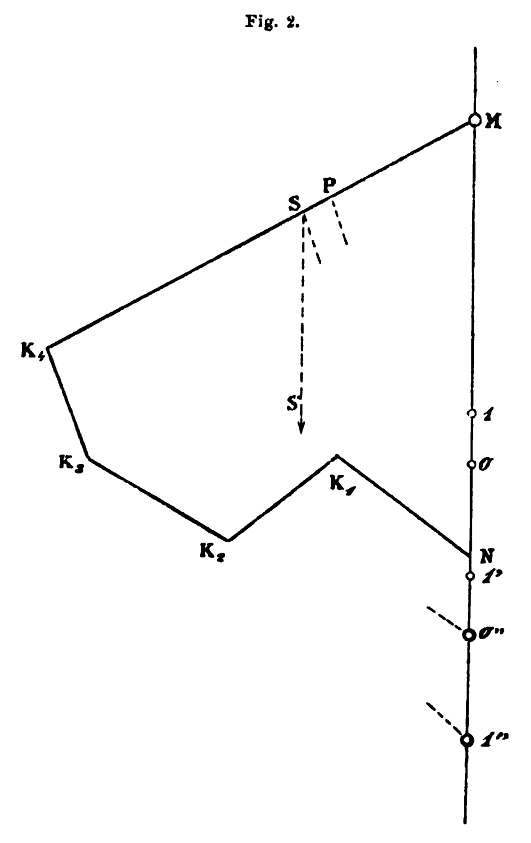
Sobald n ein Bruch ist, wird die Ausgleichung unmöglich und nur annähernd durch Interpolation zwischen A_n und A_{n+1} ausführbar.

Praktische Anwendung des Ausgleichungsprinzips.

Durch mehrfache Anwendung obiger Konstruktion kann man m-Ecke in $(m-1)$-, $(m-2)$-Ecke und schließlich in Dreiecke verwandeln, ohne das Moment $\sum_n = \int xy^n dy$ zu verändern. Praktisch führt man die Verwandlung folgendermaßen aus.

Man gibt dem Polygon eine solche Lage, daß die zur Leitlinie gewählte Seite MN (Fig. 2) nach rechts fällt, legt ein Zeichendreieck am besten aus Celluloid mit der Kante bei N in der Richtung NK_2 an und verschiebt es an einem zweiten Dreieck parallell bis K_1. Der in der Figur 2 mit 0 bezeichnete Schnittpunkt der Parallelen mit MN wird jetzt durch Aufsetzen einer Kopiernadel vorübergehend festgehalten, aber nicht mit Bleistift usw. bezeichnet. Man dreht die Kante um 0 bis sie in die Richtung $\overline{0K_2}$ fällt, hebt die Nadel vom Papier und verschiebt am zweiten Dreieck wieder bis K_1. Der Schnittpunkt 1 der Kante wird mit der Nadel markiert, ohne weiter bezeichnet zu werden. Die Gerade (in der Figur nicht ausgezogen) $\overline{1K_3}$ ersetzt den Linienzug NK_1K_2 nach dem statischen Moment. Die Kante wird nun um die Nadel bei 1 bis K_3 gedreht, dann die Nadel entfernt und das Dreieck parallel bis K_2 geschoben. Nachdem die Kante wieder um den Schnittpunkt mit MN gedreht und das Dreieck bis K_2 verschoben ist, erhält

Fig. 2.

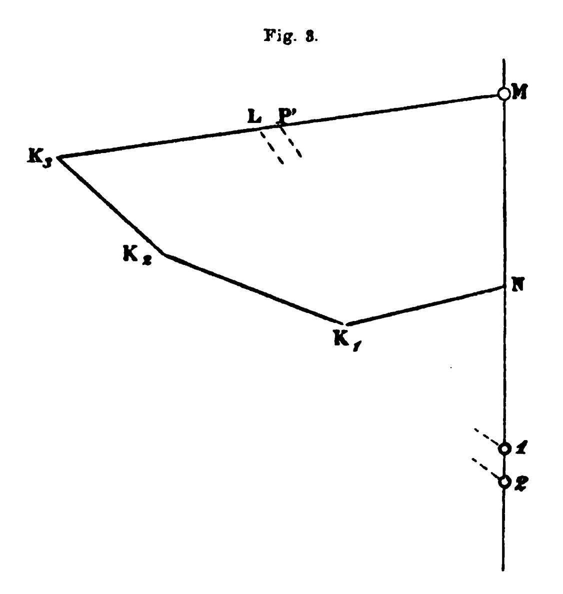


man die Gerade $\overline{1'K_3}$, welche nun den Linienzug $NK_1K_2K_3$ nach dem statischen Moment ausgleicht. Danach ergibt sich $\overline{1''K_4}$ als ausgleichende Gerade des ganzen Linienzuges.

In entsprechender Weise ist der Punkt 0″ gefunden worden, dessen Verbindungslinie mit K_4 den Linienzug $NK_1K_2K_3K_4$ nach Fläche ausgleicht. Bei Verwendung einer Kopiernadel ist jede dauernde Bezeichnung vou Zwischenpunkten, wie 0, 1, 2 usw., *unnötig* und stört nur die Übersichtlichkeit. Beachtet man, daß zur Ausgleichung nach dem statischen Moment für jede Polygonecke zwei parallele Verschiebungen des Dreiecks und zwei Drehungen um die Nadel erforderlich werden, so sind Irrtümer ausgeschlossen. Die Resultate, welche durch Verwandeln der Polygone in Dreiecke gleicher Fläche praktisch gefunden wurden, zeichnen sich durch große Genauigkeit aus, und dasselbe kann man auch von dem hier verallgemeinerten Verfahren behaupten.

Macht man $MP = \frac{1}{3} MK_4$ (Fig. 2), zieht dann $\overline{1''S} \parallel \overline{0''P}$ und endlich zu MN die Parallele SS', so ist dies eine *Schwerlinie* des Polygons $MNK_1K_2K_3K_4$. Diese Konstruktion ist wesentlich einfacher als sie die graphische Statik mit Hilfe des Kräftezuges lehrt und dürfte daher allen bekannten Methoden zur Auffindung des Schwerpunktes einer ebenen Figur vorzuziehen sein.

Fig. 3.



Bezeichnet man das Lot vom Endpunkte der Ausgleichung K_4 auf MN mit y, so ist das Volumen des durch Rotation des Linienzuges $NK_1K_2K_3K_4M$ erzeugten *Drehungskörpers* $V = \frac{1}{3} y^2 \pi \cdot \overline{1''M}$.

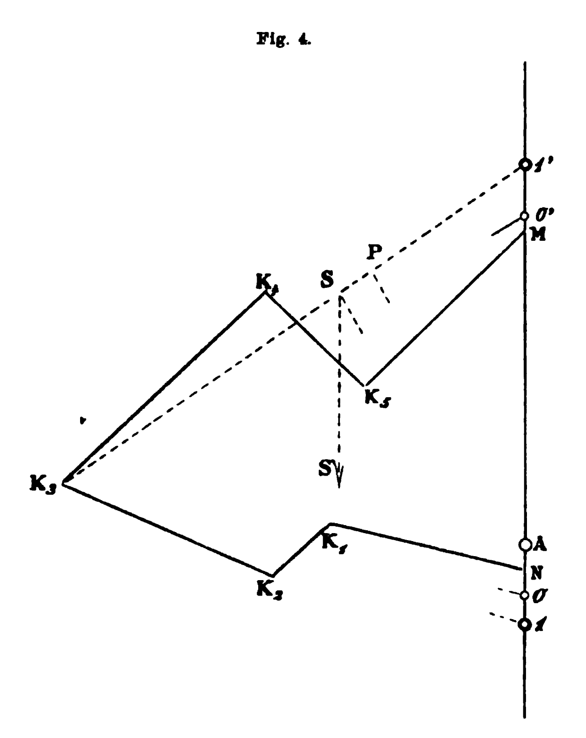
Je höher der Grad der Ausgleichung wird, um so größer ist auch die Anzahl der Einzeloperationen, aus denen das Resultat hervorgeht. Für eine Verwandlung n-ten Grades bedarf es zum Ausgleichen einer Polygonecke $n + 1$ paralleler Verschiebungen und Drehungen des Zeichendreiecks um die Kopiernadel. Das macht bei der Verwandlung eines m-Ecks nach dem Moment n-ten Grades $2(n + 1)(m - 3)$ Einzeloperationen.

In Rücksicht auf die im ersten Abschnitt beschriebene Verwandlung eines m-Ecks in ein $(m-1)$-Eck gleichen Moments vom n-ten Grade erübrigt es sich, auf die praktische Ausgleichung nach dem Trägheitsmoment usw. mit Zeichendreieck und Kopiernadel einzugehen.

Die (in Fig. 3 nicht ausgezogenen) Geraden $\overline{1K_3}$ und $\overline{2K_3}$ gleichen das Fünfeck $MNK_1K_2K_3$ nach dem statischen und Trägheitsmoment aus. Macht man $MP' = \frac{1}{2}MK_3$ und zieht zu $\overline{1P'}$ die Parallele $\overline{2L}$, so ist das Lot von L auf die Leitlinie MN die *reduzierte Pendellänge* des Polygons.

In Fig. 4 gleichen die Geraden $\overline{0K_3}$ und $\overline{1K_3}$ den Linienzug $NK_1K_2K_3$, die Geraden $\overline{0'K_3}$ und $\overline{1'K_3}$ den Zug $MK_5K_4K_3$ nach Fläche und statischem Moment aus. Es empfiehlt sich immer, den von der Leitlinie am weitesten entfernten Punkt zum Endpunkt der Ausgleichungen zu wählen, da andernfalls die Dreiecksbasen auf MN sehr groß werden. Macht man wieder $\overline{1'P} = \frac{1}{3}\cdot\overline{1'K_3}$, setzt die Entfernung $\overline{00'}$ mit dem Zirkel von $1'$ aus bis A ab und zieht $\overline{1S} \parallel AP$, so ist die Parallele SS' zu MN Schwerlinie des Polygons $MNK_1K_2K_3K_4K_5$. Der Inhalt des Drehungskörpers ist $V = \frac{1}{3}y^2\pi\cdot\overline{11'}$.

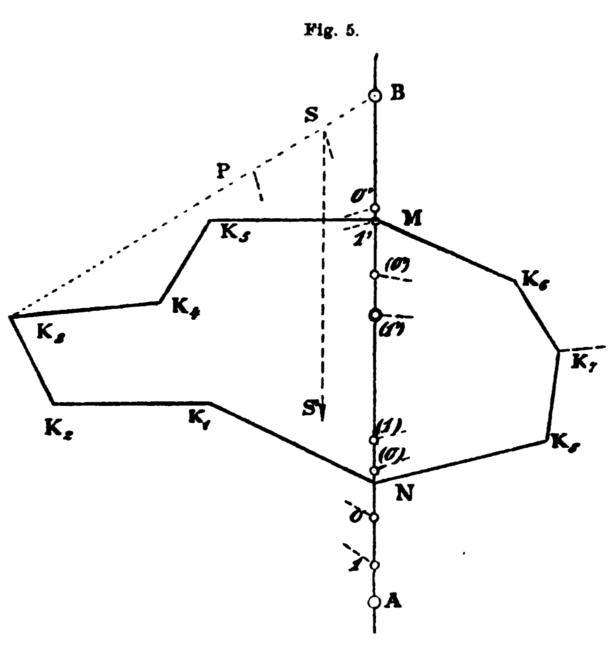
Fig. 4.



Etwas anders gestaltet sich die Konstruktion der Schwerlinie, wenn die Leitlinie das Polygon schneidet wie in Fig. 5. Die (nicht ausgezogenen) Geraden $\overline{0K_3}$, $\overline{0'K_3}$, $\overline{1K_3}$ und $\overline{1'K_3}$ gleichen das Polygon $NK_1K_2K_3K_4K_5M$ nach Fläche und statischem Moment aus. Um auch hier zu einer einfachen Konstruktion der Schwerlinie zu gelangen, bestimmt man einen Punkt V so, daß seine lotrechte Entfernung von MN dem Lot von K_3 auf letztere gleich ist. Die Geraden $\overline{(0)V}$ und $\overline{(1)V}$ gleichen den Zug NK_8K_7V, die Geraden $\overline{(0')V}$ und $\overline{(1')V}$ den Linienzug MK_6K_7V aus. Setzt man von (1) aus die Länge $\overline{11'}$ bis

B ab, so ist $\overline{(1')BK_3}$ das Dreieck, welches dem Zehneck $NK_1K_2 \ldots MK_6 \ldots K_8$ inbezug auf das statische Moment gleicht. Macht man nun

Fig. 5.



$$BA = \overline{00'} + \overline{(0)(0')},$$

so ist ABK_8 dem Polygon flächengleich. Die Parallele $\overline{(1')S}$ zu AP schneidet BK_8 im Punkte S der Schwerlinie. Der Einfachheit wegen legt man die Achse tunlichst so, daß sie die Figur nicht schneidet.

Ist y das Lot vom Endpunkte der Ausgleichung auf MN, so wird in Fig. 2 die Fläche des Sechsecks

$$\sum\nolimits_0 = \tfrac{1}{2}y \cdot \overline{0''M},$$

das statische Moment

$$\sum\nolimits_1 = \tfrac{1}{6}y^2 \cdot \overline{1''M}.$$

In Fig. 3 ist das Trägheitsmoment

$$\sum\nolimits_2 = \int xy^2 dy = \tfrac{1}{12}y^3 \cdot \overline{2M}.$$

In Fig. 4 ist

$$\sum\nolimits_0 = \tfrac{1}{2}y \cdot \overline{00'} \text{ und } \sum\nolimits_1 = \tfrac{1}{6}y^2 \cdot \overline{11'}.$$

Für das Zehneck (Fig. 5) ergibt sich als Fläche

$$\sum\nolimits_0 = \tfrac{1}{2}y \cdot [\overline{00'} + \overline{(0)(0')}] = \tfrac{1}{2}y \cdot AB,$$

als statisches Moment

$$\sum\nolimits_1 = \tfrac{1}{6}y^2 \cdot [\overline{11'} - \overline{(1)(1')}] = \tfrac{1}{6}y^2 \cdot (1')B.$$

Theoretische Begründung der in den beiden ersten Abschnitten aufgestellten Behauptungen.

Das in Fig. 6 dargestellte Polygon $NK_1K_2K_3K_4M$ werde durch die ausgleichende Gerade AK_2 in das Fünfeck $AK_2K_3K_4M$ von gleichem Moment n-ten Grades $\sum_n = \int xy^n dy$ verwandelt. Schneidet die verlängerte Polygonseite K_1K_2 die Achse in V, so ist der Forderung genügt, wenn die Dreiecke VNK_1 und VAK_2 momentengleich sind.

Fig. 6.

Durch partielle Integration kann man $\sum_n$ zwischen den Grenzen 0 und y unter der Form $\sum_n = \int \frac{y^{n+1}}{n+1} dx$ darstellen.

Bezieht man die Koordinaten x, y auf die Gerade VK_1 und α, β auf NK_1, so lautet, wenn f als Funktionszeichen dient, die Bedingung etwas allgemeiner als Gleichung (1) in des Verfassers anfangs erwähntem Aufsatz

$$\int_{y=0}^{y=y} f(y)\,dx - \int_{\beta=0}^{\beta=y} f(\beta)\,d\alpha = K. \tag{1}$$

Entsprechend der dortigen Gleichung (1a) ergibt sich aus den Beziehungen

$$\alpha = \frac{r}{y}\beta, \qquad d\alpha = \frac{r}{y}d\beta$$

die Formel

$$\int_{y=0}^{y=y} f(y)\,dx - \frac{r}{y}\int_{\beta=0}^{\beta=y} f(\beta)\,d\beta = K. \tag{2}$$

Schreibt man wieder y statt β und entnimmt aus Fig. 6 die Beziehungen

$$y = \varrho \sin \varepsilon, \quad x = \varrho \cos \varepsilon = r + \sigma,$$
$$dy = d\varrho \sin \varepsilon, \quad dx = d\varrho \cos \varepsilon,$$

so geht (2) über in

$$\cos \varepsilon \int f(\varrho \sin \varepsilon) d\varrho - \frac{r}{\varrho} \int f(\varrho \sin \varepsilon)\, d\varrho = K$$

oder

$$\left(\frac{r+\sigma}{\varrho} - \frac{r}{\varrho}\right) \int f(\varrho \sin \varepsilon) d\varrho = K.$$

In vereinfachter Gestalt erhält man als Relation zwischen ε, σ, ϱ und K

$$\frac{\sigma}{\varrho} \int f(\varrho \sin \varepsilon) d\varrho = K. \tag{3}$$

Für den speziellen Fall der Momente n-ten Grades

$$f(y) = \frac{y^{n+1}}{n+1} \tag{3a}$$

wird

$$\frac{\sigma \sin \varepsilon^{n+1}}{\varrho^{(n+1)}} \int \varrho^{n+1} d\varrho = K. \tag{4}$$

Integriert man und bedenkt, daß diese Gleichung für alle Werte von σ und ϱ gilt, so findet sich[1])

$$\sigma \varrho^{n+1} = \sigma_0 \varrho_0^{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{\sin \varepsilon^{n+1}} K. \tag{5}$$

Diese Formel läßt eine einfache, geometrische Deutung zu.

Zur Verwandlung 0-ten Grades (nach Fläche) kann man nach (5) schreiben (vergl. Fig. 7)

$$\sigma_0 = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = \overline{0V}. \tag{6}$$

Denn zieht man $\overline{0K_1} \parallel NK_2$, so geht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $V0K_1$ und VNK_2 die letzte Gleichung hervor.

Soll der Linienzug NK_1K_2 nach dem statischen Moment ($n = 1$) ausgeglichen werden, so ist nach Formel (5) und (6)

$$\sigma_0 = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 = \overline{0V} \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = \overline{1V}. \tag{7}$$

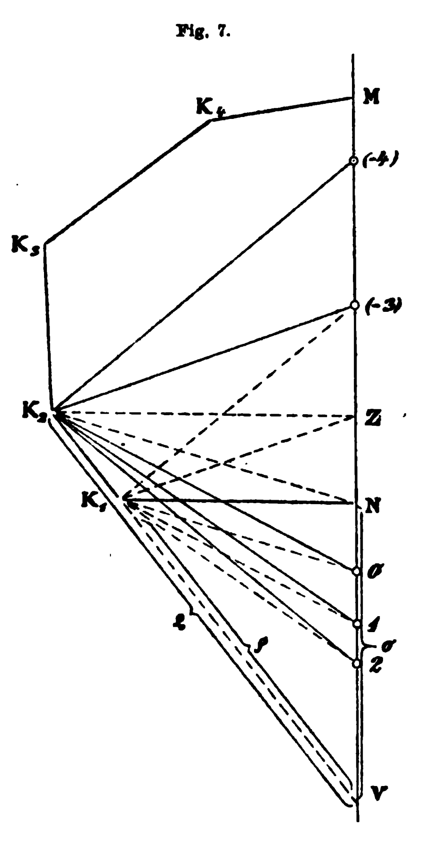
---

1) Formel (5) läßt sich auch aus der in des Verf. oben erwähntem Aufsatz Seite 378 entwickelten Schlußformel (6) [$v = n \cdot u$] ableiten.

Wenn $\overline{1K_1} \parallel \overline{0K_2}$, folgt Gleichung (7) aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $V1K_1$ und $V0K_2$.

Ganz analog erhält man für das Trägheitsmoment ($n = 2$) durch Parallelziehen zur Ausgleichenden ersten Grades $\overline{1K_2}$ nach (5) und (7)

$$\sigma_0 = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^2 = \overline{1V}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) = \overline{2V}.$$



Hiernach ist die Konstruktion der Punkte n auf MN für Momente n-ten Grades ohne weiteres einzusehen, und es bleibt nur noch übrig, die Verwandlung nach Momenten negativen Grades $\sum_{(-n)} = \int \frac{x}{y^n} dy$ aus Formel (5) geometrisch abzuleiten.

Für $n = -1$ und -2 lauten die Momentengleichungen

$$\sum_{(-1)} = \int \frac{x}{y} dy = \int \log \operatorname{nat} y \, dx,$$

$$\sum_{(-2)} = \int \frac{x}{y^2} dy = -\int \frac{dx}{y}.$$

In beiden Fällen werden die Formeln (3a) resp. (4) logarithmisch und führen zu keiner geometrischen Konstruktion.

Macht man $ZK_2 \parallel NK_1$ und dann $\overline{(-3)K_2} \parallel ZK_1$, so wird

$$ZV = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)$$

und

$$\overline{(-3)V} = ZV \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho} = \sigma\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2 = \sigma\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{(-2)}. \tag{8}$$

Ein Vergleich mit Formel (5) ergibt für $n = -3$

$$\overline{(-3)V} = \sigma_0.$$

Die Gerade $\overline{(-3)K_2}$ gleicht also den Linienzug NK_1K_2 nach dem Moment $\sum_{(-3)}$ aus.

Die Parallele $\overline{(-4)K_2}$ zu $\overline{(-3)K_1}$ ist Ausgleichende (— 4)-ten

Grades, denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $V(-4)K_2$ und $V(-3)K_1$ und nach (8) folgt

$$(-4)V = (-3)V \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho} = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^3 = \sigma \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{(-3)}.$$

Stereometrisch wird die Formel (5) für $n = 2$ in einfacher Weise nach der Guldinschen Regel abgeleitet.

Das Ausgleichungsprinzip bedingt, daß das statische Moment des Polygons $\sum_1 = \frac{1}{2}\int y^2 dx$ konstant bleibe, wenn die Seite NK_1 (vergl. Fig. 6) in die Lage AK_2 übergeht. Es muß auch das Integral $\pi\int y^2 dx$, der Inhalt des Drehungskörpers um MN, konstant bleiben, wenn das Polygon durch allmähliche Ausgleichung in ein Dreieck, der Körper also in einen Kegel verwandelt wird.

Der Inhalt des Kegels VNK_1 ist das Produkt aus der Dreiecksfläche VNK_1 und dem Wege des Schwerpunktes D oder in einer Formel ausgedrückt

$$(\tfrac{1}{2}\varrho\sigma \sin\varepsilon) \cdot 2\pi \cdot (\tfrac{1}{3}\varrho \sin\varepsilon) = K.$$

woraus folgt

$$\sigma\varrho^2 = \sigma_0\varrho_0^2 = \frac{3K}{\pi \sin^2\varepsilon}.$$

Die allgemeine Formel, mit deren Hilfe die Momente nach vollzogener Ausgleichung zu berechnen sind, ergibt sich aus Gleichung (2) für $K = 0$. Man setzt nach (3a) $f(y) = \frac{y^{n+1}}{n+1}$ und integriert die linke Seite zwischen den Grenzen 0 und y, sodaß man schließlich erhält

$$(9) \qquad \sum_n = \int^y xy^n dy = \int \frac{y^{n+1}}{n+1} dx = \frac{r_n}{(n+1)(n+2)} y^{n+1}.$$

r_n (siehe Fig. 6) ist die Projektion resp. die Summe der Projektionen der ausgleichenden Geraden. Für Fig. 3 ist $r_1 = \overline{1M}$, $r_2 = \overline{2M}$; für Fig. 4 dagegen $r_0 = \overline{00'} = \overline{1'A}$, $r_1 = \overline{11'}$. In Fig. 5 setzt sich r_0 und r_1 aus der Summe resp. Differenz zweier Projektionen zusammen.

Es fehlt nun noch der Beweis für die im zweiten Abschnitt angegebene Konstruktion der Schwerlinie und der reduzierten Pendellänge. Der Abstand der Schwerlinie SS' (vgl. Fig. 2 und 4) von der Achse MN ist nach mechanischen Grundsätzen in Rücksicht auf (9) für $n = 0$ und 1

$$(10) \qquad \eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int y^2 dx}{\int y dx} = \frac{\sum_1}{\sum_0} = \frac{r_1 \cdot y^2 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot r_0 \, y} = \frac{1}{3} y \cdot \frac{r_1}{r_0}.$$

Da in Fig. 2 die Strecke $PM = \frac{1}{3} K_4 M$ ist, so wird das Lot von P auf die Achse gleich $\frac{1}{3} y$. Ferner ist $\overline{0''P} \parallel \overline{1''S}$. Nach den Proportionssätzen verhält sich dann

$$\eta : \tfrac{1}{3} y = \overline{1''M} : \overline{0''M} = r_1 : r_0.$$

Es ist also SS' Schwerlinie des ausgeglichenen Polygons.

Unter reduzierter Pendellänge versteht man den Quotienten

$$l = \frac{\int xy^2 dy}{\int xy dy} = \frac{\frac{1}{3}\int y^3 dx}{\frac{1}{2}\int y^2 dx}.$$

Dieser Ausdruck geht nach Formel (9) über in

$$l = \frac{\sum_2}{\sum_1} = \frac{r_2 \cdot y^3 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot r_1 \cdot y^2} = \frac{1}{2} y \cdot \frac{r_2}{r_1}. \tag{11}$$

Vergleicht man die Formeln (10) und (11) mit einander, so zeigt sich, daß in Fig. 3 $P'M = \frac{1}{2} K_3 M$ sein muß; an die Stelle von 0 und 1 treten hier 1 und 2. Dann ist das Lot von L auf MN gleich l.

Die größte Genauigkeit erreicht man bei diesem Verfahren, wenn die Ecken des zu verwandelnden m-Ecks durch feine Nadelstiche bezeichnet sind. Der mittlere Richtungsfehler μ der ausgleichenden Geraden setzt sich für das Moment $\sum_n$ aus den Abweichungen von (wie oben gesagt) $2(n+1)(m-3)$ Einzeloperationen zusammen. Diese sind ebenso oft positiv wie negativ und rechtfertigen das Fehlergesetz

$$\mu = \pm K\sqrt{2(n+1)(m-3)}.$$

Die Konstante K muß sehr klein angenommen werden, da die Resultate sich durch eine erhebliche Genauigkeit auszeichnen.

Aachen, im Februar 1904.

Über instantane Schraubengeschwindigkeiten und die Verzahnung der Hyberboloidräder.

Von MARTIN DISTELI in Straßburg i. E.

(Mit einer Tafel, Fig. 15—15 d.)

In den folgenden Ausführungen handelt es sich um die geometrische Zusammensetzung und Zerlegung instantaner Schraubengeschwindigkeiten, einerseits um daraus die Mittel zur zeichnerischen Darstellung der verschiedenen Typen der Schraubenaxoide zu gewinnen, andererseits um

zu einer geometrisch genauen Verzahnung dieser Axoide, insbesondere der Hyperboloidräder zu gelangen.

Das Verzahnungsproblem zweier Räder an windschiefen oder gekreuzten Achsen gehört bereits einer früheren Zeit an und geht auf Th. Olivier[1]) zurück, der schon 1815 den Gedanken erfaßte, Bewegungen um zwei sich nicht schneidende Achsen direkt aufeinander zu übertragen. Olivier gab 1816 eine Verzahnung zweier Räder bekannt, deren zylindrische Grundkörper zu gekreuzten Achsen gehören und Zähne tragen, die sich beständig längs einer geradlinigen Strecke berühren, also zur Übertragung mechanischer Arbeit tauglich sind.

Dieses Beispiel einer Linienverzahnung, welches auch durch Modelle[2]) veranschaulicht wurde, blieb infolge seiner Einfachheit lange Zeit das einzig bekannte einer wirklich ausführbaren Verzahnung: denn wenn auch im Laufe der Zeit noch weitere Versuche hinzugekommen sind, welche bereits von hyperboloidischen Grundkörpern ausgehen, so haben diese doch die Allgemeinheit der Olivierschen Auffassung kaum erreicht.[3])

Diese allgemeine Theorie Oliviers liegt aber auf dem Gebiete der Schraubentheorie. In der Tat läßt sich denn auch durch Heranziehung dieser, namentlich durch die Herren Sir Robert Ball, F. Klein, E. Study u. A. bekannt gewordenen Theorie, das Verzahnungsproblem gerade im wichtigsten Falle der Linienverzahnung in einer Weise lösen, die der bekannten Zykloidenverzahnung der Stirn- und Kegelräder in vollständiger Analogie zur Seite gestellt werden kann.

Von den dynamischen Fragen des Problems ist im folgenden abgesehen; wir beschränken uns vielmehr darauf, die geometrische Form der Zahnflanken durch kinematische Betrachtungen zu bestimmen und reichen zu diesem Zwecke mit dem einfachen Mittel der Zusammensetzung von Schraubengeschwindigkeiten aus. Diese führt naturgemäß

---

1) Théodore Olivier, Théorie Géométrique des Engrenages. Paris 1842, welches Werk eine chronologische Angabe aller Arbeiten enthält, welche Olivier 1816 bis 1832 über Verzahnungsprobleme veröffentlicht hat.

2) Nach Angaben Oliviers, Seite 118 a. a. O. zuerst 1831 an der École Polytechnique; dann durch T. Rittershaus, an der Modellausstellung 1892 in München ausgestellt. Vergl. Katalog mathematischer Modelle usw. von W. Dyck, III. Abt. Seite 344, wo das Modell beschrieben ist. Vergl. auch: Pützer, Spiraloidräder, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, der im wesentlichen den Ausführungen Oliviers folgt.

3) Vergl. A. Schoenfließ u. M. Grübler, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften; Band IV_1, Heft 2, Seite 261 und die diesbezüglichen weiteren Literaturangaben Seite 265 ff.

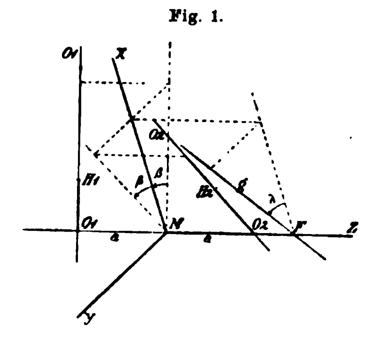
zu den bekannten Eigenschaften des Zylindroids oder Plückerschen Konoids, zu den mit dieser Fläche zusammenhängenden *Axoidscharen* und dadurch von selbst auf eine Verzahnung sowohl der Schraubenaxoide als der Hyperboloide. Es läßt sich voraussehen, daß durch Einführung der mit den Schrauben des Zylindroids zusammenhängenden Systeme linearer Komplexe verschiedenen Resultaten eine elegante Herleitung gegeben werden kann; wenn in den vorliegenden Ausführungen von diesem Hilfsmittel nicht Gebrauch gemacht wurde, so geschah es in dem Bestreben, das Ziel durchweg mit möglichster Einfachheit zu erreichen.

Die Zusammensetzung der Schraubengeschwindigkeiten muß zum Zwecke der Konstruktion geometrisch interpretiert werden und geschieht in einer bereits früher besprochenen[1]) und jetzt vervollständigten Weise, welche in einem speziellen Falle schon von Lewis[2]) zur Konstruktion des Zylindroids benutzt worden ist.

Die Brauchbarkeit der Verzahnung und der Hyperboloidräder kann allerdings vom geometrischen Standpunkt aus nicht entschieden werden. Jedenfalls aber bleibt dem Verzahnungsproblem schon seiner Anschaulichkeit wegen ein theoretisches Interesse gesichert, und dies umsomehr, als die mit dem Problem zusammenhängenden Aufgaben mit zu den anregendsten Anwendungen der darstellenden Geometrie gerechnet werden dürfen.

§ 1. Zusammensetzung instantaner Schraubengeschwindigkeiten.

Wir betrachten zwei feste Achsen o_1 und o_2 von gekreuzter oder windschiefer Lage. Die gemeinsame Normale derselben wählen wir als Achse z, den Mittelpunkt M der kürzesten Distanz $O_1 O_2$, welche die Länge $2a$ haben möge, als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 1). Die positive Richtung der Achse z gehe nach rechts; die positiven Richtungen der Achsen o_1 und o_2 seien so festgelegt, daß der von ihnen eingeschlossene Achsenwinkel 2β ein spitzer Winkel ist.



Die Achsen x und y des Koordinatensystems seien parallel zur innern und äußern Winkelhalbierenden des Achsenwinkels gezogen. Die positive Richtung der Achse x liege nach der Seite der positiven

1) Vergl. diese Zeitschrift, Band 46, Heft 1 u. 2, Seite 134 ff.

2) Vergl. T. C. Lewis, Messenger of Mathematics. Vol. II. Seite 1—5. 1879.

Richtungen von o_1 und o_2; die positive Richtung der Achse y sei so festgelegt, daß von der positiven Seite der Achse z aus gesehen $(+x)$ durch Drehung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers nach $(+y)$ gebracht werden kann. Dieses Koordinatensystem $M(x, y, z)$ heiße kurz das *Mittelpunktssystem.*

Jede Gerade g, welche die Achse z in einem Punkte F rechtwinklig schneidet, heiße eine *Achse.* Sie ist bestimmt durch den Abstand ϱ ihres Fußpunktes F vom Mittelpunkt M und durch den Winkel α gegen die positive Richtung der Achse x.

Der Winkel α liegt vorläufig zwischen Null und vier Rechten, und es sei diejenige Seite der Achse g als positiv bezeichnet, welche durch die Richtung der positiven Achse x angezeigt wird, falls diese in der Richtung von x nach y um den Winkel α gedreht wird.

Vom Fußpunkte F aus denken wir jetzt in der Achse g eine Strecke h von bestimmter Länge aufgetragen; nach der positiven Seite der Achse g, falls h positiv ist, nach der entgegengesetzten, falls h negativ sein sollte. Diese Strecke heißt nach Sir Robert Ball[1]) der *Windungsparameter* der Achse. Geometrisch bestimmt er durch jeden Punkt des Raumes eine Schraubenlinie, welche g zur Achse und h zur reduzierten Ganghöhe hat. Die Gesamtheit dieser Schraubenlinien bildet die *Ballsche Schraube*; sie ist nach rechts oder links gewunden, je nachdem der Windungsparameter eine positive oder negative Strecke ist.

Fügen wir der Strecke h noch eine zweite von F ausgehende Strecke ω der Achse hinzu, der wir ebenfalls bestimmte Länge und bestimmten Sinn geben wollen, so kann ω die um die Achse stattfindende Winkelgeschwindigkeit darstellen, die von der positiven Seite der Achse aus gesehen im Sinn des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten dreht, je nachdem ω eine negative oder positive Strecke ist. Soll die in der Zeiteinheit erfolgte Amplitude φ bestimmt sein, so ist allerdings auch die Angabe der Einheitsstrecke e erforderlich, weil φ den auf dem Einheitskreis gemessenen Bogen von der Länge ω bedeutet. Die Strecke e denken wir uns in der Folge gegeben.

Durch das Hinzutreten von ω wird an der Achse g eine bestimmte Translationsgeschwindigkeit von der Größe $h\omega$ hervorgerufen, und es erhält jeder Punkt des Raumes eine Geschwindigkeit von bestimmter Größe, deren Richtung in die Tangente der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie der Schraube fällt. Der Inbegriff dieser Geschwindigkeiten, die durch g, h, ω vollständig erklärt wird, nennt man eine

1) Vergl. Sir Robert S. Ball, A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge 1900, sowie die darauf bezügliche Abhandlung von F. Klein, Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Diese Zeitschrift, Band 47, Seite 237 ff.

Schraubengeschwindigkeit; die Gesamtheit der Bewegungen aller Punkte des Raumes eine *Schraubenbewegung*. Wirkt die Geschwindigkeit ω nur momentan, so heißt die Schraubengeschwindigkeit und die Schraubenbewegung eine *instantane*.

In der Folge haben wir es stets mit instantanen Schraubengeschwindigkeiten zu tun; ist die Schraube (g, h), an der die Schraubengeschwindigkeit wirkt, schon bekannt, so werden wir diese kurz mit ω selbst bezeichnen, und wo es nicht auf die absoluten Werte der auftretenden Geschwindigkeiten, sondern nur auf ihre Verhältnisse ankommt, die Einheitsstrecke weglassen können.

Sind p, q, r, u, v, w jetzt die Komponenten der instantanen Schraubengeschwindigkeit ω bezogen auf das Mittelpunktssystem, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned}
&p = \omega \cos \alpha, \\
&q = \omega \sin \alpha, \\
&r = 0, \\
(1)\qquad &u = hp - q\varrho = (h \cos \alpha - \varrho \sin \alpha)\omega, \\
&v = hq + p\varrho = (h \sin \alpha + \varrho \cos \alpha)\omega, \\
&w = 0.
\end{aligned}$$

Wird jetzt an der festen Achse o_1 eine Schraubengeschwindigkeit ω_1 vom Windungsparameter h_1, ebenso an der festen Achse o_2 eine Schraubengeschwindigkeit ω_2 vom Windungsparameter h_2 angebracht, so soll die Differenz $\omega = \omega_2 - \omega_1$ dieser beiden Schraubengeschwindigkeiten dargestellt werden, welche bekanntlich wieder eine Schraubengeschwindigkeit ist, deren Achse wir gerade mit g und deren Windungsparameter wir mit h bezeichnen können. Man erhält aber die Komponenten p_1, q_1, u_1, v_1 und p_2, q_2, u_2, v_2 der Schraubengeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 inbezug auf das Mittelpunktssystem aus den Gleichungen (1), indem man setzt:

$$\varrho = \mp a, \qquad \alpha = \mp \beta.$$

Die Komponenten der gesuchten Schraubengeschwindigkeit ω sind dann bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&p = p_2 - p_1 = (\omega_2 - \omega_1)\cos\beta, \\
(2)\qquad &q = q_2 - q_1 = (\omega_2 + \omega_1)\sin\beta, \\
&u = u_2 - u_1 = (h_2 \cos\beta - a\sin\beta)\omega_2 - (h_1\cos\beta - a\sin\beta)\omega_1, \\
&v = v_2 - v_1 = (h_2\sin\beta + a\cos\beta)\omega_2 + (h_1\sin\beta + a\cos\beta)\omega_1.
\end{aligned}$$

Die Vergleichnng dieser Werte der Komponenten mit den entsprechenden aus den Gleichungen (1) ergibt die Bestimmung von α, ϱ, h und ω.

Führt man nämlich die Winkel α_1 und α_2 ein, welche die positive Richtung der Achse g mit den Achsen o_1 und o_2 einschließt, so ist

$$(3) \qquad \alpha_1 = \alpha + \beta, \quad \alpha_2 = \alpha - \beta, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta,$$

und es wird alsdann:

$$(4) \qquad \frac{\omega}{\sin 2\beta} = \frac{\omega_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\sin \alpha_1},$$

d. h.

$$(5) \qquad \omega_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \alpha_2$$

und

$$(6) \qquad \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos 2\beta.$$

Die erste Gleichung sagt aus, daß die resultierende Winkelgeschwindigkeit ω nach Größe und Sinn durch die Verbindungsstrecke des Endpunktes von ω_1 mit dem Endpunkt von ω_2 dargestellt wird. Sie ist der gesuchten Achse g parallel. Bezeichnen wir jetzt als *positive Seite* von g denjenigen Halbstrahl, dessen Neigungswinkel α_1 gegen o_1 kleiner oder gleich zwei Rechten ist, so erhält ω durch die Gleichungen (4) ein bestimmtes Vorzeichen, das positiv oder negativ ist, jenachdem der Pfeil von ω nach der positiven oder negativen Seite von g gerichtet ist. Die letzte Gleichung zeigt, daß ω^2 eine Invariante inbezug auf jede Änderung des Koordinatensystems ist.

Die Vergleichung der Werte für u und v ergibt ferner:

$$(7) \quad h \sin 2\beta = -h_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + h_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2a \sin \alpha_1 \sin \alpha_2,$$

$$(8) \quad \varrho \sin 2\beta = (h_1 - h_2) \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + a \sin(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Durch diese Gleichungen ist die Lage der Achse g und der resultierende Windungsparameter bestimmt. Beachtet man, daß infolge (3) die beiden Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin 2\beta &= -\sin^2 \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos 2\beta, \\ \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin 2\beta &= +\sin^2 \alpha_1 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos 2\beta \end{aligned}$$

identisch bestehen, so wird

$$h \sin^2 2\beta = h_1 \sin^2 \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 ((h_1 + h_2) \cos 2\beta - 2a \sin 2\beta) + h_2 \sin^2 \alpha_1,$$

oder in Rücksicht auf (4)

$$(10) \qquad h\omega^2 = h\omega_1^2 + (h_1 + h_2 - 2a \operatorname{tg} 2\beta)\omega_1\omega_2 \cos 2\beta + h_2\omega_2^2.$$

Bezeichnen also w_1, w_2, w die längs der Achsen o_1, o_2, g wirkenden Translationsgeschwindigkeiten, sodaß man hat

$$(11) \qquad w_1 = h_1 \cdot \omega_1, \quad w_2 = h_2 \cdot \omega_2, \quad w = h \cdot \omega,$$

so folgt:

$$(12) \quad w\omega = w_1\omega_1 + w_2\omega_2 + (w_1\omega_2 + w_2\omega_1) \cos 2\beta - 2a\omega_1\omega_2 \sin 2\beta.$$

Die Größe $w\omega$ ist demnach die Invariante der Translation inbezug auf irgendwelche Änderungen des Koordinatensystems.

Für die Vorstellung der Lage der resultierenden Achse g ist es aber zweckmäßiger, die Entfernungen

$$O_1F = r_1 \quad \text{und} \quad O_2F = r_2$$

ihres Fußpunktes F von O_1 und O_2 zu berechnen.

Setzt man also

$$(13) \qquad r_1 = \varrho + a, \quad r_2 = \varrho - a, \quad r_1 - r_2 = 2a,$$

und führt man noch die Differenz

$$(14) \qquad h_2 - h_1 = 2h_0$$

der Windungsparameter ein, so folgt aus Gleichung (8):

$$(15) \qquad \begin{aligned} r_1 \sin 2\beta &= 2(a \cos \alpha_2 - h_0 \sin \alpha_2) \sin \alpha_1, \\ r_2 \sin 2\beta &= 2(a \cos \alpha_1 - h_0 \sin \alpha_1) \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Kombiniert man diese Gleichungen mit (7), so kann man auch h_1 und h_2 durch den resultierenden Windungsparameter h ausdrücken. Es ergibt sich

$$(16) \qquad \begin{aligned} h_1 &= h + r_1 \operatorname{cotg} \alpha_2 - \frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}. \\ h_2 &= h + r_2 \operatorname{cotg} \alpha_1 - \frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}. \end{aligned}$$

Durch Elimination von $2a$ aus den Gleichungen (15) erhält man die weitere Beziehung

$$(17) \qquad 2h_0 = r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 - r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2,$$

also mit (14) die Gleichung

$$(18) \qquad r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + h_1 = r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 + h_2 = -q.$$

Addiert man andererseits die Gleichungen (16) und berücksichtigt die letzte der Gleichungen (13), so folgt:

$$(19) \qquad h_1 + h_2 = 2h + r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 - 4a \operatorname{cotg} 2\beta$$

oder mit Rücksicht auf (18):

$$(20) \qquad h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = h - q.$$

Durch die vorstehenden Formeln ist nun die gesuchte resultierende Schraubengeschwindigkeit vollständig bestimmt.

Mit der Bestimmung der resultierenden Schraubengeschwindigkeit $\omega_2 - \omega_1$ ist aber jetzt ein bestimmtes kinematisches Problem gelöst. Verschraubt man nämlich die resultierende Achse g mittelst der an o_1

und o_2 bestehenden Schraubengeschwindigkeiten, so beschreibt g zwei Schraubenregelflächen S_1 und S_2, und es ist aus der Lehre von den Schraubenflächen bekannt, daß die in Gleichung (18) mit q bezeichnete Größe den Verteilungsparameter jeder der beiden Flächen längs ihrer gemeinsamen Kante g darstellt. Bei der Verschraubung von g beschreibt der Fußpunkt F die Striktionslinien der Schraubenflächen; es ist also F der gemeinsame Zentralpunkt und die Normalebene durch g zur Achse z die gemeinsame Zentralebene von g. Daraus folgt, daß die beiden Flächen S_1 und S_2 sich längs der ganzen Erstreckung von g berühren.

Werden beide Flächen selbst mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 resp. ω_2 um ihre Achsen geschraubt, so sagt die Gleichung (5) aus, daß die unendlich fernen Querschnitte ihrer Richtungskegel ohne Gleitung auf einander abrollen. Dies findet also auch für die Flächen S_1 und S_2 selber statt, und zwar ist $\omega = \overline{\omega_1 \omega_2}$ nach Größe und Vorzeichen die relative Winkelgeschwindigkeit, mit der die Fläche S_2 auf der Fläche S_1 abrollt. Längs der Erzeugenden g aber findet Gleitung beider Flächen statt, und es ist w die relative Gleitgeschwindigkeit, mit der die Fläche S_2 auf der Fläche S_1 gleitet. Diese beiden Schraubenflächen bilden also zwei entsprechende Axoide für ein konstantes Verhältnis ihrer Winkelgeschwindigkeiten. Wir können daher sagen, die Axoide gehören zu den Schrauben (o_1, h_1) und (o_2, h_2) und können h als den Gleitparameter derselben bezeichnen. Alsdann ergibt sich das Resultat:

Sollen die zu den Schrauben (o_1, h_1) und (o_2, h_2) gehörigen Schraubenaxoide für ein gegebenes Verhältnis ihrer Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 ermittelt werden, so bestimme man die resultierende Schraubengeschwindigkeit $\omega = \omega_2 - \omega_1$. Alsdann ergeben die Achse g, Winkelgeschwindigkeit ω und Windungsparameter h derselben die Berührungskante, relative Rollgeschwindigkeit und Gleitparameter der relativen Gleitung der Axoide, während $h \cdot \omega$ die relative Gleitgeschwindigkeit selber ist.

Bezeichnen wir jetzt im weiteren die Winkel, welche die Tangenten t_1 und t_2 an die Striktionslinien in ihrem gemeinsamen Schnittpunkt F mit den Achsen o_1 und o_2 einschließen, mit ϑ_1 und ϑ_2, so ist

$$h_1 = -r_1 \operatorname{cotg} \vartheta_1, \qquad h_2 = -r_2 \operatorname{cotg} \vartheta_2, \tag{21}$$

und es ergeben sich für den Verteilungsparameter q die Werte:

$$q = r_1(\operatorname{cotg} \vartheta_1 - \operatorname{cotg} \alpha_1) = r_1 \frac{\sin(\vartheta_1 - \alpha_1)}{\sin \alpha_1 \sin \vartheta_1} \tag{22}$$

und

$$q = r_2(\operatorname{cotg} \vartheta_2 - \operatorname{cotg} \alpha_2) = r_2 \frac{\sin(\vartheta_2 - \alpha_2)}{\sin \alpha_2 \sin \vartheta_2}. \tag{23}$$

Setzt man andererseits die Werte von h_1 und h_2 aus (16) in die Gleichung (7) ein, so folgt:

$$h \sin 2\beta = \frac{r_1 \sin \alpha_2}{\sin \vartheta_1} \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) - \frac{r_2 \sin \alpha_1}{\sin \vartheta_2} \cos(\vartheta_2 - \alpha_2),$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (22) und (23)

$$(24) \qquad h \frac{\sin 2\beta}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} = q \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 - 2\beta)}{\sin(\vartheta_1 - \alpha_1) \sin(\vartheta_2 - \alpha_2)}.$$

Nehmen wir jetzt an, daß der Gleitparameter h verschwindet, so ist nach (20)

$$q = -(h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta).$$

Es verschwindet aber nach (24) h dann und nur dann, wenn die Gleichung

$$(25) \qquad \vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\beta$$

erfüllt ist. Wegen (22) und (23) ist aber in diesm Falle

$$\vartheta_1 - \alpha_1 = \vartheta_2 - \alpha_2 = \delta,$$

wo δ wegen des nicht verschwindenden Verteilungsparameters q von Null verschieden sein muß. Die Gleichung (18) nimmt jetzt die Form an

$$(26) \qquad \frac{r_1}{\sin \alpha_1 \sin \vartheta_1} - \frac{r_2}{\sin \alpha_2 \sin \vartheta_2} = 0$$

oder

$$(27) \qquad \frac{r_1 \omega_1}{\sin \vartheta_1} - \frac{r_2 \omega_2}{\sin \vartheta_2} = 0.$$

Die Gleichung (25) sagt aus, daß die Tangenten t_1 und t_2 in F zusammenfallen, d. h. daß die Striktionslinien sich berühren; die Gleichung (27) zeigt, daß von beiden Striktionslinien entsprechend gleiche Bogen durch die Zentrale gehen. Diese Linien rollen also ohne Gleitung auf einander, und dies ist somit wegen $h = 0$ auch für die Schraubenaxoide der Fall.

Wenn also die Striktionslinien zweier nicht developpablen Schraubenaxoide sich berühren, so rollen die Flächen ohne Gleitung auf einander ab, und es ist jede eine auf der andern abwickelbare Biegungsfläche.

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, der Verteilungsparameter q verschwinde, so sind die Axoide zwei developpable Schraubenflächen D_1 und D_2.

Es ist jetzt

$$\vartheta_1 - \alpha_1 = \vartheta_2 - \alpha_2 = 0,$$

d. h. die Striktionslinien oder Rückkehrkurven der Flächen haben in F die gemeinsame Tangente g. Trotzdem sich die Striktionslinien be-

rühren, findet Gleitung längs der Berührungskante statt, denn der Gleitparameter

$$h = h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta$$

hat einen von Null verschiedenen Wert. Da jetzt

$$(28) \qquad h_1 = -r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1, \quad h_2 = -r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2$$

ist, kann man diesem Ausdruck auch die Form geben:

$$(29) \qquad h = \left(\frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1} - \frac{r_2}{\sin^2 \alpha_2}\right) \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin 2\beta},$$

und es verschwindet demnach die Gleitung nur, falls der Klammerausdruck den Wert Null hat, d. h.

Zwei developpable Schraubenaxoide D_1 *und* D_2 *rollen nur dann ohne Gleitung auf einander ab, falls die Bedingung*

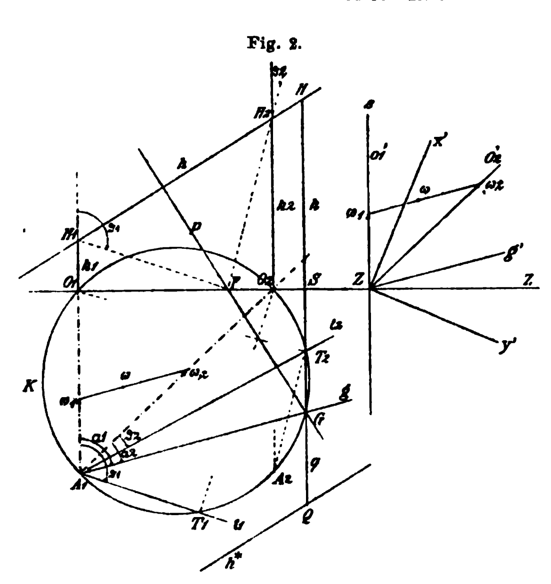
$$(30) \qquad \frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{r_2}{\sin^2 \alpha_2}$$

erfüllt ist.

§ 2. Graphische Darstellung instantaner Schraubengeschwindigkeiten.

Sollen die im vorigen Paragraphen aufgestellten Formeln dazu dienen, diejenigen Bestimmungsstücke zu liefern, welche zur Konstruktion der Schraubenaxoide nach den Methoden der darstellenden Geometrie notwendig sind, so müssen wir darauf ausgehen, die vorigen Formeln graphisch darzustellen und die unbekannten Größen aus den gegebenen durch geometrische Konstruktionen abzuleiten.

Fig. 2.



Wir denken uns im folgenden die Achse o_1 am einfachsten vertikal und wählen die durch sie und die Achse z gelegte Vertikalebene als Zeichenebene. Die Achse o_2 habe in z den Fußpunkt O_2, wobei die Entfernung $O_1 O_2$ wieder mit $2a$ bezeichnet sei. Wir führen jetzt in Fig. 2, rechts von O_2 eine Seitenrißebene ein, bestimmt durch ihre vertikale Spur s in

der Zeichenebene. Auf diese Ebene denken wir die Achsen o_1 und o_2 orthogonal projiziert und diese Projektionen o_1' und o_2' mit der Seitenebene nach rechts in die Tafel der Zeichnung niedergelegt. Die Projektionen o_1' und o_2' schließen dann den Achsenwinkel 2β ein. Durch diesen Winkel ist somit die Achse o_2 im Raume fixiert; ist 2β negativ, so wird die Seitenebene nach links in die Tafel gelegt.

Ziehen wir jetzt in der Ebene der Zeichnung die Parallelen o_1 und o_2 durch O_1 resp. O_2 zu o_1' und o_2', so schneiden sie sich in einem Punkte A_1. Durch die Ecken der Dreiecke $A_1 O_1 O_2$ geht dann ein Kreis K, dessen Mittelpunkt M_0 auf dem Durchmesser $A_1 O_2$ liegt und der den Radius

$$r_0 = \frac{a}{\sin 2\beta}$$

hat. Es mag aber gleich bemerkt werden, daß wir uns von der Bestimmung, o_1 solle vertikal sein, sofort befreien können, indem wir dem Punkte A_1 auf dem Kreise eine andere Lage geben, wodurch der Achsenwinkel 2β nicht geändert wird; die zu $A_1 O_1$ und $A_2 O_2$ parallelen Projektionen o_1' und o_2' drehen sich aber um den Punkt Z, d. h. es drehen sich auch die Achsen o_1 und o_2, ohne ihre gegenseitige Lage zu ändern, um die Achse z.

Sind jetzt ω_1 und ω_2 die Endpunkte der von A_1 aus auf o_1 und o_2 nach Größe und Sinn aufgetragenen Winkelgeschwindigkeiten, so ist die Strecke $\omega_1 \omega_2$ nach Größe und Pfeilrichtung die resultierende Winkelgeschwindigkeit ω; und die Parallele g' zu ihr durch Z ist demnach die Projektion der gesuchten Schraubenachse. Es ist aber überflüssig, g' zu ziehen, vielmehr können wir die Parallele g zu g' durch A_1 selber legen. Sie schließt gegen o_1 und o_2 die Winkel α_1 und α_2 ein und schneidet den Kreis K zum zweiten Male in einem Punkte G. Dieser Punkt G bestimmt umgekehrt die Gerade g durch A_1 eindeutig, wir wollen ihn mit Ball den Bildpunkt von g und den Kreis K überhaupt den Bildkreis nennen.

In der Fig. 2 erscheinen α_1 und α_2 als positive Winkel. Um jetzt die Lage der Achse g durch ihren Fußpunkt F in der Achse z zu bestimmen, denken wir die Windungsparameter h_1 und h_2 in den durch O_1 und O_2 gehenden Vertikalen $A_1 O_1$ und $A_2 O_2$ als Strecken

$$O_1 H_1 = h_1 \quad \text{und} \quad O_2 H_2 = h_2$$

aufgetragen und zwar nach oben, falls sie positiv sind. Ziehen wir jetzt die Verbindungslinie h der beiden Punkte H_1 und H_2, welche die *Parameterachse* heißen möge und durch G die Vertikale GH, so schneide

diese die z-Achse in einem Punkte S. Alsdann ist auch in Rücksicht auf die Vorzeichen:

$$A_1 O_2 = \frac{2a}{\sin 2\beta}; \qquad O_2 G = \frac{2a}{\sin 2\beta} \sin \alpha_2;$$

$$GS = \frac{2a}{\sin 2\beta} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \qquad O_1 S = \frac{2a}{\sin 2\beta} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2;$$

$$O_2 S = \frac{2a}{\sin 2\beta} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1.$$

Nach den Gleichungen (15) ist demnach:

$$r_1 \sin 2\beta = O_1 S \sin 2\beta - GS \frac{h_0}{a} \sin 2\beta,$$

also

$$r_1 = O_1 S - GS \operatorname{tg} 2\varepsilon,$$

wenn 2ε den Winkel der Parameterachse h gegen die Achse z bedeutet. Fällt man also von G das Lot p, welches die *Bildsehne* heißen mag, auf die Parameterachse, so trifft es die Achse z in einem Punkte F derart, daß

$$GS \operatorname{tg} 2\varepsilon = FS$$

ist. Somit wird jetzt

$$r_1 = O_1 S - FS = O_1 F,$$
$$r_2 = O_2 S - FS = O_2 F.$$

Damit sind die Abschnitte r_1 und r_2 konstruiert, und es ist die Lage der Achse g vollkommen bestimmt. Daraus folgt:

Fällt man vom Bilde G der Achse g das Lot p auf die Parameterachse, so geht es durch den Fußpunkt F der Achse. Bildsehne und Parameterachse stehen also stets auf einander rechtwinklig.

Die obenstehenden Ausdrücke der Strecken ergeben weiterhin:

$$-h_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + h_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 = \frac{h_2 \cdot O_1 S - h_1 \cdot O_2 S}{\frac{2a}{\sin 2\beta}}$$

$$= \sin 2\beta \frac{h_2 \cdot O_1 S - h_1 \cdot O_2 S}{O_1 S - O_2 S} = \sin 2\beta \cdot SH.$$

Nach (7) ergibt sich daher:

$$h \sin 2\beta = \sin 2\beta \cdot GS + \sin 2\beta \cdot SH,$$

also

$$h = GS + SH = GH,$$

d. h. *Die Vertikale durch das Bild G der Achse g bis zum Schnittpunkt H mit der Parameterachse stellt nach Größe und Sinn den resultierenden Windungsparameter h dar.*

Der Parameter h ist positiv, falls der Endpunkt H oberhalb des Anfangspunktes G der Strecke GH liegt. Ziehen wir endlich noch

die zum Mittelpunkt M_0 symmetrisch liegende Parallele h^* zu h, welche als *konjugierte* Parameterachse bezeichnet werden kann, und schneidet die durch G gezogene Vertikale diese in Q, so ist die in vertikaler Richtung gemessene Distanz der beiden konjugierten Parameterachsen

$$QH = h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = h - q,$$

und da

$$QH = GH + QG = h + QG,$$

so folgt

$$QG = -q, \quad \text{also} \quad q = GQ,$$

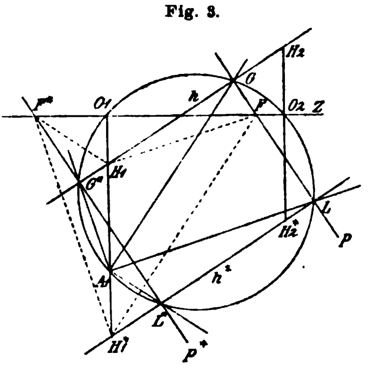
d. h. *Die Vertikale vom Bilde G der Berührungskante bis zur konjugierten Parameterachse stellt nach Größe und Sinn den gemeinsamen Verteilungsparameter beider Axoide dar.*

Zieht man in Fig. 2 im weiteren die Linien H_1F und H_2F, so schließen diese nach Definitionsgleichung (21) gegen die Vertikalen A_1O_1 und A_2O_2 die Steigungswinkel ϑ_1 und ϑ_2 der Striktionslinien ein. Man erhält also die Bilder T_1 und T_2 der Tangenten t_1 und t_2 im gemeinsamen Punkt F, indem man A_1T_1 parallel H_1F und A_2T_2 parallel H_2F zieht.

Wenn die Parameterachse h sich rechtwinklig zur Bildsehne p verschiebt, so ändern sich h_1 und h_2 gleichzeitig um denselben Betrag, und es durchlaufen T_1 und T_2 auf dem Bildkreis zwei projektive Punktreihen. Rückt die Parameterachse ins Unendliche, so fällt T_1 nach O_1 und T_2 nach O_2.

Es mögen jetzt in Fig. 3 G und L die reellen Schnittpunkte der Bildsehne p mit dem Bildkreise sein. Geht die Parameterachse h durch G, so verschwindet der Gleitparameter h, die Flächen S_1 und S_2 rollen ohne Gleiten, und es fallen daher t_1 und t_2, also auch T_1 und T_2 in einen Punkt T zusammen. Dieser Punkt wird also bestimmt durch die Gleichung (26)

Fig. 3.



$$\frac{r_1}{\sin\alpha_1 \sin\vartheta_1} = \frac{r_2}{\sin\alpha_2 \sin\vartheta_2},$$

welche nach der bekannten Potenzeigenschaft des Kreises aussagt, daß die drei Punkte G, F und T in einer Geraden liegen, d. h. daß T mit L zusammenfällt, also L ein Doppelpunkt der projektiven Reihen T_1, T_2 ist. Die Tangenten t_1 und t_2 fallen daher in l zusammen und es ist A_1L parallel H_1F.

Sollen demnach zwei Schraubenaxoide ohne Gleitung aufeinander rollen,

so muß die Parameterachse durch den Bildpunkt G ihrer Berührungskante gehen.

Offenbar bestimmt jetzt auch umgekehrt die durch L gehende konjugierte Parameterachse h^* zwei aufeinander abwickelbare Axoide, die l zur Berührungskante und g zur gemeinsamen Tangente der Striktionslinie haben und zu den Windungsparametern

$$h_1^* = O_1 H_1^* \text{ und } h_2^* = O_2 H_2^*$$

gehören. Es ist also G das zweite Doppelelement der projektiven Punktreihen T_1 und T_2, somit die Bildsehne die Perspektivachse der Projektivität und $A_1 G$ parallel $H_1^* F$.

Es bestimmt aber die Parameterachse h^* auch an der Berührungskante g zwei Axoide, für welche der Verteilungsparameter q verschwindet, so daß g, t_1 und t_2 zusammenfallen. Diese Axoide sind also developpable Schraubenflächen; desgleichen die beiden Axoide, welche die Parameterachse h an der Kante l bestimmt. Daraus folgt:

Sollen durch die Windungsparameter h_1 und h_2 zwei developpable Schraubenaxoide D_1 und D_2 erzeugt werden, so muß die konjugierte Parameterachse durch den Bildpunkt G der Berührungskante gehen.

Ziehen wir also schließlich noch die Bildsehne p^* durch die Punkte G^* und L^* der Figur 3, so entsteht der Fußpunkt F^* und es ist

$$A_1 G^* \parallel H_1^* F^* \text{ und } A_1 L^* \parallel H_1 F^*.$$

Durch F^* gehen zwei neue Kanten g^* und l^*, und es ist g^* normal zu l und l^* normal zu g. Die Parameterachse h bestimmt an g^* zwei abwickelbare, an l^* zwei developpable Axoide und für h^* ist es umgekehrt.

Setzt man noch

$$h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = 2\varkappa$$

so ist nach Gleichung (20)

$$h - q = 2\varkappa.$$

Demnach ist für die Kanten g und g^* in bezug auf die Parameterachse h:

$$h_g = 0,\ q_g = -2\varkappa$$

und für die Kanten l und l^*

$$q_l = 0,\ h_l = +2\varkappa$$

somit

$$h_l = -q_g.$$

Für die Parameterachse h^* ist dagegen

$$h_1^* + h_2^* + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = -2\varkappa,$$

und es kehren somit die obigen Größen das Vorzeichen um. Fassen wir alles zusammen, so folgt:

Sind h_1 und h_2 zwei gegebene Windungsparameter, so bestimmen sie zwei Paare nicht developpabler Axoide für reines Rollen und zwei Paare developpabler Axoide für gleitendes Rollen. Die Bilder der Berührungskanten der ersten Paare sind die Schnittpunkte der Parameterachse h, die der beiden andern Paare die Schnittpunkte der konjugierten Achse h^* mit dem Bildkreis. Der gemeinsame Gleitparameter der developpablen Paare ist entgegengesetzt gleich dem gemeinsamen Verteilungsparameter der nicht developpablen Paare, und es ändern diese Parameter nur das Vorzeichen für die neuen Axoide, die entstehen, wenn h mit h^* vertauscht wird.

Sollen endlich die Axoide deloppabel sein und zugleich ohne Gleiten rollen, so folgt mit $h = q = 0$ aus (20)

$$h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, daß jetzt die Parameterachse in Figur 4 durch den Mittelpunkt des Bildkreises geht, daß demnach die Bildsehnen p und p^* die Tangenten des Bildkreises in den Endpunkten der Parameterachse sind. Die Developpablen sind in der Weise aufeinander abwickelbar, daß ihre Stricktionslinien in der Abwicklung kongruente Kreise werden. Es sind nämlich die Radien dieser Kreise gleich den Krümmungsradien der Stricktionslinien, haben also die Werte

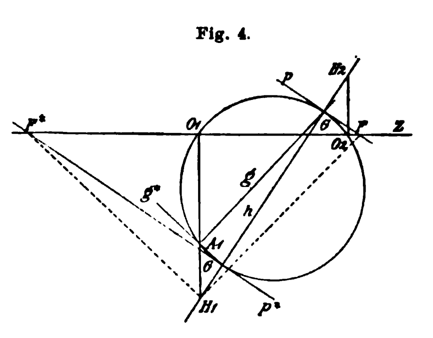
$$(31) \qquad \varrho_1 = \frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1}, \quad \varrho_2 = \frac{r_2}{\sin^2 \alpha_2},$$

und somit ist nach Gleichung (30) in der Tat

$$\varrho_1 = \varrho_2.$$

Daraus folgt, daß die Striktionslinien im gemeinsamen Punkte F sich oskulieren, also den nämlichen Krümmungskreis besitzen. Der Krümmungsmittelpunkt läßt sich leicht angeben. Ist h in Figur 4 die durch M_0 gehende Parameterachse, welche auf o_1 und o_2 die Windungsparameter h_1 und h_2 bestimmt, so sind G und G^* die Bilder, F und F^* die Fußpunkte der Berührungskanten g und g^* zweier Paare developpabler Axoide D_1 und D_2, die ohne Gleiten rollen. Nach der vorangegangenen Konstruktion ist aber

Fig. 4.



$$A_1 G \parallel H_1 F \text{ und } A_1 G^* \parallel H_1 F^*$$

Da aber $A_1 G$ und $A_1 G^*$ als Sehnen über einem Durchmesser rechtwinklig sind, so ist auch $H_1 F$ rechtwinklig zu $H_1 F^*$, und es ist daher

$$FF^* = \frac{r_1}{\sin^2 \alpha_1} = \varrho_1 ,$$

d. h. F^* ist der Krümmungsmittelpunkt für F und F der Krümmungsmittelpunkt für F^*. Wir schließen also auf den Satz:

Geht die Parameterachse durch den Mittelpunkt des Bildkreises und sind die Bildsehnen p die Tangenten des Bildkreises in den Endpunkten, so bestimmen sie zwei Paare developpabler Axoide für reines Rollen. Die Berührungskanten stehen aufeinander senkrecht, und jede von ihnen ist die Krümmungsachse der beiden sich oskulierenden Rückkehrkurven für das andere Paar von Axoiden.

§ 3. Konstruktive Bestimmung einiger Schraubenaxoide aus gegebenen Bedingungen.

Mit Hilfe der graphischen Darstellung sind wir imstande, die Summe oder Differenz zweier gegebener instantaner Schraubengeschwindigkeiten an den windschiefen Achsen o_1 und o_2 zu bilden; aber auch umgekehrt jede gegebene Schraubengeschwindigkeit in zwei Komponenten zu zerlegen. Jede derartige Aufgabe hängt mit der Bestimmung zweier Axoide für vorgeschriebene Bedingungen zusammen. Unter den zahlreich sich darbietenden Beispielen mögen im folgenden einige besonders herausgehoben werden.

Aufgabe 1. Eine gegebene Schraubengeschwindigkeit (g, h, ω) in zwei Komponenten von gegebenen Achsen zu zerlegen.

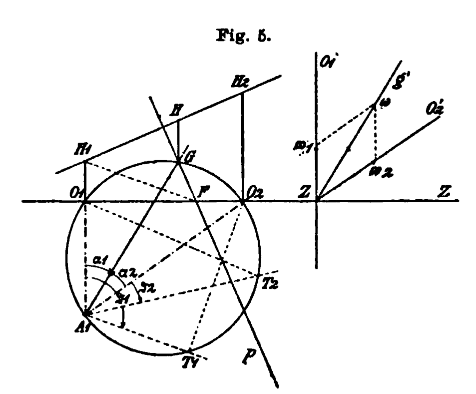


Fig. 5.

Es ist klar, daß die Achsen o_1 und o_2 mit g die nämliche Achse z normal treffen müssen. Sind also in Figur 5 O_1, O_2, F die Schnittpunkte derselben mit der Achse z, o_1', o_2', g' ihre Projektionen auf die Seitenebene, so gibt die Zerlegung von ω nach o_1' und o_2' sofort ω_1 und ω_2. Um jetzt noch die Windungsparameter h_1 und h_2 zu finden, ziehen wir o_1 durch O_1 parallel o_1', o_2 durch O_2 parallel o_2'. Schneiden sich o_1 und o_2 in A_1, so ist der Kreis durch $A_1 O_1 O_2$ der Bildkreis K unserer Darstellung. Legen wir also $A_1 G$ parallel g', so ist G das

Bild von g, und indem wir in der Vertikalen $GH = h$ machen und die Strecke nach oben auftragen, falls h positiv ist, gibt GF die Bildsehne p, somit die durch H gezogene Normale zu p die Parameterachse h, welche daher auf den Vertikalen in O_1 und O_2 die gesuchten Windungsparameter

$$h_1 = O_1H_1 \text{ und } h_2 = O_2H_2$$

abschneidet.

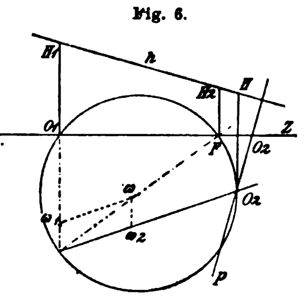
Es ist damit zugleich die Aufgabe gelöst:

Für zwei gegebene Achsen o_1 und o_2 diejenigen Schraubenaxoide zu finden, welche sich längs einer gegebenen Kante g berühren und längs dieser einen gegebenen Gleitparameter haben. Das Verhältnis ihrer Winkelgeschwindigkeiten ist $-\frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Zieht man noch A_1T_1 parallel H_1F, so ist T_1 das Bild der Tangente t_1 der Stricktionslinie; da p die Perspektivachse ist, so müssen sich O_2T_1 und O_1T_2 auf p schneiden, wodurch auch T_2 als Bild von t_2 bestimmt ist.

Aufgabe 2. Eine gegebene Schraubengeschwindigkeit (g, h, ω) in eine gegebene Komponente (o_1, h_1, ω_1) und eine unbekannte Komponente (o_2, h_2, ω_2) zu zerlegen.

In der Folge können wir die Seitenebenen entbehren, da durch die Bilder die betreffenden Normalen zur Achse z ihrer Richtung nach schon bestimmt sind. Sind (Fig. 6) O_1 und F die Fußpunkte der gegebenen Achsen o_1 und g in z und ist α_1 der von ihnen eingeschlossene bekannte Winkel, so ist dadurch der Bildkreis bestimmt. o_1 wird als vertikal angenommen. Trägt man in den Vertikalen durch O_1 und F die Windungsparameter h_1 und h mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen auf, so ist H_1H die Parameterachse h.



Zieht man jetzt A_1O_2' parallel $\overline{\omega_1\omega}$, so ist damit das Bild O_2' der gesuchten Achse, also auch α_2 gefunden und, indem man die Bildsehne p durch O_2' normal zur Parameterachse zieht, auch der Fußpunkt O_2 der Achse o_2 selbst bestimmt. Die durch O_2' gezogene Vertikale wird von der Parameterachse in H_2 derart geschnitten, daß $O_2'H_2$ der gesuchte Windungsparameter h_2 ist.

Die damit gelöste Aufgabe bezüglich der Schraubenaxoide liegt auf der Hand.

Aufgabe 3. Eine gegebene Schraubengeschwindigkeit (g, h, ω) in zwei Rotationsgeschwindigkeiten zu zerlegen, deren Achsen durch die gegebenen Punkte O_1 und O_2 gehen.

Da $h_1 = h_2 = 0$ sein soll, fällt in Figur 7 die Parameterachse h mit der Achse z zusammen, und es ist demnach die Bildsehne p vertikal.

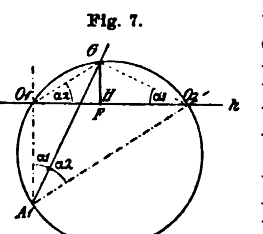


Fig. 7.

Macht man also $FG = h$, so ist der durch die drei Punkte O_1, O_2, G gelegte Kreis der Bildkreis, und es sind somit die Winkel α_1 und α_2, welche die Achse g mit o_1 und o_2 einschließt, bekannt. Der Kreis braucht nicht gezeichnet zu werden, da α_1 und α_2 schon bei O_1 und O_2 vorkommen.

Die Zeichnung löst auch die Aufgabe, die Kehlkreisradien r_1 und r_2 zweier Hyperboloide zu konstruieren, deren Achsen o_1 und o_2 gegeben sind, und für welche das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten bekannt ist. Indem man g parallel $\overline{\omega_1 \omega_2}$ zieht, erhält man den Bildpunkt G und durch sein Lot auf die Achse z den Fußpunkt F, also die Radien $O_1F = r_1$ und $O_2F = r_2$. Die Strecke $GF = h$ ist dann der Gleitparameter der Bewegung. Man bemerkt, daß dieser nur in den extremen Fällen verschwinden kann, wo G mit O_1 oder O_2 zusammenfällt.

Aufgabe 4. Die auf einem Hyperboloid H_1 von gegebener Achse o_1 und gegebenem Kehlkreisradius r_1 abwickelbare Schraubenfläche S_1 von gegebener Achse o_2 zu finden.

Gegeben sind in Figur 8, die drei Fußqunkte O_1, O_2, F, wobei $O_1F = r_1$ der Kehlkreisradius ist; ferner der Achsenwinkel 2β, also der Bildkreis. Weil $h_1 = 0$ ist, geht die Parameterachse h durch O_1; weil $h = 0$ ist, muß sie sich mit der Bildsehne p durch F auf dem Bildkreis in G rechtwinklig schneiden. Schlägt man also über O_1F als Durchmesser einen Halbkreis, so schneidet er den Bildpunkt G der Berührungskante g aus dem Bildkreis heraus. Damit sind die Winkel α_1 und α_2, aber auch die Parameterachse O_1G und damit der Windungsparameter $O_2H_2 = h_2$ der Schraubenfläche bestimmt. Er ist in der Zeichnung der Figur 8 positiv.

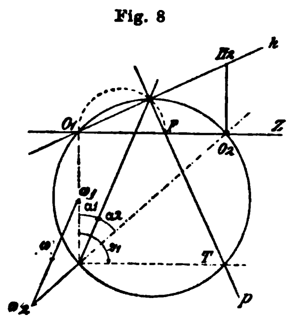


Fig. 8

Der zweite Schnittpunkt T der Bildsehne mit dem Bildkreis ist das Bild der beiden vereinigten Tangenten der Striktionslinien in F. Da nach Konstruktion T der Diametralpunkt von O_1 ist, so ist der Neigungswinkel $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ wie es sein muß, da beim Hyperboloid H_1 die Striktionslinie vom Kehlkreis gebildet wird.

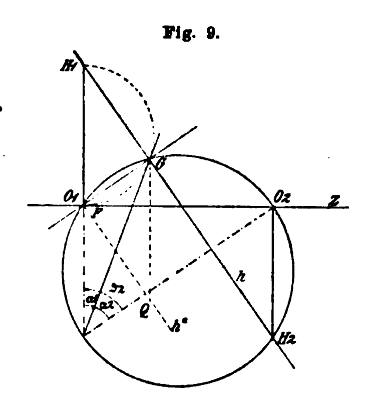
Stehen die Achsen auf einander normal, so fällt G mit O_1 und

die Parameterachse h mit o_1 zusammen. Das Hyperboloid geht in eine Zylinderfläche und wegen $h_2 = \infty$ die Schraubenfläche in eine Tangentenebene des Zylinders über.

Aufgabe 5. Zu einer geschlossenen, scharfgängigen Schraubenregelfläche S_1 an der Achse o_1 die auf ihr abwickelbare Schraubenfläche S_2 an der Ache o_2 zu finden.

Bekannt ist in Fig. 9, der Bildkreis, und da S_1 eine geschlossene Fläche sein soll, ist $r_1 = 0$, also F in O_1; $r_2 = O_2 O_1 = -2a$. Wegen $h = 0$ schneiden sich die Parameterachse und die Bildsehne auf dem Bildkreis rechtwinklig. Ist also $O_1 H_1 = h_1$ der gegebene Windungsparameter von S_1, so liegt G auf dem über $O_1 H_1$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreis. $H_1 G$ ist also die Parameterachse, welche den Windungsparameter $O_2 H_2 = h_2$ von S_2 abschneidet, wodurch diese Fläche vollkommen bestimmt ist, da die Erzeugende g mit den Achsen bekannte Winkel α_1 und α_2 einschließt. Der zweite Schnittpunkt T der Bildsehne mit dem Bildkreis fällt nach O_1, es ist also die Achse o_1 die gemeinsame Tangente der beiden Striktionslinien und zugleich die Striktionslinie von S_1 selbst, auf welcher die zweite Striktionslinie ohne Gleitung abrollt. Ist G^* der zweite Schnittpunkt der Parameterachse mit dem Bildkreis, so ist $O_1 G^*$ ein Durchmesser, die konjugierte Parameterachse h^* geht also durch O_1 und schneidet somit auf der Vertikalen durch G den Verteilungsparameter q der Axoide ab.

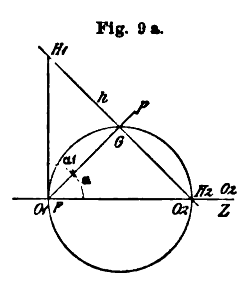
Fig. 9.



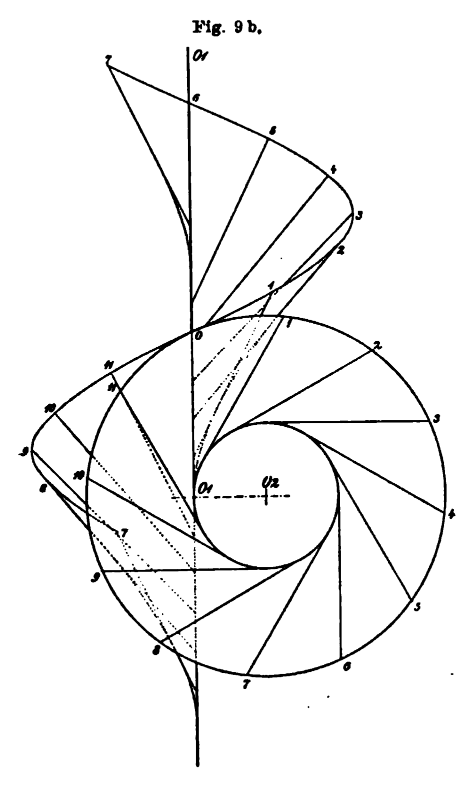
Diese Strecke q ist entgegengesetzt gleich mit h_1, was auch ohne weiteres aus der Gleichung (18) für $r_1 = 0$ folgt.

Werden wie in Fig. 9a die Achsen o_1 und o_2 zu einander rechtwinklig, so geht die Parameterachse h durch O_2; es ist also $h_2 = 0$, d. h. die Schraubenfläche an o_2 geht über in ein Hyperboloid H_2, und die Konstruktion zeigt, daß, wenn umgekehrt $h_2 = 0$ sein soll, die Achsen o_1 und o_2 aufeinander rechtwinklig stehen. Die Fig. 9b S. 70 zeigt den ausgeführten Aufriß beider Biegungsflächen unter Zugrundelegung der halben Dimensionen der Fig. 9a und mit $\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$. Die Flächen drehen sich also mit entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten, und es gelangen gleichbezeichnete Erzeugende einmal zur Deckung.

Fig. 9a.



Aufgabe 7. Zwei auf einander abwickelbare developpable Schraubenflächen an den Achsen o_1 und o_2 zu konstruieren, wenn das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten gegeben ist.


Fig. 9b.

Auf dem bekannten Bildkreis in Fig. 10, ist G bestimmt durch die Parallele $A_1 G$ zu $\overline{\omega_1 \omega_2}$. Der durch G gehende Durchmesser ist die Parameterachse; sie ergibt die reduzierten Ganghöhen h_1 und h_2 der Rückkehrschraubenlinien der Developpabeln D_1 und D_2. Die Tangente in G ist die Bildsehne p; sie bestimmt die Radien $O_1 F = r_1$ und $O_2 F = r_2$ der Schraubenlinien, während die Tangente p^* im zweiten Schnittpunkt G^* den Krümmungsmittelpunkt F^* der beiden sich in F oskulierenden Schraubenlinien liefert.

Die Berührung kann nie zwischen O_1 und O_2 stattfinden, was übrigens auch die Gleichung (30) aussagt. Falls statt der Werte von ω_1 und ω_2 die Radien r_1 und r_2 gegeben sind, finden entsprechend den beiden Tangenten p und p' aus F an den Bildkreis zwei Lösungen statt. Die Berührungskanten g und g' sind im Ebenenbüschel durch die Achse z von den Achsen o_1 und o_2 harmonisch getrennt und gehören zu entgegengesetzt gleichen Verhältnissen der Winkelgeschwindigkeiten.

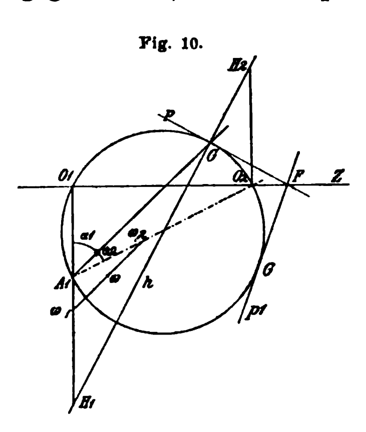
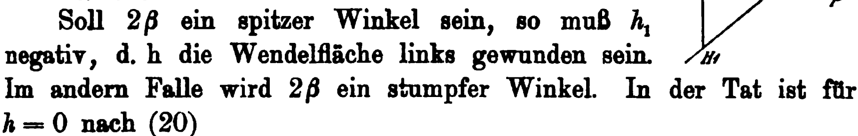


Fig. 10.

Aufgabe 8. Die zu einer geschlossenen, flachgängigen Schraubenfläche (Wendelfläche) gehörige Biegungsfläche zu konstruieren.

Wegen $r_1 = 0$ fällt in Fig. 11, F nach O_1, wegen $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, G nach dem Diametralpunkt des Bildkreises, den wir vorläufig als gegeben be-

trachten. Es ist also jetzt die Bildsehne p ein Durchmesser, und falls die gesuchte Fläche eine Biegungsfläche der Wendelfläche ist, geht die Parameterachse h durch G und ist Tangente an den Bildkreis. Es ist also $O_1 H_1 = h_1$ und $O_2 H_2 = O_2 G = h_2$. Ist aber umgekehrt h_1 gegeben, so muß G auf dem über $O_1 H_1$ errichteten Halbkreis liegen, und man bemerkt, daß von der Achse o_2 nur der Fußpunkt O_2 (zwei Lösungen) oder nur der Achsenwinkel 2β (eine Lösung) gegeben werden darf.



Soll 2β ein spitzer Winkel sein, so muß h_1 negativ, d. h die Wendelfläche links gewunden sein. Im andern Falle wird 2β ein stumpfer Winkel. In der Tat ist für $h = 0$ nach (20)

$$h_1 + h_2 + 2a \operatorname{cotg} 2\beta = -q,$$

aber wegen $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - 2\beta$, $r_1 = 0$, $r_2 = -2a$

$$-q = r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 + h_2 = -2a \operatorname{tg} 2\beta + h_2.$$

Daraus folgt:

$$\sin 4\beta = -\frac{a}{h_1},$$

sodaß $2\beta > \frac{\pi}{2}$ wird, falls h_1 positiv ist.

Wird die Parameterachse durch O_2 gelegt, so entsteht ein nicht abwickelbares Hyperboloid, geht sie durch O_1, so degeneriert die Wendelfläche in eine ebene Kreisscheibe, und die entsprechende Schraubenfläche wird developpabel. In allen bisherigen Aufgaben kann die Lage der Achse o_2, falls o_1 fest ist, auf endlich viele Arten gewählt werden. Den geometrischen Ort dieser Achsen werden wir bald hervortreten sehen.

§ 4. Das Zylindroid, seine Axoidscharen und Normalenparaboloide.

a. Das Zylindroid.

Liegen die beiden Schrauben (o_1, h_1) und (o_2, h_2) vor, und läßt man das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 alle möglichen Werte durchlaufen, so durchläuft das Bild $\mathfrak{G}$ der resultierenden Achse g den ganzen Bildkreis, während die Bildsehne p sich stets normal zur Parameterachse, also parallel zu sich selbst verschiebt. Die Gesamtheit aller Achsen g erfüllt daher eine Achsenfläche, die durch die Differenz $2h_0$ der Windungsparameter h_1 und h_2 allein vollständig bestimmt ist und mit $\mathfrak{G}_{h_0}$ bezeichnet werden mag.

Beziehen wir zunächst die Lage der Achse g auf das Mittelpunktssystem $M(x, y, z)$, indem wir setzen

$$\alpha_1 = \alpha + \beta, \quad \alpha_2 = \alpha - \beta, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta,$$

so ergibt die Gleichung (8)

$$(32) \qquad \varrho \sin 2\beta = a \sin 2\alpha + h_0(\cos 2\alpha - \cos 2\beta).$$

Unter den parallelen Bildsehnen p gibt es aber eine, welche durch den Mittelpunkt des Bildkreises geht. Ihr entsprechen zwei zu einander rechtwinklige Erzeugende e und f, welche durch den Fußpunkt F_0 in der Bildsehne gehen. Machen wir e und f zu Achsen x' und y' eines neuen Koordinatensystems, so ist zu setzen

$$(33) \qquad \varrho' = \varrho + h \operatorname{cotg} 2\beta, \quad \alpha' = \alpha + \varepsilon,$$

wo α' den Winkel von g gegen x' bedeutet und 2ε der Winkel von p gegen die alte Achse x ist, sodaß die Gleichung besteht

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{h_0}{a}.$$

Die Gleichung (32) ergibt jetzt:

$$(34) \qquad \varrho' = \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \sin(2\alpha').$$

Setzt man demnach $\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y'}{x'}$, so erhält man als Gleichung der Fläche $\mathfrak{G}_{h_0}$

$$(35) \qquad z = \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \frac{x' y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Dies ist aber in der Ausdrucksweise von Cayley bekanntlich die Gleichung des *Zylindroids.* Den Punkt F_0 nennt man den Mittelpunkt, die Erzeugenden e und f die Hauptachsen, die durch die Tangenten p an den Bildkreis bestimmten äußersten Fußpunkte sind Kuspidalpunkte C, die durch sie gehenden Kanten Torsalkanten t der Fläche $\mathfrak{G}_{h_0}$. Alle diese Elemente werden durch den Bildkreis sofort geliefert, und es ist auch sehr einfach, eine konstruktive Darstellung der Fläche zu erhalten.

Da nach der Gleichung (35) alle Zylindroide ähnlich sind, so genügt es, dasjenige Zylindroid zu zeichnen[1]), für welches $h_1 = h_2 = 0$ ist, welches also aus einem Büschel vertikaler Bildsehnen entspringt. Wird also der Bildkreis der Fig. 12a in die Ebene xy — die Bildebene für eine schiefe Parallelprojektion — gebracht, so trifft jede Sehne p den Kreis in $\mathfrak{G}$ und L und die Sehne $O_1 O_2$ in F. Trägt man

1) Das Bild eines Modells, welches schon der früheren Ausgabe beigegeben ist, findet sich in der Ausgabe 1900 von Sir R. Ball auf Seite 151.

also in Fig. 12 die Distanz (x, p) in der Achse z von M aus in einem beliebigen Maßstabe, am einfachsten in wahrer Größe auf — nach vorn, wenn p links von M liegt — und zieht man durch den so erhaltenen Punkt Parallelen zu OG und OL, so erhält man je zwei Erzeugende des Zylindroids.

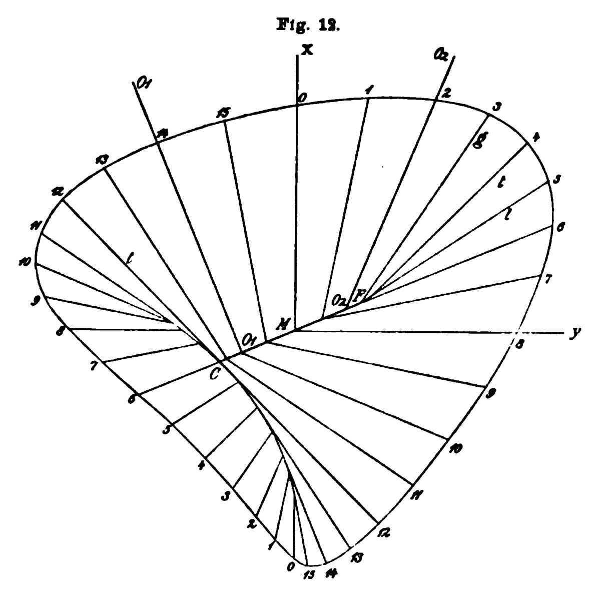


Fig. 12.

Will man die Fläche durch einen Rotationszylinder begrenzen, so hat man allen Erzeugenden von der Ache z aus dieselbe wahre Länge zu geben. Die Begrenzungskurve ist eine Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, während der Umriß eine Steinersche Hypozykloide ist. Das letztere folgt aus dem Umstande, daß außer dem Schnitt mit der Ebene xy die unendlich ferne Ebene noch zwei weitere Erzeugende enthält, nämlich die beiden Tangenten des imaginären Kugelkreises, die sich auf der Achse z schneiden, wie die Erzeugung aus dem Bildkreis zeigt.

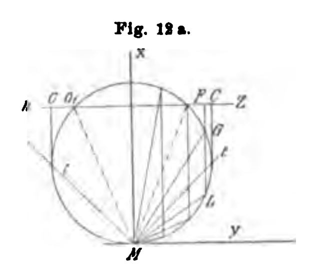


Fig. 12a.

Indem wir jetzt die Differenz $h_2 - h_1 = 2h_0$ variieren lassen, nimmt das Parallelbüschel p alle möglichen Richtungen an, und wir erhalten eine ganze Schar von Zylindroiden, die alle aus demselben Bildkreis entstehen. Außer den drei unendlich fernen Geraden und der Doppelkante z, haben sie alle noch die Achsen o_1 und o_2 gemeinsam. Sie bilden also ein Büschel von Regelflächen dritter Ordnung. Daraus folgt:

Zwei windschiefe Achsen o_1 und o_2 bestimmen eindeutig ein Zylindroidbüschel.

Sind jedoch auf den Achsen o_1 und o_2 die Windungsparameter h_1 und h_2 gegeben, so ist die Richtung der Bildsehnen und damit ein bestimmtes Zylindroid festgelegt. Die Bildsehne p ist aber auch bestimmt, falls außer den Achsen o_1 und o_2 eine beliebige dritte Achse g durch ihren Bildpunkt G und ihren Fußpunkt F gegeben ist, d. h.:

Zwei Schrauben oder drei beliebige Achsen o_1, o_2, g bestimmen das Zylindroid eindeutig.

Liegt ein bestimmtes Zylindroid vor, so kann jede das Parallelbüschel der Bildsehnen rechtwinklig schneidende Gerade als Parameterachse aufgefaßt werden. Jede dieser Parameterachsen erteilt jeder Erzeugenden des Zylindroids einen bestimmten Parameter h. Eine solche Zuordnung nennt man eine Parameterverteilung. Aus einer gegebenen Parameterverteilung erhält man jede andere, indem man die Parameterachse parallel verschiebt, d. h. jeden Parameter um dieselbe Strecke zunehmen oder abnehmen läßt. Durch den Parameter h wird aus jeder Erzeugenden des Zylindroids eine Schraube, die Parameter der Hauptachsen haben den kleinsten resp. den größten Wert; sie bestimmen die Hauptschrauben des Zylindroids, und man kann aus ihren Werten leicht den Parameter irgend einer Achse des Zylindroids ableiten.

Bezieht man nämlich das Zylindroid auf seine Hauptachsen, und setzt man wie früher:

$$\frac{h_1 + h_2}{2} + a \operatorname{cotg} 2\beta = \varkappa,$$

so wird der Parameter h derjenigen Erzeugenden, welche den Winkel α' gegen die Achse x' einschließt, nach (7)

$$h = \varkappa - \frac{\sqrt{a_*^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha'. \tag{37}$$

Der kleinste Parameter ist also

$$H_1 = \varkappa - \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \tag{38}$$

und der größte:

$$H_2 = \varkappa + \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta}. \tag{39}$$

Somit wird

$$h = H_1 \cos^2 \alpha' + H_2 \sin^2 \alpha'. \tag{40}$$

Dies ist die Ballsche Darstellung der Parameterverteilung, und man bemerkt, daß die von den Endpunkten der Parameterstrecken auf dem Zylindroid gebildete sogenannte *Parameterkurve* $\mathfrak{P}$ in der Ebene $(x'y')$ die Projektion besitzt:

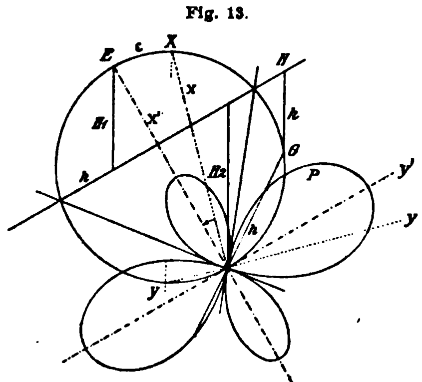
$$(x'^2 + y'^2)^3 - (H_1 x'^2 + H_2 y'^2)^2 = 0. \tag{40}$$

Die Parameterkurven sind also sowohl in der Projektion als auf dem Zylindroid selbst unikursale Kurven 6. Ordnung. Ihre Projektionen auf die Ebene $(x'y')$ werden sofort aus der Darstellung erhalten, indem man wie in Fig. 13, auf jedem durch O' gezogenen Strahl die ent-

sprechende Strecke $h = GH$ direkt nach beiden Seiten von O' aus aufträgt.

Für $h_1 = h_2$ wird die Parameterachse horizontal und die Konstruktion gibt direkt die von Lewis zuerst gegebene Darstellung der Parameter eines Zylindroids. Geht die Parameterachse durch den Mittelpunkt des Bildkreises, so ist

Fig. 13.



$$\varkappa = 0,$$

(42)
$$\text{also } H_0 = -\frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha',$$

die Hauptparameter sind entgegengesetzt gleich und die Parameterkurve $\mathfrak{P}_0$ ist symmetrisch zu den Hauptachsen und Winkelhalbierenden.

Trägt man jetzt auch die Verteilungsparameter q auf den Erzeugenden vom Fußpunkt aus auf, so folgt aus (20)

(43)
$$q = h - 2\varkappa = -\varkappa - \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha'$$

oder

(44)
$$q = H_0 - \varkappa, \quad \text{d. h.}$$

Die Kurve $\mathfrak{Q}$ der Verteilungsparameter ist ebenfalls eine Kurve $\mathfrak{P}$, und zwar diejenige Kurve $\mathfrak{P}^*$, die zur konjugierten Parameterachse h^* gehört, somit aus $\mathfrak{P}_0$ durch Verkürzung der Radien um den halben Abstand beider Parameterachsen entsteht.

Endlich besitzt das Zylindroid $\mathfrak{G}_{h_0}$ selbst längs jeder seiner Erzeugenden einen Verteilungsparameter g. Schreibt man die Gleichung der Fläche bezogen auf die Hauptachsen in der Form (34)

$$\varrho' = \frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \sin 2\alpha',$$

so ist dieser Parameter

(45)
$$g = -\frac{d\varrho'}{d\alpha'} = -2\frac{\sqrt{a^2 + h_0^2}}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha' = 2H_0.$$

Die Parameterkurve $\mathfrak{G}$ des Zylindroids entsteht also aus der symmetrischen Kurve $\mathfrak{P}_0$ durch Verdoppelung aller Radienvektoren.

Den Schnittpunkten C und C' jeder Parameterachse mit dem Bildkreis entsprechen auf dem Zylindroid zwei Achsen c und c' mit dem Parameter Null, also zwei Nullschrauben. Sie liegen symmetrisch zum

Mittelpunkt F_0, und ihre Richtungen sind von den Richtungen der Hauptschrauben harmonisch getrennt. In der Schraubentheorie heißen c und c' *konjugierte* Schrauben. Wird die Parameterachse parallel verschoben, so erhalten c und c' gleichen Parameter und es tritt ein neues Paar von Nullschrauben auf.

Durch die konjugierten Schrauben werden also die Achsen des Zylindroids mit gleichem Parameter involutorisch gepaart; die Hauptschrauben bilden die Doppelelemente dieser geschaarten Involution.

b) Die Axoidscharen und Normalenparaboloide.

Auf dem Zylindroid $\mathfrak{G}_{h\omega}$ sei eine bestimmte Parameterverteilung durch die Parameterachse festgelegt. Es seien a und a' zwei Schrauben des Zylindroids, h und h' ihre Windungsparameter. Wir erteilen ihnen die Winkelgeschwindigkeiten ω und ω'. Zerlegen wir diese Schraubengeschwindigkeiten nach den Achsen o_1 und o_2, so mögen die Komponenten ω_1, ω_1' an der Schraube (o_1, h_1) und ω_2, ω_2' an der Schraube (o_2, h_2) entstehen. Bilden wir jetzt an jeder Achse die Differenz ihrer Komponenten, so erhalten wir an der Schraube (o_1, h_1) die Schraubengeschwindigkeit $\omega_1 - \omega_1'$ und an der Schraube (o_2, h_2) die Schraubengeschwindigkeit $\omega_2 - \omega_2'$. Offenbar ist die Summe dieser neuen Schraubengeschwindigkeiten die Schraubengeschwindigkeit $\omega - \omega'$, die somit zu derjenigen Schraube (g, h) des Zylindroids gehört, deren Achse der Verbindungsstrecke $\overline{\omega\omega'}$ parallel läuft. Da man ω und ω' stets so wählen kann, daß die Achse g jede beliebige Erzeugende des Zylindroids sein kann, so ergibt sich das Resultat:

Legt man durch eine beliebige Achse g des Zylindroids diejenigen Schraubenflächen S *und* S′, *welche zu den Schrauben an zwei beliebigen Achsen a und a' des Zylindroids gehören, so bilden sie ein Paar von Schraubenaxoiden für zwei Winkelgeschwindigkeiten ω und ω', deren Verbindungsstrecke $\overline{\omega\omega'}$ der Achse g parallel läuft.*

Halten wir die Schraube g fest, indessen a und a' das Zylindroid durchlaufen, so erhalten wir lauter Schraubenaxoide, die sich längs g berühren. Eine solche einfache Mannigfaltigkeit möge eine *Axoidschar* und g ihr *Träger* heißen.

Bei gegebener Parameterverteilung ist jede Erzeugende g des Zylindroids Träger einer Axoidschar, deren Achsen das Zylindroid erfüllen.

Unter den Flächen der Schar figurieren auch die Schraubenflächen S_1 und S_2 an den Achsen o_1 und o_2. Da der Gleitparameter h an der Achse g für alle Flächen der Schar derselbe ist, so folgt:

Die beiden Schraubenaxoide S_1 *und* S_2 *schroten mit allen Schraubenflächen der durch sie bestimmten Axoidschar. Die Schar enthält entweder keine oder nur Biegungsaxoide, je nachdem* S_1 *und* S_2 *mit oder ohne Gleitung rollen.*

Halten wir die Fläche S_1, welche zur Schraube (o_1, h_1) gehört, fest, und ist h der Windungsparameter des Trägers g, so können wir den vorigen Satz auch so aussprechen:

Besitzt ein Axoid S_1, *das selbst zur Schraube* (o_1, h_1) *gehört, längs der Kante* g *den Gleitparameter* h, *so ist der Ort der Achsen aller entsprechenden Axoide seiner Schar, das durch die Schrauben* (o_1, h_1) *und* (g, h) *bestimmte Zylindroid.*

Eine Axoidschar enthält im allgemeinen zwei Hyperboloide, die zu den konjugierten Achsen c und c' gehören; sie besteht aus lauter Biegungsflächen, falls der Träger mit c oder c' zusammenfällt, und aus lauter developpablen Flächen, falls der Träger mit einer der beiden Achsen d oder d' koinzidiert, die sich mit c und c' auf der Achse z schneiden.

Das Zylindroid allein ohne Parameterverteilung bestimmt eine zweifache Mannigfaltigkeit von Axoidscharen. Jede Achse desselben ist Träger von unendlich vielen Scharen; darunter ist stets eine Schar von Biegungsflächen und eine Schar developpabler Axoide. Die beiden Torsalkanten des Zylindroids dagegen sind Träger von je einer Schar developpabler und aufeinander abwickelbarer Axoide. Die Striktionslinien derselben oskulieren sich sämtlich im Kuspidalpunkt der Torsalkante, während der andere Kuspidalpunkt der Mittelpunkt des gemeinsamen Krümmungskreises ist.

Liegen daher zwei Kreise, von denen jeder durch den Mittelpunkt des andern geht in zwei zueinander senkrechten Ebenen, so bestimmen ihre Achsen als Torsalkanten ein Zylindroid, welches der Ort der Achsen aller Schraubenlinien ist, die jeden der beiden Kreise im Mittelpunkt des anderen oskulieren.

Auch die zweifach unendlich vielen Hyperboloide aller Scharen lassen sich übersichtlich gruppieren. Da man die Parameterverteilung stets so wählen kann, daß ein gegebenes Paar konjugierter Achsen den Parameter Null erhält, so bestimmt jede Erzeugende g des Zylindroids mit jedem Paar konjugierter Geraden als Achsen ein System von Axoiden, welches aus lauter Hyperboloiden besteht. Solcher Systeme, welche aber keine Scharen sind, gibt es einfach unendlich viele.

Da die Individuen jeder Axoidschar sich längs des Trägers g berühren, so gehört zu jeder Axoidschar ein eindeutig bestimmtes längs g gemeinschaftliches Normalenparaboloid P_g. Dasselbe besitzt

die Achse z und den Träger g zu geradlinigen Striktionslinien. Da die Schar zwei Hyperboloide enthält, deren Achsen mit dem Paar konjugierter Geraden c und c' koinzidieren, so folgt, daß diejenigen Erzeugenden n des Paraboloids, welche g rechtwinklig schneiden, auch c und c' treffen müssen. Daraus folgt der Satz:

Entsprechend den zweifach unendlich vielen Axoidscharen sind mit einem Zylindroid zweifach unendlich viele Normalenparaboloide verbunden, von welchen jedes durch irgend eine Erzeugende g als Striktionslinie und irgend ein Paar konjugierter Geraden des Zylindroids bestimmt ist.

Den unendlich vielen Axoidscharen am Träger g entsprechen die Normalenparaboloide von g nach allen Paaren konjugierter Geraden; einer bestimmten Parameterverteilung des Zylindroids entsprechen dagegen die Paraboloide durch ein bestimmtes Paar konjugierter Achsen nach allen Erzeugenden g des Zylindroids. In beiden Fällen bilden die Paraboloide ein Büschel.

Das Zylindroid ist also unendlich oft der Ort der Striktionslinien aller Paraboloide eines Büschels, welches je durch zwei konjugierte Geraden, die Achse z und die endlich ferne reelle Gerade des Zylindroids bestimmt ist.

Fällt der Träger g mit c oder c' zusammen, so berührt das Paraboloid P_g das Zylindroid längs g; andrerseits besteht die zugehörige Axoidschar aus Biegungsaxoiden. Daraus folgt:

Jedes Zylindroid ist die Enveloppe einer einfach unendlichen Schar von Normalenparaboloiden und eine Orthogonalfläche aller Axoidscharen, welche aus Biegungsaxoiden bestehen.

Diesem Satze kann man auch die folgende Form geben:

Fällt man von allen Punkten einer Erzeugenden c des Zylindroids die Lote auf die konjugierte Erzeugende c', so erfüllen diese ein das Zylindroid längs c' berührendes Paraboloid.

Für die Hauptschrauben fällt die Achse c mit der konjugierten c' zusammen; ist g eine beliebige Erzeugende des Zylindroids, so berührt das Paraboloid P_g das Zylindroid längs der Hauptschraube, fällt g mit der Hauptschraube selbst zusammen, so findet Oskulation statt, d. h.

Fällt man von allen Punkten einer Hauptachse des Zylindroids auf eine Erzeugende g derselben die Lote, so erhält man jedesmal ein Paraboloid P_g, welches das Zylindroid längs der Hauptachse berührt. Dasjenige Paraboloid, dessen Erzeugende auf der Hauptachse selbst normal stehen, ist das Schmiegungsparaboloid des Zylindroids.

§ 5. Die Zykloidenverzahnung der Hyperboloidräder.

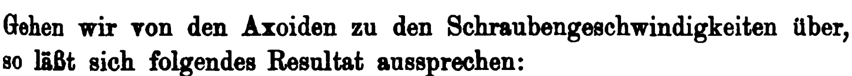
Nach dem Vorausgegangenen bestimmt jedes Schraubenpaar $(o_1 h_1)$ und $(o_2 h_2)$ für ein gegebenes Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten ω_1

und ω_2 zwei bestimmte korrespondierende Schraubenaxoide S_1 und S_2, die sich längs einer Erzeugenden g berühren und zugleich eine einfach unendliche Anzahl weiterer Schraubenflächen S, welche die durch den Träger g bestimmte Axoidschar bilden und deren Achsen a das durch die Schrauben (o_1, h_1) und (o_2, h_2) bestimmte Zylindroid erfüllen. Diese Axoidschar S kann dazu benutzt werden, um zu einer geometrisch exakten Verzahnung der Grundkörper S_1 und S_2 zu gelangen, also im Falle diese Hyperboloide sind, eine der Zykloidenverzahnung der Stirnräder oder der Kegelräder analoge Verzahnung von Hyperboloidrädern zu erhalten.

Es sei S irgend ein Axoid der Schar, (a, H) seine Schraube, Ω seine Winkelgeschwindigkeit. Damit S gleichzeitig auf S_1 und S_2 abschrotet, müssen in Fig. 14, die Endpunkte der drei Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 und Ω in einer Parallelen γ zu g gelegen sein, welche überhaupt für jede Achse a die Größe der zugehörigen Winkelgeschwindigkeit Ω bestimmt. Sind also Ω_1 und Ω_2 die relativen Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen S auf S_1 und S_2 rollt, so ist Ω_1 dargestellt nach Größe und Sinn durch die Strecke $\omega_1 \Omega$ und Ω_2 durch die Strecke $\omega_2 \Omega$. Es ist also

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \omega_2 - \omega_1 = \omega.$$

Fig. 14.



Gehen wir von den Axoiden zu den Schraubengeschwindigkeiten über, so läßt sich folgendes Resultat aussprechen:

Bildet man die Differenz der Schraubengeschwindigkeit Ω an der Schraube (a, H) einerseits mit ω_1 an der Schraube (o_1, h_1), anderseits mit ω_2 an der Schraube (o_2, h_2), so erhält man zwei Schraubengeschwindigkeiten Ω_1 und Ω_2, die zur nämlichen Schraube (g, h) gehören.

Es mögen jetzt die Achsen o_1, o_2 und a in einem ruhenden Raume Σ_0 gelegen sein, mit o_1 sei ein Raum Σ_1, mit o_2 ein Raum Σ_2 fest verbunden. Es sei l irgend eine Erzeugende der Fläche S[1]), so erhält l im Raume Σ_0 durch Verschraubung der Fläche S um a die absolute Geschwindigkeit Ω. Durch die Schraubenbewegung von S wird aber an der Achse o_1 eine Schraubenbewegung der Fläche S_1, also auch des Raumes Σ_1 hervorgerufen, welche der Geraden l die Führungsgeschwindigkeit ω_1 erteilt. Infolgedessen muß sich l relativ in Σ_1 mit

1) Es kann auch an Stelle von l eine beliebige Gerade, eine Raumkurve, oder selbst eine Fläche treten.

einer Geschwindigkeit bewegen gleich der Differenz der absoluten und der Führungsgeschwindigkeit, d. h. mit der Geschwindigkeit Ω_1.

In analoger Weise bringt die Schraubung von S an der Achse o_2 die Geschwindigkeit ω_2 des Raumes Σ_2 hervor, welche l die Führungsgeschwindigkeit ω_2 erteilt. Relativ zum System Σ_2 besitzt demnach l eine Geschwindigkeit gleich der Differenz der absoluten und der Führungsgeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit Ω_2.

Nach obigem Satze gehören aber Ω_1 und Ω_2 beide zur Schraube (g, h). Infolgedessen beschreibt l in Σ_1 und Σ_2 momentan zwei unendlich schmale windschiefe Flächenelemente, die der nämlichen Schraubenfläche angehören, sich also längs der ganzen Erstreckung von l berühren. Läßt man also den Bewegungsvorgang während einer endlichen Zeit bestehen, so wird l relativ in den Räumen Σ_1 und Σ_2 zwei Flächen Z_1 und Z_2 erzeugen, die in jedem Momente der Bewegung sich längs der gemeinsamen Erzeugenden berühren. Infolge der Verschiedenheit der Winkelgeschwindigkeiten Ω_1 und Ω_2 erhält jeder Punkt von l momentan gleichgerichtete, aber verschiedene Geschwindigkeiten, sodaß die Flächen Z_1 und Z_2 schief zur Berührungskante über einander weggleiten. Da l stets eine feste Erzeugende der Fläche S bleibt und S beständig auf S_1 und S_2 schrotet, so können die Flächen Z_1 und Z_2 auch erhalten werden, indem man die Fläche S längs der festgehaltenen Grundflächen S_1 und S_2 abschroten läßt. Dreht sich S_1 um o_1, so wird durch die stete Berührung von Z_1 mit Z_2 auch die Fläche S_2 an o_2 in Bewegung gesetzt; demnach sind Z_1 und Z_2 zwei entsprechende Zahnflanken für eine sogenannte Kraftverzahnung. Fällt l in der Anfangslage mit g zusammen, so entstehen zwei Zahnflanken, die man als Hypozykloiden- und Epizykloidenflächen bezeichnen kann. Wir erhalten also zunächst das Resultat:

Entsprechende Zahnflanken Z_1 und Z_2 zweier Schraubenaxoide oder Hyperboloide müssen in jedem Augenblicke der Bewegung längs der Berührungslinie l von derjenigen Schraubenfläche berührt werden, die zu der Schraube an der momentanen Berührungskante der Axoide gehört. Das Normalenparaboloid dieser Schraubenfläche enthält also die Angriffslinien aller Pressungen, die längs l von der einen Zahnflanke auf die andere ausgeübt werden.

Die Schraubenfläche S hat in Analogie mit der Zykloidenverzahnung der Stirnräder eine doppelte Bedeutung. Im festen Raume Σ_0 enthält sie die aufeinanderfolgenden Lagen der momentanen Berührungslinie l beider Zahnflanken; sie kann also als die *Eingriffsfläche* der Verzahnung bezeichnet werden. Andererseits erzeugt sie durch Abschroten auf den Grundflächen die Zahnflanken; sie ist also zugleich die Rollfläche oder

Wälzungsfläche der Verzahnung. Es ist dies eine charakteristische Eigentümlichkeit dieser einfachsten Art der Verzahnung; denn es können unendlich viele Eingriffsflächen angegeben werden, welche nicht mit der Wälzungsfläche identisch sind.

Die Fläche S erzeugt aber nur die eine Hälfte jeder Zahnflanke; die andere Hälfte wird erzeugt durch eine passend gewählte zweite Fläche S′ der Axoidschar, deren Achse im allgemeinen auf der anderen Seite der Berührungskante g liegen wird. Zu jeder Zahnflanke gehört dann als Eingriffsfläche eine Kombination zweier Stücke der Flächen S und S′, die in g kontinuierlich mit einer Wendekante in einander übergehen. Es ergibt sich also das Resultat:

Sind S_1 *und* S_2 *zwei gegebene Schraubenaxoide oder Hyperboloide, so kann als Eingriffsfläche jedes passend gewählte Schraubenflächenpaar* S *und* S′ *benutzt werden, das der Axoidschar angehört, welche durch den Träger* g *bestimmt wird. Schroten die Flächen* S *und* S′ *als Wälzungsflächen auf den Grundflächen ab, so erzeugen sie die zur Eingriffsfläche gehörenden Zahnflanken* Z_1 *und* Z_2.

Wenn die konjugierten Geraden c und c' des Zylindroids reell sind, so existieren unter den Flächen S zwei Hyperboloide, die möglicherweise als Wälzungsflächen benutzt werden können. Sind dagegen beide Grundkörper schon hyperboloidisch, so sind sämtliche Flächen S Schraubenflächen. Da ferner die Flächen S nur dann ohne Gleiten auf S_1 und S_2 rollen, wenn g selbst eine Nullschraube ist, also wenn S_1 und S_2 selbst Biegungsflächen sind, was bei zwei Hyperboloiden niemals möglich ist, so ergibt sich folgender Satz:

Sollen zwei Hyperboloide verzahnt werden, so kann als Eingriffsfläche und gleichzeitig als Wälzungsfläche jedes Paar von Schraubenflächen S *und* S′ *gewählt werden, das der Axoidschar vom Träger* g *angehört. Diese Flächen sind niemals auf den Grundhyperboloiden abwickelbar, und es kann niemals eintreten, daß die Eingriffs- und Wälzungsfläche selbst ein Hyperboloid ist.*

Dieses Resultat ist nicht ohne Interesse; denn es liegt nahe, in Analogie mit den Stirnrädern und Kegelrädern die Wälzungsfläche unter den unendlich vielen Hyperboloiden zu suchen, welche beide Grundkörper längs g berühren und deren Achsen das durch die drei Geraden o_1, o_2 und g bestimmte Normalenparaboloid erfüllen. Ist o die Achse eines solchen Hyperboloids, so bestimmt sie mit o_1 und g ein Zylindroid $\mathfrak{G}_1$, mit o_2 und g ein Zylindroid $\mathfrak{G}_2$. Diese Zylindroide müssen aber längs g verschiedene Gleitparameter besitzen, weil sonst $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ die Schrauben an o und g gemeinsam hätten, also identisch wären. Infolge der Verschiedenheit der Parameter können sich die durch Ab-

schroten des Hyperboloids an o auf S_1 und S_2 erzeugten Flächen Z_1 und Z_2 niemals berühren, also auch nicht als Zahnflanken Verwendung finden.

§ 6. Konstruktive Darstellung der Verzahnung.

In den Fig. 15 bis 15d, Taf. III, ist die Verzahnung des einen Hyperboloids in orthogonaler Parallelprojektion durchgeführt. Die beiden Achsen sind der Aufrißebene parallel, o_1 speziell vertikal in der Aufrißebene, o_2 *vor* derselben und unter dem Achsenwinkel $2\beta = 60^0$ gegen o_1 geneigt. Ist $O_1 O_2$ der gegebene kürzeste Abstand beider Achsen, so ist der Bildkreis K bestimmt, die Linie $O_1 O_2$ ist zugleich die Parameterachse h, und es kann die gemeinsame Berührungskante g aus dem Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten konstruiert werden. Sei M der Mittelpunkt des ersten Hyperboloids.

Wird $\omega_1 : \omega_2 = 3:4$ gewählt, so ist der Bildpunkt G von g bekannt, und es schneidet die vertikale Bildsehne p durch G aus $O_1 O_2$ die beiden Kehlkreisradien

$$r_1 = OF \quad \text{und} \quad r_2 = O_2 F$$

heraus, während die Strecke GF den Gleitparameter h beider Grundkörper darstellt. Derselbe ist negativ. Durch die Kehlkreisradien sind beide Hyperboloide bestimmt; ihre Aufrisse sind Hyperbeln, welche g'' zur gemeinsamen Asymptote haben. Die Hyperboloide sind begrenzt durch die Kehlkreise K_1 und K_2, sowie durch die oberen Teilkreise T_1 und T_2, deren Ebenen durch denselben Punkt A_3 von g gehen, zu den Achsen rechtwinklig stehen und die Basisebenen der beiden Normalenkegel N_1 und N_2 der Hyperboloide längs T_1 und T_2 bilden, welche die Ergänzungskegel genannt werden.

Sind z_1 und z_2 die Zähnezahlen beider Räder, so verhält sich

$$z_1 : z_2 = \omega_2 : \omega_1 = 4:3.$$

Für $z_1 = 24$ wird also $z_2 = 18$, und es ist damit die Teilung t der beiden Teilkreise festgelegt.

Unter den unendlich vielen Schraubenflächen der Axoidschar vom Träger g sind nun die Eingriffs- und Wälzungsflächen S_a und S_b durch ihre Achsen a und b zu bestimmen.

Schlagen wir um A_3 einen Kreis, dessen Radius der vierte Teil vom Radius des Teilkreises T_1 ist, so ist er zugleich der dritte Teil des Radius von T_2, und indem wir von M'' aus die beiden Tangenten a'' und b'' an diesen Kreis legen, sind die Wälzungsflächen bestimmt, und ihre Winkelgeschwindigkeiten sind, absolut genommen:

$$\Omega_a = 4\omega_1 = 3\omega_2 = \Omega_b.$$

Es schroten also S_a und S_b auf dem ersten Grundkörper genau viermal, auf dem zweiten genau dreimal ab.

Die beiden Tangenten a'' und b'' schneiden aus dem Bildkreis K ihre Bilder A und B heraus, und ihre Bildsehnen bestimmen auf $O_1 O_2$ sowohl die Radien

$$r_a = FF_a, \quad r_b = FF_b$$

der Striktionslinien, als auch die Windungsparameter

$$H_a = AF_a, \quad H_b = BF_b$$

der Wälzungsflächen S_a und S_b, wodurch diese vollständig bestimmt sind. Beide Parameter haben negative Werte, d. h. S_a und S_b sind linksgewundene Schraubenflächen. Sie sind in den Fig. 15a und 15b, Taf. III, auseinander gerückt, im Aufriß dargestellt; ihre Grundrisse in Fig. 15c finden wir am einfachsten mittels der horizontalen Schnitte E_a und E_b, in welchen die Ebene des Teilkreises T_1, sowie die zum Mittelpunkt M symmetrische Ebene des unteren Teilkreises T_1' beide Flächen schneidet.

Die Spurkurven E_a und E_b lassen sich aus dem Aufriß allein durch folgende Überlegung finden. Denken wir uns eine Seitenrißebene normal zur Aufrißebene durch die Achse der Fläche S_a gelegt und mit der vordern Hälfte nach der linksseitigen Hälfte der Aufrißebene niedergelegt, so ist der Seitenriß dem Aufriß kongruent, aber um den vierten Teil der Ganghöhe in der Richtung der Achse nach unten verschoben. Daraus folgt, daß die Kurven E_a und E_b durch den Aufriß von S_a resp. S_b allein bestimmt sind.

Wird also der halbe Schraubengang der Striktionslinien jeder der Flächen S_a und S_b in 6 gleiche Teile geteilt, und werden die durch diese Punkte gehenden 6 Erzeugenden mit der obern und untern Teilkreisebene geschnitten, so erhält man in Fig. 15c von jeder Spurkurve E_a und E_b resp. die Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_6$ und $B_0, B_1, \ldots B_6$, wobei die in der untern Teilkreisebene T_1' liegenden Spurkurven die Spiegelbilder zu den obern Spurkurven bezüglich der durch M' gehenden Vertikalen sind. Indem man also gleichbezeichnete Punkte verbindet, erhält man die Grundrisse von S_a und S_b und zugleich auf diesen die Spurkurven in den Kehlkreisebenen. Von diesen sind nur die äußersten Punkte eingetragen. Da beide Wälzungsflächen das Hyperboloid längs g berühren, so berühren E_a und E_b ihren Teilkreis in den Punkten A_3 resp. B_3.

Um jetzt die Spur der Zahnflanke Z_1, also das Zahnprofil C in der Ebene des Teilkreises T_1 zu finden, muß die Fläche S_a auf dem Grundkörper derart abgeschrotet werden, daß der momentane Berührungspunkt der Striktionslinie stets auf dem Kehlkreis des Hyperboloides bleibt. Daraus folgt, daß der Querschnitt E_a von S_a in der Teilkreisebene sich

kongruent bleibt, also im Grundriß bloß eine Drehung um den Punkt M' vollzieht. Da S_a viermal auf dem Hyperboloid abgerollt werden kann, so gelangen die 6 Erzeugenden von S_a mit denjenigen Erzeugenden des Hyperboloides zur Deckung, welche einer von A_3 ausgehenden Einteilung des Teilkreises in 48 gleiche Teile entspricht. Es seien 0, 1, ..., 6 diese Teilpunkte. Betrachten wir also in der obern Teilkreisebene den Kurvenzug $A_0 A_1 A_2 B_4 B_5 B_6$, legen wir durch diese Punkte die Kreise aus M' und machen wir:

$$C_0 6 = A_3 A_0, \quad C_4 2 = A_3 B_4,$$
$$C_1 5 = A_3 A_1, \quad C_5 1 = A_3 B_5,$$
$$C_2 4 = A_3 A_2, \quad C_6 0 = A_3 B_6.$$

so erhält man das Zahnprofil C der obern Ebene T_1. In der untern Ebene betrachten wir den entsprechenden gleich bezeichneten Linienzug $A_0 A_1 A_2 B_4 B_5 B_6$; legen wir durch diese Punkte die Kreise aus M' und machen wir:

$$D_0 6 = B_3 A_0, \quad D_4 2 = B_3 B_4,$$
$$D_1 5 = B_3 A_1, \quad D_5 1 = B_3 B_5,$$
$$D_2 4 = B_3 A_2, \quad D_6 0 = B_3 B_6,$$

so erhalten wir das Zahnprofil D der untern Teilkreisebene. Die Verbindungslinien der Punkte C und D mit gleichem Index ergeben die Zahnflanke Z_1, welche in Fig. 15c eingetragen ist. Wird das Profil D an der Vertikalen durch M' gespiegelt, so bildet es nach Festsetzung der Zahnstärke mit C zusammen die Profilierung des Zahnes in der Teilkreisebene T_1. Es ist klar, daß das Zahnprofil in der Kehlkreisebene analog bestimmt wird, und daß die Punkte desselben andererseits die Mitten allen Erzeugenden CD der Fläche Z_1 sind. Es ergibt sich also das Resultat:

Die Spurkurven E_a und E_b der Eingriffsfläche bilden für jeden Normalschnitt zur Achse die Eingrifflinie der zugehörigen Zahnprofile, und es sind die Profile selbst bestimmt, weil die korrespondierende Teilung der Eingrifflinie und des Teilkreises bekannt ist.

Da die Eingrifflinie nicht auf dem Teilkreis ohne Gleitung abrollt, so gehen die Zahnprofile C und D nicht orthogonal durch den Teilkreis und die Zahnachsen nicht durch den Teilkreismittelpunkt M', sondern sie berühren alle einen bestimmten Kreis R um M', den zu kennen für die Zeichnung wichtig ist. Wir gelangen zum Radius dieses Kreises durch folgende Betrachtung:

Die Tangente des Zahnprofils C in A_3 ist die Spur der Tangentenebene der Flanke Z_1 durch die Berührungskante g in diesem Punkte. Ist aber l irgend eine Erzeugende von Z_1, r ihr kürzester Abstand

und α ihr Neigungswinkel gegen die zugehörige Momentanachse g, so wird Z_1 längs l berührt von einer Schraubenfläche um die Momentanachse vom Windungsparameter h, und es ist demnach der Verteilungsparameter Q der Zahnflanke längs l:

$$Q = -(h + r \operatorname{cotg} \alpha).$$

Fällt aber l mit g oder mit der Momentanachse in A_3 selbst zusammen, so verschiebt sich im ersten Zeitmoment g infolge des Gleitparameters h in sich selbst, während die Momentanachse die benachbarte Lage g' von g annimmt. Im zweiten Zeitelement beschreibt demnach g um g' ein windschiefes Flächenelement, und da g und g' beide auf dem Grundhyperboloid liegen, so steht die Zentralebene des Flächenelementes auf derjenigen des hyperboloidischen Elementes im Zentralpunkt des letzteren senkrecht, und es ist

$$\operatorname{Lim}(r \operatorname{cotg} \alpha) = r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = -q.$$

Demnach ist der gesuchte Parameter nach (20) mit $h_1 = h_2 = 0$,

$$Q = q - h = -2a \operatorname{cotg} 2\beta = FF^*.$$

Durch den Zentralpunkt auf dem Kehlkreis, die zur Tangentenebene des Hyperboloids normale Zentralebene und den Parameter Q ist also das windschiefe Flächenelement von Z_1 längs g bestimmt, und es kann für jeden Punkt dieser Linie, welche übrigens für die Gesamtfläche Z_1 eine Kuspidalkante ist, die Tangentenebene angegeben werden.

Bezeichnet u die Länge der Erzeugenden g zwischen Kehlkreis und Teilkreis, Θ den Winkel der Tangentenebene des Punktes A_3 gegen die Zentralebene, Θ_1 den Winkel ihrer Spur gegen die Spur der Zentralebene in der Teilkreisebene, so ist, weil α_1 den Winkel von g gegen o_1 bedeutet:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \Theta}{\cos \alpha_1} = \frac{\frac{u}{\cos \alpha_1}}{Q} = \frac{M'' N_1''}{FF^*}.$$

Macht man also in Figur 15c die Strecken

$$A_3 Q = \frac{FF^*}{2}, \quad QL = \frac{M'' N_1''}{2},$$

so ist $A_3 L$ die verlangte Tangente des Zahnprofils C und bestimmt als Tangente auch den verlangten Kreis R um M'.

Die Tangenten sämtlicher Zahnprofile in ihren Schnittpunkten mit dem Teilkreis sind Tangenten an R; bezeichnet man also die durch den Zahnmittelpunkt des Teilkreisbogens an R gelegte Tangente als Achse des Zahnprofils, so berühren alle Achsen den Kreis R.

Die Gesamtheit dieser Achsen erfüllt für alle Punkte von g hyperbolisches Paraboloid, welches durch die Grundkörper allein ständig bestimmt und von der Wahl der Eingriffsfläche ganz u hängig ist. In der Kehlkreisebene selbst gehen die Zahnprofile re winklig durch den Kehlkreis; je mehr sich die Teilkreisebene T_1 der Kehlkreisebene entfernt, um so größer ist die Abweichung Zahnachse vom entsprechenden Teilkreisradius, im unendlich fe Punkt von g beträgt sie einen rechten Winkel. Die Zahnflanke würde überall rechtwinklig durch das Hyperboloid gehen können,

$$Q = q \quad \text{oder} \quad h = 0$$

wäre, ein Umstand, der aber erfordert, daß die Grundkörper au ander abwickelbar sind, was bei Hyperboloiden ausgeschlossen ist.

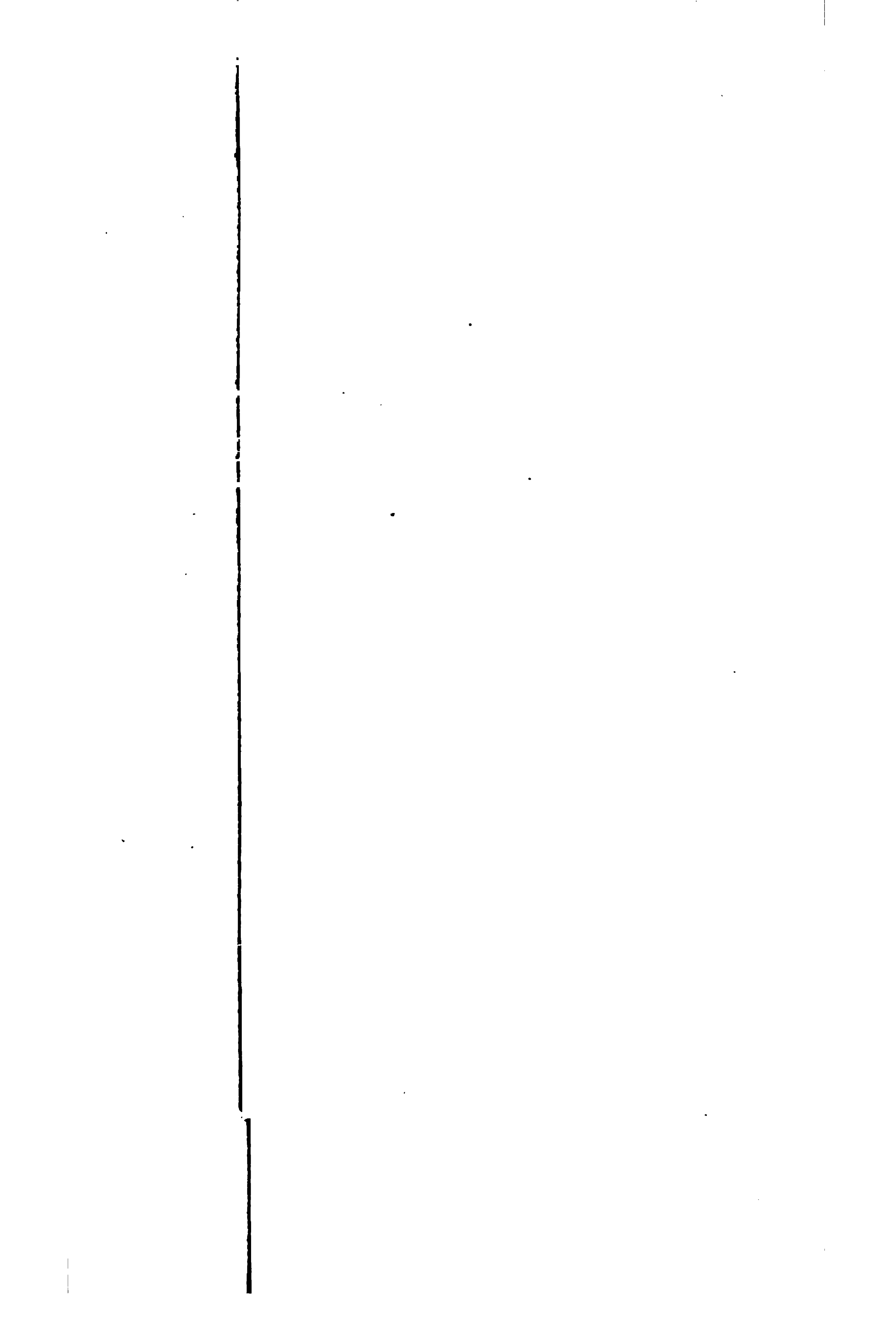
In der Praxis werden die Zahnräder aber nicht durch horizo Schnitte, sondern durch die Normalenkegel ihrer Grundhyperboloide grenzt. Da der Kegel N_1 durch Drehung um die Achse o_1 sich in selbst verschiebt, so bleiben seine Durchdringungskurven mit Wälzungsflächen beim Abschroten ebenfalls kongruente Kurven, und ergibt sich sofort der Satz:

Die Abwicklungen der Durchdringungskurven E_a^k und E_b^k der E griffsflächen S_a und S_b mit dem Ergänzungskegel bilden die Eingriffli der abgewickelten Zahnprofile des Ergänzungskegels.

Da die Spurkurven E_a und E_b der Eingriffsflächen in der Eb des Teilkreises T_1 bekannt sind, T_1 aber die Basis des Normalenke ist, so können aus Grund- und Aufriß von S_a und S_b diese Du dringungen E_a^k und E_b^k leicht konstruiert werden. In Figur 15c für den oberen Teilkreis der Grundriß von E_a^k gestrichelt eingetra und daraus in Figur 15d die Abwicklung der Zahnprofile ausgefü da die Teilung auf dem Teilkreis die alte bleibt. Die Tangenten den Schnittpunkten des abgewickelten Zahnprofils, sowie die Za achsen berühren wieder einen gewissen Kreis R_0; man findet den Rad dieses Kreises aus Figur 15c, indem man durch die Spitze des N malenkegels die erste Tafellinie legt und diese mit der durch g u die Spur t bestimmten Tangentenebene des Punktes A_3 in R_0 zu Schnitt bringt.

In der Figur 15 ist sodann das abgewickelte Profil für irge eine Lage desselben auf dem Kegel aufgewickelt, und ein Zahn ne der Zahnflanke Z_1 in Grund- und Aufriß dargestellt. Die Zahnachsen al aufgewickelten Profile erfüllen dabei ein bestimmtes Rotationshyperbolo welches O_1 zur Achse und die Kegelspitze N_1 zum Mittelpunkt hat.

Was endlich die *Begrenzung der Zähne* an Kopf und Fuß betri



so können als Begrenzungsflächen solche Hyperboloide gewählt werden, welche als Axoide paarweise zusammengehören. Da sich zwei solche Flächen längs einer Erzeugenden des Zylindroids berühren, so ist ein Eindringen des Zahnkopfes in den Fuß des Zahnes des andern Rades ausgeschlossen, solange wenigstens die Berührungskante g zwischen o_1 und o_2 liegt. Handelt es sich um zwei Räder, deren Mittelebenen in die Kehlkreisebenen fallen, so können in diesen Kopf- und Fußkreis in der üblichen Weise angenommen werden; dann sind dadurch die Begrenzungshyperboloide vollständig bestimmt.

Liegt jedoch das Rad an der Teilkreisebene T_1, so zeichne man Kopf- und Fußkreis T_k und T_f auf dem Normalenkegel und lege durch diese die Hyperboloide. Da diese selbst Axoide sein sollen, sind ihre Kehlkreise bestimmt. Ihre Radien werden erhalten, indem man die Schnittpunkte der beiden gewählten Kreise mit dem Zylindroid bestimmt und durch diese die Erzeugenden desselben zieht, welche dann auch Erzeugende der gesuchten Axoide sind.

Die Schnittpunkte müssen wie im Grundriß von Fig. 15, mittelst der eingetragenen Querschnitte durch das Zylindroid bestimmt werden. Diese Querschnitte können leicht auf kurze Strecken in der Nähe des Schnittpunktes gezeichnet werden, falls man den Schnitt des Zylindroids mit der Teilkreisebene bereits gezeichnet hat, was mittels des Bildkreises K geschieht. Die Durchdringungen der Hyperboloide mit den Zahnflanken Z sind zwar keine geraden Linien, weichen aber so wenig von solchen ab, daß sie geradlinig gezeichnet werden können.

Bezüglich der sogenannten *Sicherung des Zahneingriffes* ist zu bemerken, daß dazu nötig ist, die Eingrifflinie des zweiten Rades und dessen Zahnprofil zu zeichnen. Die beiden Eingrifflinien stehen dann in der Beziehung, daß durch die Erzeugenden der Eingriffsfläche jedem Punkte der ersten ein bestimmter Punkt der zweiten Eingrifflinie zugeordnet wird. In zwei entsprechenden Punkten findet allemal gleichzeitig Eingriff statt. Denkt man sich in jedem Rade den Kopfkreis eingetragen, so bestimmt dieser auf der zugehörigen Eingrifflinie den einen Endpunkt der Eingriffstrecke, sein entsprechender in der andern Eingrifflinie ist dann der zweite Endpunkt der Eingriffstrecke. Durch die Eingriffstrecke ist dann auch der entsprechende Eingriffbogen des Teilkreises bestimmt, der größer als die Teilung sein muß und diejenigen Stücke jedes Profils, die überhaupt zum Eingriff gelangen. Damit aber hängt wieder die Bestimmung des Gleitweges und des Reibungsfeldes jeder Zahnflanke zusammen, ebenso die Ermittelung der Reibungsarbeit, von welcher die Brauchbarkeit der erhaltenen Zahnprofile insbesondere abhängig ist.

Eine besonders einfache Verzahnung erhält man noch durch eine eigentümliche Spezialisierung. Wenn das Büschel der Bildsehnen p der Achse z parallel läuft, so zerfällt das Zylindroid in drei Ebenen E_1, E_2, U, indem sämtliche Erzeugende entweder parallel o_1 oder parallel o_2 laufen, oder im Unendlichen liegen. Es ist demnach O_1 der Bildpunkt sämtlicher Erzeugenden von E_1 und O_2 der Bildpunkt aller Erzeugenden von E_2. Die Parameterachse h ist vertikal, sonst aber unbestimmt; legt man sie durch O_1, so sind die Windungsparameter aller Erzeugenden g von E_1 unbestimmt, für alle Erzeugenden l von E_2 endlich groß und umgekehrt, falls die Parameterachse durch O_2 gelegt wird. Somit besteht jede Axoidschar aus lauter Zylinderflächen mit parallelen Achsen, darunter die gemeinsame Tangentenebene S. Schneiden sich also g und l, und liegt g in E_1, l in E_2, so enthält die Axoidschar an g den Zylinder S_1 um o_1, diejenige an l den Zylinder S_2 um o_2, während S die gemeinsame Fläche beider Axoidscharen und somit die gemeinsame Tangentenebene der Zylinder S_1 und S_2 ist.

Infolgedessen kann S als Eingriffs- und Wälzungsfläche sowohl für S_1 als S_2 benutzt werden. Rollt S ohne Gleitung auf S_2 ab, so beschreibt g im Raume Σ_2 eine developpable Schraubenfläche Z_2, deren Rückkehrkurve durch Aufwicklung von g auf den Zylinder S_2 entsteht.

Durch die Verschiebung von S an S_1 wird aber an der Achse o_1 eine Drehung hervorgerufen von der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \frac{r_2\,\omega_2 \cos 2\beta}{r_1},$$

und es beschreibt g im Raume Σ_1 eine Zylinderevolvente Z_1 von S_1. Weil g parallel o_1 und in S liegt, berühren sich beide Flächen Z_1 und Z_2 beständig längs g; sie bilden also die Zahnflanken einer Linienverzahnung, welches gerade die von Olivier angegebene Verzahnung ist.

Straßburg i. E., im Dezember 1903.

Über ein Problem, das mit der Theorie der Turbinen zusammenhängt.

Von Georg Scheffers in Darmstadt.

In der Theorie der Turbinen tritt das folgende spezielle Problem auf: Eine *inkompressible* Flüssigkeit führt eine solche *stationäre* Strömung aus, bei der erstens die Geschwindigkeit aller Teilchen *dieselbe* Größe hat und bei der zweitens alle Stromlinien auf kongruenten *Drehungskegeln* verlaufen, die zwar verschiedene Spitzen, aber gemeinsame Achse

haben. Die Stromlinien sollen insbesondere so beschaffen sein, *daß sie durch Drehung um die Achse miteinander vertauscht werden*, sodaß also — um einen modernen mathematischen Ausdruck zu gebrauchen — die Strömung alle Rotationen um die Achse gestattet. Die Frage ist, was für Kurven die Stromlinien sind.

Diese Frage ist sofort zu beantworten. Da nämlich der Abstand zwischen zweien der Kegel überall derselbe ist, so zieht die Forderung der konstanten Geschwindigkeit nach sich, daß zwei benachbarte Stromlinien auf demselben Kegel überall gleichen Abstand voneinander haben müssen. Breitet man den Mantel dieses Kegels mit der Spitze S in die Ebene aus, so gehen demnach die Stromlinien dieses Kegels in ebene Parallelkurven über. Auch nach dieser Ausbreitung muß jede Stromlinie durch Rotation um S wieder in eine Stromlinie übergehen. Es handelt sich also um die Bestimmung einer solchen Schar von Parallelkurven in der Ebene, die durch Rotation um einen bestimmten Punkt S der Ebene in sich übergeht. Parallelkurven in der Ebene haben aber gemeinsame Normalen. Demnach gehen alle ihre Normalen aus einer von ihnen hervor, wenn man sie um S dreht, d. h. die Normalen umhüllen einen Kreis, dessen Mitte S ist. Die Stromlinien sind also auf der in die Ebene ausgebreiteten Kegelfläche die orthogonalen Trajektorien der Tangenten eines Kreises, d. h. die *Evolventen eines Kreises mit der Mitte S.*[1]) —

Angeregt durch dieses spezielle Problem möchte ich im folgenden *die Frage etwas verallgemeinern.* Die soeben erwähnten Normalen gehen, sobald der Kegelmantel wieder in seine ursprüngliche Form zurückgeführt wird, in geodätische Linien des Kegels über, *die Stromlinien sind also hier orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien.*

Nehmen wir nun an, die Strömung finde nicht gerade längs jener kongruenten Drehungskegel, sondern längs einer Schar von Drehungsflächen überhaupt statt, die eine gemeinsame Achse haben, so können wir nun fragen, unter welchen Umständen die Stromlinien orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien jener Drehungsflächen sind.

Das Problem sei also dies:

Eine inkompressibele Flüssigkeit befinde sich in einer stationären Strömung um eine Achse so, daß jede Stromlinie durch Drehung um die Achse wieder Stromlinien ergibt. Die Geschwindigkeit der Strömung sei konstant. Die Stromlinien ordnen sich alsdann auf einer Schar von

---

1) Mein Kollege für Wasserkraftmaschinen, Herr Prof. Pfarr, stellte mir vor einiger Zeit das obige Problem, indem er eine Vermutung aussprach, die durch die hier gegebene Antwort bestätigt wird.

Drehungsflächen um jene Achse an. Wann sind sie orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien der Drehungsflächen? [1])

Die feste Achse sei die z-Achse, die Differentiation nach der Zeit t sei durch Striche angedeutet. Da die Strömung stationär sein soll, so müssen die Geschwindigkeitskomponenten x', y', z' Funktionen des Ortes (x, y, z), frei von t sein. Die Bedingung der Inkompressibilität ist bekanntlich:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Ist c die konstante Geschwindigkeit, so ist außerdem:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2. \tag{2}$$

Nun seien die in der xz-Ebene gelegenen Meridiankurven der Drehungsflächen durch die Gleichung:

$$z = f(x, u)$$

dargestellt, die eine willkürliche Konstante u enthalte. Zu jedem bestimmten Werte von u gehört alsdann eine bestimmte Meridiankurve und damit eine bestimmte Drehungsfläche. Die Gleichungen der zu einem beliebigen Werte von u gehörigen Drehungsfläche sind dann:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = f(r, u), \tag{3}$$

wo r, ϑ bekannte Bedeutung haben. Da jeder Punkt (x, y, z) des Raumes auf einer der unendlich vielen Drehungsflächen liegt, so gehört zu jedem Punkte (x, y, z) ein bestimmtes Wertetripel r, ϑ, u vermöge (3). Wir können daher r, ϑ, u als Koordinaten statt x, y, z einführen. Alsdann ist, wenn nach der Zeit differenziert wird:

$$\begin{cases} x' = r'\cos\vartheta - \vartheta' r\sin\vartheta, \\ y' = r'\sin\vartheta + \vartheta' r\cos\vartheta, \\ z' = f_r r' + f_u u'. \end{cases} \tag{4}$$

Ist F eine *beliebige* Funktion von x, y, z und geht sie durch Einführung der neuen Koordinaten r, ϑ, u in eine Funktion Φ über, so ist bei *jeder* Art der Strömung $F' = \Phi'$, d. h.

$$\frac{\partial F}{\partial x}x' + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' = \frac{\partial \Phi}{\partial r}r' + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\vartheta' + \frac{\partial \Phi}{\partial u}u'$$

---

1) Ob die Lösung dieses mathematischen Problems auch wirklich für die Theorie der Turbinen von Nutzen sein kann, wage ich nicht zu entscheiden, wenn ich auch glaube, einen Nutzen darin erblicken zu dürfen, daß man die Querschaufeln, auf die das Wasser aufprallt, längs geodätischer Linien konstruiert. Aber meine Kenntnisse über Turbinen sind so minimal, daß ich auch dies nur mit allem Vorbehalt aussprechen möchte.

oder, wenn die Werte (4) eingesetzt werden:

$$(r' \cos\vartheta - \vartheta' r \sin\vartheta)\frac{\partial F}{\partial x} + (r' \sin\vartheta + \vartheta' r \cos\vartheta)\frac{\partial F}{\partial y} + (f_r r' + f_u u')\frac{\partial F}{\partial z} =$$
$$= \frac{\partial \Phi}{\partial r} r' + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\vartheta' + \frac{\partial \Phi}{\partial u} u'.$$

Diese Formel gilt für *alle* Arten der Strömung, also müssen die Koeffizienten von r' rechts und links übereinstimmen, ebenso die von ϑ' und die von u'. Demnach ist:

$$\cos\vartheta\frac{\partial F}{\partial x} + \sin\vartheta\frac{\partial F}{\partial y} + f_r\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$
$$-r\sin\vartheta\frac{\partial F}{\partial x} + r\cos\vartheta\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta},$$
$$f_u\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

also auch, wenn wir diese Gleichungen nach $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ auflösen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\vartheta\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{f_r}{f_u}\cos\vartheta\frac{\partial \Phi}{\partial u},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin\vartheta\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \frac{f_r}{f_u}\sin\vartheta\frac{\partial \Phi}{\partial u},$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{f_u}\frac{\partial \Phi}{\partial u}.$$

Setzen wir in der ersten Formel $F = \Phi = x'$, in der zweiten $F = \Phi = y'$, in der dritten $F = \Phi = z'$, so kommt:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \cos\vartheta\frac{\partial x'}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial x'}{\partial \vartheta} - \frac{f_r}{f_u}\cos\vartheta\frac{\partial x'}{\partial u},$$
$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \sin\vartheta\frac{\partial y'}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial y'}{\partial \vartheta} - \frac{f_r}{f_u}\sin\vartheta\frac{\partial y'}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{1}{f_u}\frac{\partial z'}{\partial u}.$$

Durch Einsetzen dieser drei Werte in (1) erhalten wir die Bedingung der Inkompressibilität ausgedrückt in den neuen Koordinaten r, ϑ, u, wenn wir noch rechts x', y', z' durch ihre Werte (4) ersetzen. Dabei ist zu beachten, daß x', y', z' Funktionen von x, y, z allein oder also von r, ϑ, u allein sind, sodaß nach (4) auch r', ϑ', u' Funktionen von r, ϑ, u allein sind. Da wir ferner annehmen, daß die Strömung längs der gewählten Drehungsflächen verlaufe, und da auf jeder dieser Flächen u konstant ist, so ist insbesondere

$$u' = 0$$

zu setzen. Somit nimmt die Bedingung der Inkompressibilität die Form an:

$$\frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} + \frac{r'}{r} + \frac{f_{ru}}{f_u} r' = 0.$$

Da nun jede Stromlinie durch Drehung um die z-Achse wieder in eine Stromlinie übergehen soll, und da sich bei dieser Drehung von den drei Koordinaten r, ϑ, u nur ϑ ändert, so folgt, daß die Geschwindigkeitskomponenten r', ϑ' *Funktionen von r und u allein*, frei von t und ϑ, sein müssen. Die letzte Bedingung nimmt demnach die einfachere Gestalt an:

$$\frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{r'}{r} + \frac{f_{ru}}{f_u} r' = 0$$

oder, nach Division mit r':

$$\frac{\partial}{\partial r} \log (r' r f_u) = 0,$$

woraus folgt:

$$r' r f_u = U(u),$$

wo U eine Funktion von u allein sein muß. Haben wir somit

$$r' = \frac{U}{r f_u} \tag{5}$$

gefunden, so ergibt sich schließlich ϑ' aus der Bedingung (2), die vermöge (4) und wegen $u' = 0$ übergeht in:

$$(1 + f_r^2) r'^2 + r^2 \vartheta'^2 = c^2, \tag{6}$$

woraus wegen (5) folgt:

$$\vartheta'^2 = \frac{c^2 r^2 f_u^2 - (1 + f_r^2) U^2}{r^4 f_u^2}. \tag{7}$$

Es sei α der Winkel, den die Stromlinie mit dem Breitenkreise im Punkte (r, ϑ, u) der zu einem bestimmten u gehörigen Drehungsfläche (3) bildet. Die Richtungskosinus der Tangente der Stromlinie sind proportional x', y', z', die Richtungskosinus der Tangente des Breitenkreises nach (3) gleich $-\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, 0. Also ist

$$\cos\alpha = \frac{-x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

oder nach (4) und (2):

$$\cos\alpha = \frac{\vartheta' r}{c},$$

daher nach (6) und (5):

$$\sin^2\alpha = \frac{c^2 - \vartheta'^2 r^2}{c^2} = \frac{(1 + f_r^2) r'^2}{c^2} = \frac{(1 + f_r^2) U^2}{c^2 r^2 f_u^2}.$$

Zugleich ist α der Winkel, den die durch den Punkt (r, ϑ, u) gehende *orthogonale Trajektorie der Stromlinien* unserer Drehungsfläche mit dem

Meridian bildet. Nach einem bekannten Satze der Flächentheorie[1]) ist diese orthogonale Trajektorie dann und nur dann eine *geodätische* Linie der Drehungsfläche, wenn der Ausdruck

$$r^2 \sin^2 \alpha = \frac{(1+f_r^2)\,U^2}{c^2 f_u^2}$$

auf der Fläche konstant ist, d. h. nur noch von u abhängt. Demnach finden wir:

$$\frac{1+f_r^2}{f_u^2} = \varphi(u),$$

wo φ eine Funktion von u allein sein soll.

Es handelt sich also darum, $f(r, u)$ so als Funktion von r und u zu bestimmen, daß:

$$\varphi(u)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1 \tag{8}$$

ist. Dies läßt sich noch vereinfachen: u war eine Größe, die auf jeder Fläche konstant ist, aber von Fläche zu Fläche variiert. An ihrer Stelle können wir eine andere Größe v in die Gleichungen (3) der Drehungsflächen einführen, die wir als irgend eine Funktion von u wählen dürfen:

$$v = \psi(u).$$

Alsdann wird $f(r, u)$ eine Funktion f von r und v, und zwar ist:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{d\psi}{du},$$

sodaß die Forderung (8) übergeht in:

$$\varphi(u)\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1.$$

Wir können insbesondere $\psi(u)$ so wählen, daß

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

wird, da $\varphi(u)$ sicher nicht gleich Null ist. Alsdann reduziert sich die Forderung auf:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1.$$

Mit anderen Worten: Wir hätten von vornherein durch passende Wahl der für die einzelnen Drehungsflächen charakteristischen Größe u erreichen können, daß die Gleichung (8) die einfachere Form annimmt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 1. \tag{9}$$

---

1) Vergleiche z. B. des Verf. Einführung in die Theorie der Flächen, Leipzig 1902, S. 412.

Es war

$$z = f(x, u)$$

die Gleichung der in der xz-Ebene gelegenen Meridiankurven. Also hat sich nach (9) ergeben: Für diese Meridiankurven muß z eine solche Funktion von x und u sein, daß

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1 \tag{10}$$

ist. Zu jedem bestimmten u gehört eine bestimmte Meridiankurve. Verschieben wir sie aus der xz-Ebene heraus längs der y-Achse um die Strecke u, so erhalten wir eine Schar von unendlich vielen Kurven, die, auf die xz-Ebene zurückprojiziert, die unendlich vielen Meridiankurven in dieser Ebene ergeben. Anders ausgesprochen: Diese unendlich vielen verschobenen Kurven sind die Schnittkurven der Ebenen $y = \text{const.}$ $(= u)$ mit der *Hilfsfläche*

$$z = f(x, y),$$

für die nach (10) die Gleichung besteht:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 1. \tag{11}$$

Die Normale der Fläche $z = f(x, y)$ bildet bekanntlich mit der y-Achse einen Winkel, dessen Kosinus gleich

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

ist. Dieser Wert ist aber nach (11) gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, d. h. die Tangentenebenen der Hilfsfläche bilden mit der y-Achse oder mit der xz-Ebene einen Winkel von 45^0. Die Hilfsfläche ist also eine von der xz-Ebene unter 45^0 aufsteigende *Böschungsfläche* oder, was dasselbe ist, die Fläche der Tangenten einer solchen Kurve, deren Tangenten mit der xz-Ebene sämtlich den Winkel von 45^0 bilden, d. h. einer unter 45^0 aufsteigenden *Schraubenlinie* auf einem *allgemeinen* Zylinder, dessen Richtung die der y-Achse ist.

Die auf der xz-Ebene liegende Grundkurve des Zylinders sei mit k bezeichnet. Schneiden wir die Tangentenfläche der Schraubenlinie mit der xz-Ebene, so ergibt sich offenbar eine Evolvente der Kurve k. Schneiden wir sie mit einer Ebene parallel zur xz-Ebene, so ist die Projektion der Schnittkurve auf die xz-Ebene ebenfalls eine Evolvente von k.

Nach den vorhergehenden Erörterungen ergibt sich demnach:

Die Meridiankurven der Drehungsflächen in der xz-Ebene sind die Evolventen einer beliebigen Kurve k in dieser Ebene.

Wir fassen das Ergebnis so zusammen:

Bei einer solchen stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, die überall dieselbe konstante Geschwindigkeit hat und die Drehungen um eine Achse gestattet, sind die Strömungslinien auf Drehungsflächen mit dieser Achse gelegen, und zwar sind sie dann und nur dann orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien dieser Drehungsflächen, wenn die Meridiankurven der Flächen die Evolventen einer ebenen Kurve sind.

Spezielle Fälle ergeben sich, wenn die oben erwähnte Böschungsfläche in eine Ebene oder einen Kegel ausartet, d. h. wenn die Kurve k zu einem im Unendlichfernen oder im Endlichen gelegenen Punkte wird. Alsdann sind die Meridiankurven entweder parallele Geraden oder konzentrische Kreise. Im ersteren Falle sind die Drehungsflächen kongruente Kegel, und so kommen wir zu dem am Anfang erwähnten Ausgangsfall zurück, — im anderen Falle sind die Drehungsflächen Ringflächen.

Das Wesentliche des Ergebnisses liegt darin, daß die Meridiankurven der Flächen als Evolventen *Parallelkurven* sind, daß also zwei der Drehungsflächen überall gleichen Abstand voneinander haben. Die Drehungsflächen bilden also eine Schar von *Parallelflächen.*

Es leuchtet ein, daß sich diese Betrachtung erheblich verallgemeinern läßt. Da mir jedoch nur daran lag, gerade jene spezielle, technisch vielleicht nicht unwichtige Frage zu beantworten, und *zwar mit expliziter Entwicklung der Formeln,* so sei nur ganz kurz angedeutet, wie man allgemein ohne Rechnung zum Ziele kommt:

Findet eine beliebige stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit statt, so bilden die von irgend einer Kurve ausgehenden Stromlinien eine invariante Fläche. So lassen sich beliebig viele Flächen konstruieren, längs deren die Strömung stattfindet. Greifen wir eine einfach unendliche Schar von solchen Flächen heraus und verlangen wir, daß die Stromlinien auf diesen Flächen orthogonale Trajektorien von geodätischen Linien seien, so heißt dies nach einem allgemeinen Satze von Gauß, daß je zwei benachbarte Stromlinien auf einer der Flächen überall gleichen Abstand voneinander haben. Daraus folgt, da die Geschwindigkeit konstant sein, d. h. jeder Stromfaden einen Querschnitt von überall gleichem Inhalt haben muß, daß also auch von jenen Flächen je zwei unendlich benachbarte überall denselben Abstand voneinander haben müssen, d. h.: die Flächen müssen *Parallelflächen* sein.

Darmstadt, den 4. Januar 1904.

Über das Modell einer Fläche dritter Ordnung, die das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes darstellt.

Von Paul Stäckel in Kiel.

1. Sowohl für die Theorie der krummen Flächen selbst als auch für ihre zahlreichen Anwendungen, besonders auf die Mechanik, ist es von großer Wichtigkeit, daß man jede Fläche in der Nähe eines regulären Punktes durch ein Stück einer einfachen Fläche ersetzen kann. In erster Annäherung läßt sich die Fläche durch ein Stück ihrer Tangentialebene in dem betrachteten Punkte ersetzen. Wie man die zweite Näherung zu wählen hat, wird von den Forderungen abhängen, die man an sie stellt.

Man kann *erstens* verlangen, daß die Ersatzfläche in ihren Krümmungsverhältnissen mit der Urfläche für den betrachteten Punkt vollständig übereinstimmt, und erhält dann nach dem Vorgange von Ch. Dupin (Développements de géométrie, Paris 1813) eine oskulierende Fläche zweiter Ordnung, und zwar, jenachdem der Punkt elliptisch oder hyperbolisch oder parabolisch ist, ein elliptisches oder hyperbolisches Paraboloid oder einen parabolischen Zylinder; den Schnitt einer Ebene, die der Tangentialebene in dem betrachteten Punkte parallel ist, mit der oskulierenden Fläche bezeichnet Dupin als zugehörige *Indicatrix*.

Man kann *zweitens* verlangen, daß die Ersatzfläche erkennen läßt, wie die Urfläche zur Tangentialebene liegt, ob nämlich die Urfläche ganz auf der einen oder der anderen Seite der Tangentialebene liegt oder diese schneidet, wobei man dann gleichzeitig eine Näherung für die *Schnittkurve* erhalten will. Da sich bei den entsprechenden Untersuchungen über die Annäherung von Kurven herausgestellt hatte, daß die oskulierende Parabel nicht nur die erste, sondern auch die zweite Forderung erfüllt, daß sie nämlich auch erkennen läßt, auf welcher Seite der Tangente die Kurve liegt, so hat man vielfach ohne weiteres angenommen, daß auch bei den krummen Flächen dasselbe gelte. Diese Unklarheit tritt schon bei Dupin auf und zieht sich durch die ganze Literatur des neunzehnten Jahrhunderts. Sie ist wohl deshalb solange unbemerkt geblieben, weil für die elliptischen und hyperbolischen Punkte in der Tat beide Forderungen zu demselben Ergebnisse, nämlich zu den oskulierenden Paraboloiden führen, und weil man die parabolischen Punkte als „Ausnahmefälle“ nur flüchtig betrachtete.

Auf diese Weise erklärt es sich, daß *manche Lehrbücher geradezu falsche Behauptungen über das Verhalten der Fläche zu ihrer Tangentialebene in einem Punkte enthalten.* Um dies im einzelnen nachzuweisen, werde die Fläche auf ein System rechtwinkliger kartesischer Koordinaten bezogen, deren Anfangspunkt der betrachtete reguläre Punkt P sei; die xy-Ebene möge die Tangentialebene, die z-Achse die Flächennormale in P sein. Dann hat man für die Umgebung von P die Darstellung:

$$z = \tfrac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \tfrac{1}{6}(\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3) + \cdots\cdots,$$

in der den Veränderlichen x und y hinreichend kleine Werte beizulegen sind. F. Joachimsthal (*Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung*, 1. Auflage, Leipzig 1872, 2. Auflage, Leipzig 1881, S. 56—67) sagt dazu: „So erhalten wir für z eine Reihe beginnend mit:

$$\tfrac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2),$$

einem Gliede, welches wegen der beliebigen Kleinheit von x und y in bezug auf das Vorzeichen bestimmend wird für die ganze Reihe, deren nachfolgende Glieder in Beziehung auf x und y von der dritten und höherer Ordnung sind. Die Fläche wird von der Tangentialebene berührt oder geschnitten, jenachdem $r_0 t_0 - s_0^2$ größer als Null oder kleiner. Der Grenzfall, daß diese Differenz gleich Null ist, gehört zum ersten." Hiermit im wesentlichen identisch ist auch die Darstellung in der dritten, von L. Natani besorgten Auflage (Leipzig 1890, S. 101—103.). In ähnlicher Weise äußern sich auch J. Knoblauch (*Einführung in die allgemeine Theorie der Flächen*, Leipzig 1880, S. 50) und L. Raffy (*Leçons sur les applications géométriques de l'analyse*, Paris 1897, S. 141).

Daß hier ein Fehlschluß vorliegt, zeigt das einfache Beispiel

$$z = \tfrac{1}{2} t_0 y^2 + \tfrac{1}{6}\alpha x^3,$$

wo sofort ersichtlich ist, daß die Tangentialebene im Anfangspunkte von der Fläche in einer Neilschen Parabel geschnitten wird, sodaß die Fläche teils oberhalb, teils unterhalb der Tangentialebene liegt. Man darf auch nicht etwa sagen, der Teil der Fläche, der unterhalb der Tangentialebene liegt, sei im Verhältnis zu dem, der oberhalb liegt, nur klein, und dieses Verhältnis komme der Null um so näher, je kleiner die Umgebung des Anfangspunktes angenommen werde, denn man will doch gerade wissen, was sich in einer kleinen Umgebung des Anfangspunktes ereignet.

Worin besteht aber der Fehler? Bei einer Potenzreihe mit einer reellen Veränderlichen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ist das erste nicht verschwindende Glied für hinreichend kleine Werte von x ausschlaggebend, das heißt, es bestimmt das Vorzeichen der ganzen Summe. Man hat nun stillschweigend angenommen, daß in entsprechender Weise bei einer Potenzreihe mit zwei reellen Veränderlichen

$$\sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} x^{\varkappa} y^{\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$$

das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension, die wirklich auftreten, in demselben Sinne ausschlaggebend sei. Das ist jedoch eine unberechtigte Verallgemeinerung. Wenn die beiden unabhängigen Veränderlichen x und y unendlich klein werden, braucht das nicht bei beiden von derselben Ordnung zu geschehen, vielmehr hindert nichts, daß die Ordnungen verschieden sind, und wenn man daher Näherungsausdrücke gewinnen will, so darf man nicht einfach die Glieder niedrigster *Dimension* beibehalten, sondern hat zu untersuchen, welches die Glieder niedrigster *Ordnung* sind. Die Begriffe: Ordnung und Dimension gehen also bei mehreren Veränderlichen auseinander. Diese Tatsache kommt schon zur Geltung, wenn man eine algebraische Kurve untersucht, deren Gleichung in der Form vorliegt, daß ein Polynom in x und y gleich Null gesetzt wird, und sie war den Mathematikern des 18. Jahrhunderts, ja schon Newton wohlbekannt. Man hätte also nur die bei der Untersuchung der Kurven üblichen Methoden auf die Schnittkurve der Fläche und ihrer Tangentialebene anzuwenden brauchen, um zu dem richtigen Resultate zu gelangen. Wie aber in einem Flusse oft zwei Strömungen lange nebeneinander laufen, ohne sich zu vermischen, so ist das auch mit den Methoden der Kurvendiskussion und dem Ansatze von Dupin gegangen. So sehen wir, daß Salmon (*On the geometry of three dimensions*, London 1862, deutsche Bearbeitung von Fiedler, Leipzig 1880, S. 9—12) zuerst die Natur der Schnittkurven ganz richtig charakterisiert, dann aber die Fläche ohne weiteres durch das oskulierende Paraboloid ersetzt (vergl. auch Fiedler, *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, 2. Auflage, Leipzig 1875, §§ 87 und 102).

Die richtige Darstellung des Sachverhaltes findet man bei G. Scheffers (*Einführung in die Theorie der Flächen*, Leipzig 1901, S. 138—141), der beweist, daß bei geeigneter Wahl der x- und y-Achse „die Schnittkurve der zur Tangentenebene parallelen Ebenen in der Nähe von P im allgemeinen durch die Kurve:

$$z = \tfrac{1}{2} t_0 y^2 + \tfrac{1}{6} \alpha x^3$$

ersetzt werden darf". Im allgemeinen bedeutet hier, daß α als von Null

verschieden vorausgesetzt wird; verschwindet α, so bedarf es einer weiteren Untersuchung. Wie die einfachen Beispiele

$$z = y^2 \pm x^4$$

zeigen, ist es nicht erlaubt, die einschränkenden Worte „im allgemeinen" wegzulassen; in dieser Beziehung bedarf daher die sonst korrekte Darstellung von V. und L. Kommerell (*Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen*, Leipzig 1903, S. 71) der Berichtigung.

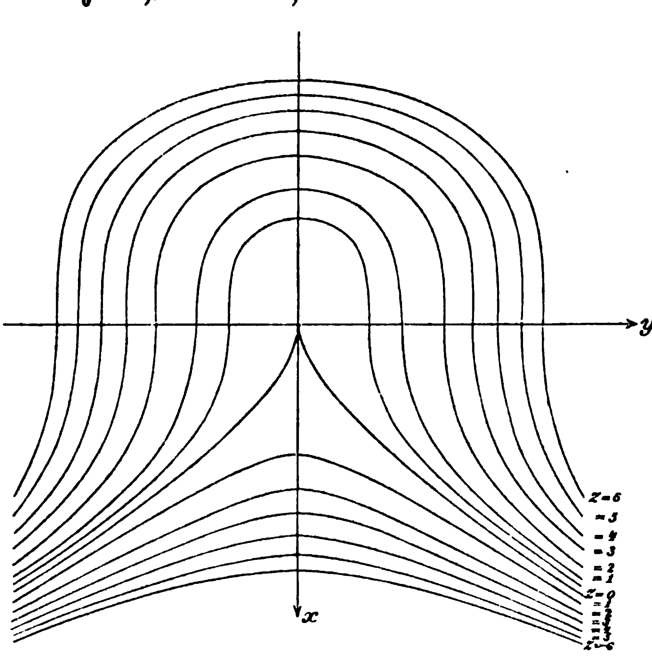
2. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß man, um das Verhalten einer Fläche zu ihrer Tangentialebene in einem parabolischen Punkte zu charakterisieren, notwendig Flächen dritter oder höherer Ordnung heranziehen muß. Am einfachsten ist der Fall, daß man mit einer Fläche dritter Ordnung:

$$z = \tfrac{1}{2} t_0 y^2 + \tfrac{1}{6} \alpha x^3$$

auskommt. Im Anschluß an eine Vorlesung über die Theorie der krummen Flächen, die ich im Wintersemester 1902/03 gehalten habe, ist diese Fläche von zweien meiner Zuhörer, den Herren O. Losehand und W. Quidde, für die Werte

$$t_0 = 0{,}5 \quad \alpha = -0{,}3$$

modelliert worden; bei dieser Wahl der Konstanten treten nämlich die Eigenschaften der Fläche besonders deutlich hervor. Zusammen mit den Modellen der Paraboloide bildet dieses Modell eine Ergänzung zu den drei Kartonmodellen über die Krümmung der Flächen, die Chr. Wiener entworfen hat und die als Serie XXII



des früheren Brillschen, jetzt Schillingschen Verlages erschienen sind; dieselbe Verlagshandlung liefert auch Abgüsse des Gipsmodells der Fläche dritter Ordnung.

Die umstehende Figur zeigt in Verkleinerung auf $\frac{2}{3}$ die Schnitte der Fläche mit Ebenen, die in je 1 cm Abstand parallel zur xy-Ebene gelegt sind. Die Schnitte für positives z hat man sich oberhalb, die für negatives z unterhalb der Ebene der Zeichnung zu denken. Diese Ebene selbst ist die Tangentialebene der Fläche im Anfangspunkte der Koordinaten; sie wird von der Fläche in einer Neilschen Parabel geschnitten. Die Schnitte parallel der xz-Ebene sind kongruente Parabeln zweiter Ordnung. Die in der yz-Ebene selbst liegende Parabel bildet die Grenze zwischen dem Gebiet der elliptischen und dem der hyperbolischen Punkte; sie besteht aus lauter parabolischen Punkten. Die Schnitte parallel der xz-Ebene sind kongruente Parabeln dritter Ordnung. Hieraus geht, nebenbei gesagt, hervor, daß die Fläche eine Schiebungsfläche ist.

Die Figur der Schnitte mit Ebenen parallel der xy-Ebene bringt, wie Herr Quidde bemerkt hat, sehr schön zum Ausdruck, daß im Anfangspunkte ein Übergang von den elliptischen zu den hyperbolischen Punkten stattfindet. Wenn man den Kurvenstücken oberhalb der y-Achse ihr Spiegelbild in bezug auf diese Achse hinzufügt, so erhält man eine Schar ellipsenähnlicher Kurven, und wenn man das Entsprechende bei den Kurven unterhalb der y-Achse tut, eine Schar hyperbelähnlicher Kurven, wobei die Neilsche Parabel den Asymptoten äquivalent ist. Die beiden Teile, in die die Fläche durch die yz-Ebene zerlegt wird, haben daher Ähnlichkeit beziehungsweise mit der Hälfte eines elliptischen und eines hyperbolischen Paraboloids.

Als hübsche Übungsaufgabe möge noch die Bestimmung der asymptotischen Kurven der Fläche erwähnt werden.

Zur Frage über das aplanatische System.

Von S. Trozewitsch in Warschau.

Hinsichtlich des aplanatischen Systems ist, meines Wissens, nur für den Fall, daß einer der konjugierten Punkte im Unendlichen liegt, der Nachweis erbracht, daß die Schnittpunkte der konjugierten Strahlen auf einer Kugeloberfläche liegen.

Es gelang mir darzutun, daß überhaupt bei einem aplanatischen System die Schnittpunkte jedes Paares konjugierter meridionaler Strahlen auf ein und derselben bestimmten Kreislinie liegen.

Der Nachweis ist unter Zuhilfenahme der analytischen Geometrie erbracht: Es mag in der Zeichnung (Fig. 1) der Punkt C den Durchschnittspunkt irgend zweier konjugierten Strahlen LC und $L'C$ dar-

stellen. Wenn nun das System (welches wir in der Zeichnung nicht darstellen) für die Punkte L und L' (Fig. 1) aplanatisch ist, so ist der Quotient $\frac{\sin u'}{\sin u}$ konstant. Wir wollen diesen Quotienten durch $\frac{m}{n}$ ausdrücken, so daß also $\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{m}{n}$.

Fig. 1.

Aus dem $\triangle LCL'$ folgt, daß

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{LC}{L'C},$$

also:

$$\frac{LC}{L'C} = \frac{m}{n}.$$

Fragen wir nun: Was stellt der geometrische Ort solcher Punkte wie C dar, für welche das Verhältnis ihrer Abstände von zwei gegebenen Punkten L und L' konstant und gleich $\frac{m}{n}$ ist?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir als Abszissenachse LL', als Ordinatenachse die Senkrechte zu ihr, errichtet im Punkte L. x und y seien die Koordinaten des Punktes C.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken LCN und CNL' erhalten wir:

$$LC = \sqrt{LN^2 + CN^2} \quad \text{und} \quad L'C = \sqrt{(NL')^2 + CN^2},$$

oder:

$$LC = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad L'C = \sqrt{(NL')^2 + y^2}.$$

Es sei nun die Entfernung zwischen den gegebenen Punkten L und L' gleich a, so daß:

$$LL' = a.$$

Dann ist:

$$NL' = LL' - LN = a - x.$$

Daraus folgt:

$$(NL')^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

und

$$L'C = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}.$$

Das heißt:

$$\frac{LC}{L'C} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}} = \frac{m}{n},$$

folglich:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 - 2ax + x^2 + y^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

woraus wir finden, daß:

$$(m^2 - n^2)x^2 + (m^2 - n^2)y^2 = 2m^2ax - m^2a^2,$$

also

$$x^2 + y^2 - \frac{2m^2ax}{m^2 - n^2} = -\frac{m^2a^2}{m^2 - n^2}.$$

Fügen wir zu beiden Teilen der letzten Gleichung

$$\frac{m^4a^2}{(m^2 - n^2)^2}$$

hinzu, so erhalten wir nach einigen Abkürzungen:

$$\left(x - \frac{m^2a}{m^2 - n^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{mna}{m^2 - n^2}\right)^2,$$

das aber ist die Gleichung für den Kreis, dessen Zentrum auf der X-Achse liegt in einer Entfernung $x_1 = \frac{m^2a}{m^2 - n^2}$ vom Koordinatenanfangspunkt L und dessen Radius:

$$r = \frac{mna}{m^2 - n^2}$$

ist.

Daraus folgt nun, daß *bei einem aplanatischen System die Durchschnittspunkte entsprechend konjugierter Strahlen auf einer Kreislinie liegen.*

Für die Untersuchung der erhaltenen Resultate führen wir der Einfachheit halber eine besondere Längeneinheit ein, und zwar nehmen wir an, daß $LH = m$ (Einheiten), wobei H der Durchschnittspunkt der erwähnten Kreislinie mit der Linie LL' ist.

Dann ist:

$$L'H = n,$$

weil nach Voraussetzung:

$$\frac{LC}{L'C} = \frac{LH}{L'H} = \cdots = \frac{m}{n}.$$

Ferner:

$$LL' = LH + HL' = m + n.$$

Folglich:

$$x_1 = \frac{m^2a}{m^2 - n^2} = \frac{m^2(m + n)}{m^2 - n^2} = \frac{m^2}{m - n}$$

und

$$r = \frac{mna}{m^2 - n^2} = \frac{mn(m + n)}{m^2 - n^2} = \frac{mn}{m - n}.$$

Schließlich erhalten wir folgende Formeln:

$$x_1 = \frac{m^2}{m - n} \quad \text{und} \quad r = \frac{mn}{m - n}.$$

1. Wenn $m < n$, dann ist $x_1 < 0$, d. h. dann kommt das Zentrum des Kreises links vom Koordinatenanfangspunkt L zu liegen. Dieser Fall ist in unserer Zeichnung (Fig. 1) zur Darstellung gebracht.

2. Ist $m > n$, dann ist $x_1 > 0$, d. h. das Zentrum des Kreises kommt rechts von dem Koordinatenanfangspunkt zu liegen.

3. Ist $m = n$, dann ist $x_1 = \infty$ und $r = \infty$, d. h. die Kreislinie CH verwandelt sich in eine gerade Linie, welche durch den Abschnitt LL' in der Mitte hindurchgeht.

Bemerken wir noch, daß, wenn der Punkt L' ins Unendliche zu liegen kommt, $n = \infty$ wird und L sich in den Brennpunkt des Systems verwandelt, und $LH = m = F$, wo F die Brennweite des Systems bedeutet. Andererseits ist dann

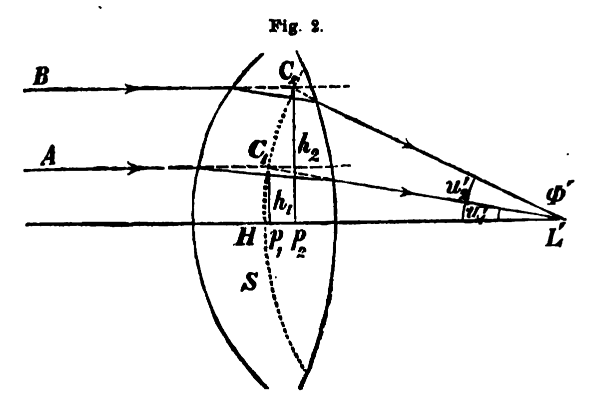
$$x_1 = \left(\frac{m^2}{m-n}\right)_{n=\infty} = 0$$

und

$$r = \frac{mn}{m-n} = \left(\frac{m}{\frac{m}{n} - 1}\right)_{n=\infty} = -m.$$

Daraus schließen wir, daß, wenn einer von zwei konjugierten aplanatischen Punkten im Unendlichen liegt, das Zentrum unserer Kreislinie mit dem andern Punkt zusammenfällt (welcher dann als Brennpunkt des Systems erscheint), und der Radius dieser Kreislinie (abgesehen vom Vorzeichen) gleich der Brennweite des Systems wird (Fig. 2).

Fig. 2.



Diese Bemerkungen könnten für die Feststellung der Genauigkeit des aplanatischen Systems vermittels der Zeichnung von Nutzen sein.

Bis jetzt zogen wir nur solche Punkte in Betracht, welche in der Ebene der Zeichnung liegen, die als durch das Achsensystem gelegt gedacht wird. Solche Strahlen heißen Meridionalstrahlen. Dabei überzeugten wir uns, daß bei aplanatischem System die Durchschnittspunkte konjugierter Strahlen auf einer Kreislinie liegen. Faßt man nun überhaupt alle Strahlen ins Auge, welche in das System fallen, dann ist es nicht schwer sich zu überzeugen, daß die Durchschnittspunkte konjugierter Strahlen überhaupt auf einer Kugeloberfläche liegen, deren Zentrum und Radius natürlich mit Zuhilfenahme derselben Formeln bestimmt werden, welche für die Kreislinie aufgestellt waren:

$$x_1 = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} \quad \text{und} \quad r = \frac{mna}{m^2 - n^2}.$$

Von Interesse ist, daß:

$$\frac{x_1}{r} = \frac{LC}{L'C} = \frac{LH}{L'H},$$

weil:

$$\frac{x_1}{r} = \frac{m^2 a}{m^2 - n^2} : \frac{mna}{m^2 - n^2} = \frac{m}{n}$$

und:

$$\frac{LC}{L'C} = \frac{LH}{L'H} = \dots \frac{m}{n}.$$

Warschau, im Oktober 1903.

Kleinere Mitteilungen.

Graphisch-numerische Methode zur beliebig genauen Bestimmung der Wurzeln einer numerischen Gleichung.

Die vorgelegte algebraische oder transzendente Gleichung sei

(1) $$f(x) = 0.$$

Bringt man Gleichung (1) auf die Form

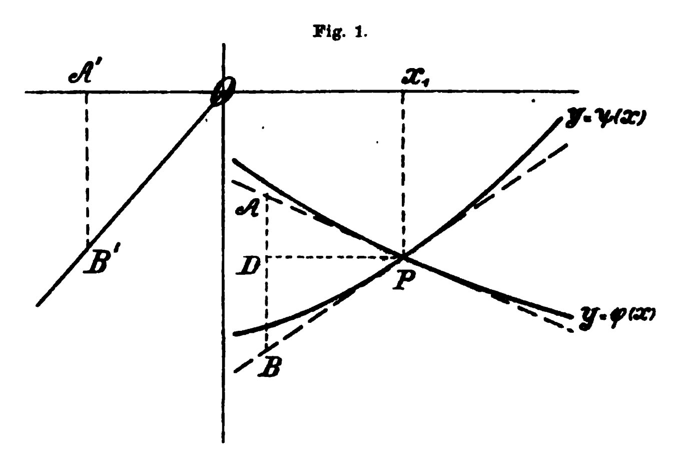
$$\varphi(x) = \psi(x)$$

und zeichnet die beiden Kurven:

(2) $$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad (3)\ y = \psi(x),$$

in einem Cartesischen Koordinatensystem auf, so bedeuten die Abszissen der Schnittpunkte jener Kurven die Wurzeln der Gleichung (1), wie bekannt.

Fig. 1.



Ein solcher Schnittpunkt sei P; die entsprechende Wurzel sei x_1. Durch Abmessen in der (maßstäblichen) Zeichnung erhält man den Näherungswert x_1' für die Wurzel x_1; damit ergebe sich durch Einsetzen in (2) und (3):

$$\varphi(x_1') = y_1' \quad \text{und} \quad \psi(x_1') = y_2'.$$

Es sei

$$y_1' - y_2' = \Delta y'.$$

Fig. 2.

Die dem Werte $\Delta y'$ entsprechende Verbesserung $\Delta x'$, die an x_1' anzubringen ist, läßt sich dann folgendermaßen graphisch ermitteln: An die Stelle der Kurven läßt man im Punkte P die entsprechenden Kurventangenten treten und trägt $\Delta y' = AB$ zwischen die Tangenten ein und zwar in einem — z. B. 10 mal — größeren Maßstab. In dem größeren Maßstab erhält man die Verbesserung $\Delta x' = PD$ und damit als genaueren Wert der Wurzel:

$$x_1'' = x_1' + \Delta x'.$$

Setzt man jetzt den neuen Näherungswert x_1'' in die Gleichungen (2) und (3) ein, so möge sich ergeben:

$$\varphi(x_1'') = y'' \quad \text{und} \quad \varphi(x_1'') = y_2''.$$

Es sei

$$y_1'' - y_2'' = \Delta y''.$$

In ganz ähnlicher Weise wie $\Delta x'$, bestimmt man nun graphisch die an x_1'' anzubringende Verbesserung $\Delta x''$. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens läßt sich die Wurzel mit jeder erwünschten Genauigkeit finden, wobei nur noch zu bemerken ist, daß man den Maßstab für das Dreieck PAB bei jeder neuen Verbesserung vergrößern muß.

Fig. 3.

Eine Erleichterung bei der graphischen Bestimmung der Verbesserungen $\Delta x'$, $\Delta x''$ ... beruht auf einem von Herrn Professor Mehmke ausgesprochenen Gedanken. Sind nämlich zwei oder mehr Verbesserungen zu bestimmen, so ist es zweckmäßig, durch O (s. Fig. 1) die Gerade OB' so zu ziehen, daß

$$OA' = PD = \Delta x' \quad \text{und}$$

$$A'B' = AB = \Delta y'.$$

Für ein bestimmtes Δy kann dann in bequemer Weise (hauptsächlich bei Anwendung von Millimeterpapier) das entsprechende Δx abgelesen werden.

Oft wird es möglich sein, $f(x)$ so zu zerlegen, daß eine der zwei Kurven $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$ eine Gerade wird. Dies kann z. B. erreicht werden durch Anwendung der von Professor **Mehmke** im „Civilingenieur" Band 35 S. 617 angegebenen logarithmographischen Methode.

1. Beispiel:

$$x^5 - 6x - 10 = 0.$$

Wir zerlegen in: $10y = x^5$ und $10y = 6x + 10$. Die Zeichnung (Fig. 2) ergibt:

$x_1' = 1{,}7.$ Durch Einsetzen dieses Wertes in die letzten beiden Gleichungen findet man $y_1' = 1{,}42$, $y_2' = 2{,}02$, also $\Delta y' = 0{,}6$. Die mitgeteilte Konstruktion liefert hierzu (siehe Figur 2) $\Delta x' = 0{,}14$. Auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$x_1'' = 1{,}84,\ y_1'' = 2{,}109,\ y_2'' = 2{,}104,\ \Delta y'' = 0{,}005,\ \Delta x'' = 0{,}0012;$$

$$x_1''' = 1{,}8388,\ y_1''' = 2{,}1021,\ y_2''' = 2{,}1033,\ \Delta y''' = 0{,}0012;$$

$$\Delta x''' = 0{,}00028;$$

$$x_1^{IV} = 1{,}83908,\ y_1^{IV} = 2{,}10376,\ y_2^{IV} = 2{,}10344;\ \Delta y^{IV} = 0{,}00032,$$

$$\Delta x^{IV} = 0{,}00007.$$

Also erhält man schließlich:

$$x_1^{V} = 1{,}83901.$$

Mit Hilfe der regula falsi erhält man, aber weniger schnell und bequem, denselben Wert bei der gleichen Anzahl von Verbesserungen.

2. Beispiel:

$$x = \cos x.$$

Zweckmäßige Zerlegung:

$$y = x \quad \text{und} \quad y = \cos x.$$

Mit drei Verbesserungen erhält man:

$$x = 42^0\, 20'\, 47''.$$

Die oben geschilderte Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Wurzeln einer numerischen Gleichung stützt sich auf ein Verfahren, das vom Feldmesser angewendet wird, wenn es sich um die Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunkts zweier Geraden (Grenzen von Grundstücken) handelt.

Stuttgart, im März 1904. P. Werkmeister.

Bücherschau.

K. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen. I. Band mit 87 Figuren. Leipzig 1902, G. J. Göschensche Verlagsbuchhandlung. Sammlung Schubert XXXIV. 8⁰, VIII u. 380 S. Preis: Geb. in Leinwd. M. 12.—.

Das Interesse für liniengeometrische Untersuchungen scheint gegenwärtig neu zu erwachen. Darauf deutet nicht nur das rasch aufeinanderfolgende

Erscheinen der liniengeometrischen Werke von Ball (Theory of screws, 2. Aufl. 1900), Study (Geometrie der Dynamen, 1901—1903), Jessop (A treatise on the line complex, 1903) und des vorliegenden hin, sondern auch das Hervortreten neuer Gesichtspunkte und Hilfsmittel bei der Behandlung dieser Disziplin in verschiedenen neueren Aufsätzen. Eine Hauptveranlassung zu diesem Fortschritte gab die Verwendung der Liniengeometrie in der Mechanik, insbesondere das Studium der Zusammensetzung endlicher Bewegungen.

Das Erscheinen eines elementar gehaltenen, aber weitergehenden Untersuchungen nicht ausweichenden Lehrbuches der Liniengeometrie ist daher freudig zu begrüßen, da seit dem Plückerschen Originalwerke keines erschienen ist, das die allgemein verwendete analytische Methode bevorzugt. Das vorliegende Buch ist aber umso freudiger zu begrüßen, weil es im Sinne der modernen Strömung beständig die Anwendungen auf die Bewegungslehre und Mechanik in den Vordergrund stellt, ferner weil es nicht einseitig analytisch vorgeht, sondern auch synthetische Betrachtungen einschaltet, wo eine Abkürzung des Weges hierdurch erreicht wird. Die eigenartige systematische Anordnung des umfangreichen Stoffes und die wissenschaftliche Vertiefung und Weiterbildung, die einzelne Teile bei der Bearbeitung erfahren haben, zeigen, daß das Buch mit großer Liebe und — wie noch hinzugefügt werden muß — Sorgfalt geschrieben ist.[1]

Von der Schraubenbewegung ausgehend wird im 1. Abschnitt durch Zuordnung eines jeden Punktes zur Normalebene seiner Bahn das Nullsystem und als Gesamtheit der Bahnnormalen aller Punkte das (Strahlen-)Gewinde erhalten, ferner das Nullsystem als reziproke Verwandtschaft ermittelt und seine analytische Darstellung angeschlossen. Bei der Untersuchung der Lage der Polarenpaare sowie der Anordnung der Gewindestrahlen tritt sofort eine der nachahmenswertesten Eigenarten des Buches hervor, nämlich das Bestreben, alle geometrischen Gebilde dem Leser anschaulich zu machen, so daß sie nicht bloß als mathematisch bestimmt erkannt werden, sondern auch von der Vorstellung leicht erfaßt und festgehalten werden können. Der 2. Abschnitt beschäftigt sich nach jedesmaliger kurzer aber klarer Entwicklung der erforderlichen mechanischen Begriffe mit dem Auftreten des Nullsystems (oder Gewindes) in der Theorie der Dynamen, Windungen und reziproken Kräftepläne ebener Fachwerke.

Erst im 3. Abschnitt werden nach Besprechung der tetraedrischen Punkt- und Ebenenzeiger die tetraedrischen und rechtwinkligen Linien-, Stab- und Feldzeiger eingeführt und Gleichungen zwischen ihnen im allgemeinen betrachtet. Der Verfasser hat es gewagt, für *Koordinaten* das von H. Graßmann vorgeschlagene deutsche Wort „*Zeiger*" durchgehends anzuwenden, das den Vorzug der Kürze und der leichten Verbindbarkeit mit anderen Worten besitzt. Referent kann ihm nur besten Erfolg hierzu wünschen. Auch sonst ist das Werk in vieler Hinsicht durch Graßmann günstig beeinflußt. Im 4. Abschnitt z. B. werden nicht bloß lineare *homogene* Gleichungen zwischen den 6 Linienzeigern und die hierdurch definierten Gewinde und

1) Ein auf S. 91 unterlaufenes Versehen, das eine kleine Änderung in der Beweisführung des Satzes 47 bedingt, wird (nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn Verfassers) am Schlusse des II. Bandes samt einigen wenigen Druckfehlern berichtigt werden.

Netze in Betracht gezogen sondern auch der durch eine *nicht homogene* lineare Gleichung bestimmte lineare *Stabwald* eingehender untersucht, als es schon durch Plücker geschehen. Eine genaue Untersuchung erfährt das Strahlennetz, insbesondere das ohne reelle Brennlinien, von dem mehrere sehr anschauliche Erzeugungen gelehrt werden. Der ziemlich umfangreiche beachtenswerte 5. Abschnitt ist den imaginären Elementen gewidmet. Analytisch eingeführt (als Gruppen komplexer Zahlen), werden ihnen reelle geometrische Gebilde nach v. Staudt zugeordnet und für deren analytisch definierte Lagenbeziehungen die entsprechenden geometrischen Tatsachen gesucht. Schließlich erfahren noch die imaginären Elemente der Flächen 2. Ordnung eine eingehendere Betrachtung.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit den linearen Gewindenmannigfaltigkeiten und ihren Anwendungen auf die Mechanik. Trägt man die Steigung 𝔨 (Parameter) eines Gewindes auf seiner Achse als gerichtete Strecke auf, wobei der Drehsinn der zugehörigen Schraubung die positive Richtung auf der Achse bestimmt, so ist das Gewinde durch einen Stab, seinen *Steigungsstab,* dargestellt. Jeder Gewindemannigfaltigkeit ist auf diese Weise eine Stabmannigfaltigkeit zugeordnet. Diese Mannigfaltigkeiten (darunter das *Zylindroid* und die Stabkongruenz $C_3^{(2)}$ des Gewindenetzes), die für die Bewegungslehre von besonderer Bedeutung sind, werden hier eingehender untersucht, als es bis dahin der Fall war, insbesondere was die möglichen Ausartungsfälle und die gestaltlichen Verhältnisse anbelangt.

Nach dieser lückenhaften Inhaltsangabe sei nur noch auf einige wertvolle historische und interessante philosophische Bemerkungen hingewiesen sowie auf die zahlreichen nach jedem Abschnitte beigegebenen Übungsaufgaben, die den pädagogischen Wert des Buches bedeutend erhöhen.

Wien, Juni 1904. E. Müller.

R. Redlich. Vom Drachen zu Babel. Eine Tierkreisstudie. Sonderabdruck aus Band 84 des „Globus". 4⁰. 13 S. mit 6 Abbildungen. Braunschweig 1903, Vieweg und Sohn.

Der Aufsatz knüpft an die Resultate der von der Deutschen Orientgesellschaft zur planmäßigen Durchforschung der Ruinen von Babylon entsandten Expedition an und widmet seine besondere Aufmerksamkeit dem bei der Aufdeckung des Istartores zum Vorschein gekommenen Mischgebilde, das Delitzsch den Drachen zu Babel nennt. Die Absicht des Verfassers geht dahin, zu zeigen, daß der Drache „aus den Symbolen der Tag- und Nachtgleichen und der Sonnenwenden zusammengebaut — das wandelnde Jahr" ist. Die zu diesem Behufe angestellte Untersuchung des babylonischen Tierkreises führt Herrn Redlich zu dem Ergebnis, daß die auf den erhaltenen babylonischen „Grenzsteinen", die der Zeit um 1000 a. C. entstammen, befindlichen Zeichen, nicht wie Hommel will, mit dem griechichen Zodiakus identisch sind, sondern einen „Tierkreis" des Äquators repräsentieren.

Die durch eine die Lage des Himmelsäquators für das Jahr 1000 a. C. wiedergebende Sternkarte unterstützten Darlegungen lassen sich nicht völlig von der Hand weisen, wirken vielmehr auf den ersten Blick sehr bestechend. Daß überhaupt jemals in Babylon ein Bilderkreis der Ekliptik entstanden sein konnte, sei durchaus unwahrscheinlich, da unser

griechischer Tierkreis als ein auffällig verzerrtes Spiegelbild des babylonischen Äquatorkreises erscheine. Die Vermutung, daß der Kopf des Tiamatdrachen im heutigen Sternbild der Leier zu suchen sei, hat manches für sich; denn der helle Hauptstern Wega war vor 13000 Jahren Polarstern und noch bis etwa 5000 a. C. in Mesopotamien circumpolar. — Doch werden wohl nicht viele Leser dem Verfasser in die vornehmlich gegen den Schluß der Abhandlung gehäufte Symbolik ohne Bedenken folgen, wenn auch der Mehrzahl der Konjekturen Geist und Scharfsinn nicht abgesprochen werden soll.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

Neue Bücher.

Analysis.

1. Larkman, A. E., The calculus for Engineers and others. Specially adapted for Board of Trade Examinations. London, Simpkin. 4 s. 6 d.
2. Malý, F., Grundriß der Mediationsrechnung. Graz, „Styria“. K. 12.
3. Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen. (Sammlung Schubert XXXII.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 7.

Astronomie und Geodäsie.

4. Förster, Wilh., Beiträge zur Ausgleichung der fundamentalen Ortsbestimmungen am Himmel. (Astronom. Abhandlgn. Nr. 5.)
5. Lockyer, N. J. N., Astronomia. Nuova versione con note ed aggiunte di G. Celoria. 5ª ediz. (Manuali Hoepli.) Milano. L. 1.50.

S. auch Nr. 48.

Biologie.

6. Pearson, Karl, Mathematical contributions to the theory of Evolution. XIII On the theory of Contingency and its relation to Association and normal Correlation. With 2 diagrams. London, Dulau. 4 s.

Darstellende Geometrie, Photogrammetrie.

7. Chollet, T., Traité de géométrie descriptive. 1ère partie (classes de première C et D). Paris, Vuibert et Nony. Frs. 2.
8. Hjelmslev, J., Deskriptivgeometri. Grundlag for forelaesninger paa polyteknisk laeranstalt. I. halvdel. Odense. Kr. 5.
9. Lawrence, W. H., Principles of architectural perspective. 2d ed. Boston, Clarke. Cloth. $ 1.75.
10. Pesch, A. J. van, Leerboek der beschrijvende meetkunde, 3e druk, met 150 fig. in den tekst en 4 uitsl. platen. Bewerkt door P. Wijdenes. Deventer, Dixon. Fl. 1.50.
11. Schell, Ant., Der photogrammetrische Stereoskopapparat. Wien, Seidel & Sohn. M. 1.
12. Schlesser, E., Géométrie descriptive et Géométrie cotée. Classes de première et de mathématiques (préparation à l'Ecole navale, etc.) (Programmes du 31 mai 1902.) Paris, Delagrave. Frs. 3.50.
13. Vonderlinn, J., Darstellende Geometrie f. Bauhandwerker. Zum Gebrauch an Baugewerkschulen u. ähnl. techn. Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. 1. Tl. Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinkl. u.

schiefwinkl. Axonometrie, einfache Dachausmittelungen. 2. verm. Aufl. Bremerhaven, v. Vangerow. M. 3.

Mechanik.

14. Besant, W. H. and Ramsey, A. S., A treatise on Hydromechanics. Part I, Hydrostatics. 6 th. ed. London, Bell. 6 s.
15. Duhem, Pierre, Recherches sur l'hydrodynamique. 2e série. Les conditions aux limites. Le théorème de Lagrange et la viscosité. Les coefficients de viscosité et la la viscosité au voisinage de l'état critique. Paris, Gauthier-Villars.
16. Hauber, W., Statik II. Angewandte (techn.) Statik. (Sammlung Göschen Nr. 179.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
17. Macrès, Essai sur la philosophie de la mécanique. Paris, Marescq. Frs. 2.50.

Physik.

18. Besson, Paul, Le radium et la radioactivité. Propriétés générales. Emplois médicaux. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 2.75.
19. Blondlot, R., Rayons „N". Recueil des communications faites à l'Académie des sciences. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 2.
20. Bullerdieck, Adf., Gültigkeit des Massenwirkungsgesetzes f. starke Elektrolyte. Diss. Göttingen 1903, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1.80.
21. Bottone, S. R., Radium, and all about it. London, Whittaker. 1 s.
22. Boynton, W. P., Applications of the Kinetic Theory to gases, vapours, &c. London, Macmillan. 7 s.
23. Gerard, Eric, Leçons sur l'électricité. I. Théorie de l'électricité et du magnétisme. Électrométrie. Théorie et construction des générateurs électriques. 7e éd. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.
24. Gerdien, Hans, Über den Einfluß der Torsion auf das magnetische Moment zirkular magnetisierter Nickel- u. Eisendrähte. Diss. Leipzig. Göttingen 1903, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2.40.
25. Graetz, L., Die Elektrizität u. ihre Anwendungen. 11. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. M. 7, geb. in Leinw. M. 8.
26. Hofmann, Karl, Die radioaktiven Stoffe nach dem neuesten Stande der wissenschaftlichen Erkenntnis. 2., verm. u. verb. Aufl. Leipzig, Barth. M. 2.
27. Kelvin, Lord, Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light. Founded on A. S. Hathaway's stenographic report of twenty lectures delivered in Johns Hopkins University, Baltimore, in October 1884; followed by twelve appendices on allied subjects. London, Clay. Cloth. 15 s.
28. Klimpert, Rich., Lehrbuch der Akustik. 1. Bd.: Periodische Bewegungen, insbesondere Schallwellen. Mit 257 Erklärungen u. 106 in den Text gedr. Fig., nebst e. Sammlung v. 70 gelösten u. analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Für das Selbststudium u. zum Gebrauche an Lehranstalten bearb. nach System Kleyer. Bremerhaven, v. Vangerow. M. 4.50.
29. Lodge, Sir Oliver, Modern views on matter. 3rd. ed. London, Clarendon Press. 2 s.
30. Lommel, Lehrbuch der Experimentalphysik. 10. u. 11., neubearb. Aufl., hrsg. v. Walt. König. Leipzig, Barth. M. 6.40, geb. in Leinw. M. 7.20.
31. Lorenz, Hans, Lehrbuch der technischen Physik. 2. Bd. Technische Wärmelehre. München u. Berlin, Oldenbourg. M. 13.
32. Marchis, L., Thermodynamique. Notions fondamentales. (Bibliothèque de l'Elève-Ingénieur, Physique industrielle.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 5.
33. Mayer, Hans, Die neueren Strahlungen. Kathoden-, Kanal-, Röntgen-Strahlen u. die radio-aktive Selbststrahlung (Becquerelstrahlen). Vom Standpunkte der modernen Elektronentheorie unter Berücksichtigung der neueren experimentellen

Forschungsresultate behandelt u. im Zusammenhange dargestellt. M.-Ostrau, Papauschek. M. 1.50.

34. Murani, Oreste, Fisica. 7ª ediz. accresciuta e riveduta dall' autore. (Manuali Hoepli.) Milano. L. 3.

35. Naudet, G., Expériences d' électricité. Paris, Desforges. Frs. 2.

36. Poincaré, H., Théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. La télégraphie sans fil. (Scientia Nr. 23.) Paris, Naud. Cart. Frs. 2.

37. Righi, Augusto, La moderna teoria dei fenomeni fisici (radioattività, ioni, elettroni.) 2ª ediz. con aggiunte. Bologna. L. 3.

38. Rothé, Edmond, Contribution à l' étude de la polarisation des électrodes (thèse). Paris, Gauthier-Villars. Frs. 6.

39. Rutherford, E., Radio-Activity. Cambridge, University Press. 10 s. 6 d.

40. Schwienhorst, Heinr., Experimentelle u. theoretische Untersuchungen an der positiven ungeschichteten Lichtsäule. Diss. Göttingen 1903, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1.60.

41. Science Physics Papers. Being the questions set at the Intermediate Science Examinations of the University of London from 1875—1903. (University Tutorial Series.) London, Clive. 2 s. 6 d.

42. Semenov, Jules, Recherches expérimentales sur l' étincelle électrique (thèse). Paris, Gauthier-Villars. Frs. 4.

43. Soddy, Frederick, Die Entwicklung der Materie enthüllt durch die Radioaktivität. Wilde-Vorlesung. Übers. v. G. Siebert. Leipzig, Barth. M. 1.60.

44. Thomson, J. J., Electricity and Matter. With diagrams. London, Constable. 5 s.

45. Valentiner, Siegfr., Die elektromagnetische Rotation u. die unipolare Induktion in kritisch-historischer Behandlung. Karlsruhe, Braun. M. 2.

46. Vasilesco-Karpen, M. N., Recherches sur l' effet magnétique des corps électrisés en mouvement (thèse). Paris, Gauthier-Villars. Frs. 6.

Rechenapparate, Tafeln.

47. Crelle's, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren u. Dividieren m. Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern u. sicherer machen. Mit e. Vorworte von C. Bremiker, 9. Ster.-Aufl. (Mit deutschem u. französ. Text.) Berlin, Reimer. geb. in Leinw. M. 15.

48. Gauss, F. G., Die Teilung der Grundstücke, insbes. unter Zugrundelegung rechtwinkliger Koordinaten. Nebst vierstell. logarithm. u. trigonom. Tafeln, e. Quadrattafel, sowie e. Multiplikations- u. Divisionstafel. 4. Aufl. 2 Tle. Berlin, v. Decker. geb. in Leinw. M. 7.60.

49. Levitus, D., Rechenmaßstab. Graphische Tafel zum Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren, Radizieren sowie zur Logarithmenberechnung u. zu allen trigonometrischen Berechnungen. Freiberg, Frotscher. M. 1.50.

50. Rex, Frd. Wilh., Fünfstellige Logarithmentafeln. 1. Heft: Taf. I—III. Die Logarithmen der Zahlen u. der goniometrischen Funktionen. Ster.-Druck, 2. Aufl. Stuttgart, Metzler. M. 1.30.

Verschiedenes.

51. Ahrens, W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte u. ungeflügelte Worte. Leipzig, Teubner. M. 8.

52. Fischer, V., Vektordifferentiation u. Vektorintegration. Leipzig, Barth. M. 3.

53. Lorenz, L., Oeuvres scientifiques. Revues et annotées par H. Valentiner. T. II. 2ᵉ fasc. Copenhagne, Lehmann & Stage.

54. Mewes, Rud., Dampfturbinen, deren Entwicklung, Bau, Leistung u. Theorie, nebst Anhang üb. Gas- u. Druckluftturbinen. Berlin, Krayn. M. 7.50, geb. M. 8.50.

55. Schütz, Ludw. Harald, Die Fortschritte der techn. Physik in Deutschland seit dem Regierungsantritt Kaiser Wilhelm II. Rede. Berlin, Bornträger. M. —.50.
56. Stokes, Sir George Gabriel, Mathematical and physical Papers. Vol. 4. Cambridge. University Press. 15 s.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Ahrens, W., Scherz u. Ernst in der Mathematik, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 51.
Arndt, Erdmann, Einführung in die Stereometrie als Pensum des ersten Vierteljahres der 1. Klasse. Progr. 4te Realsch. Berlin, Ostern 1904. Berlin, Weidmann.
Besson, P., Le radium . . ., s. N. B. 18.
Lorenz, H., Lehrbuch d. techn. Physik, II, s. N. B. 31.
Blondlot, R., Rayons „N", s. N. B. 19.
Duhem, P., Recherches sur l' hydrodynamique. 2e série.
Fischer, V., Vektordifferentiation u. Vektorintegration, s. N. B. 52.
Fouët, E. A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann. Paris, Gauthier-Villars.
Geistbeck, Michael, Leitfaden der mathematischen u. physikalischen Geographie für Mittelschulen u. Lehrerbildungsanstalten. 24., verbesserte u. 25. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 1.40, geb. M. 1.80.
Gérard, E., Leçons sur l' électricité, I, s. N. B. 23.
Hauber, W., Statik, II., s. N. B. 16.
Hecker, O., Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1903. (Veröffentl. des K. Preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 16.) Berlin, Stankiewicz.
Hiber, Gravitation als Folge einer Umwandlung der Bewegungsform des Äthers im Inneren der wägbaren Materie. München, Lukaschik. M. 2.
Lorenz, L., Oeuvres scientifiques. II 2, s. N. B. 53.
Kewitsch, G., Zweifel an der astronomischen u. geometrischen Grundlage des 60-Systems. (Sonderabdruck aus: Zeitschr. f. Assyriologie Bd. XVIII.) Straßburg, Trübner.
Marchis, L., Thermodynamique, s. N. B. 32.
Moore, Eliakim Hastings, Subgroups of the generalized finite modular group. (From: The decennial publications of the University of Chicago, vol. IX.)
Poincaré, H., Théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes, s. N. B. 36.
Riehl, Alois, Hermann von Helmholtz in seinem Verhältnis zu Kant. Berlin, Reuther & Reichard. M. —.80.
Runge, C., Theorie und Praxis der Reihen, s. N. B. 3.
Schlesinger, L., Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. 2., revidierte Aufl. (Sammlung Schubert XIII.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 8.
Schlesinger, Josef, Über die Sprache in den mathematischen Schulbüchern. Progr. d. Lessing-Gymn. Berlin, Ostern 1904. Berlin, Weidmann.
Schulze, Edm., Kurven 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt u. einer Spitze. Mit 2 Taf. Progr. d. Friedrichs-Werderschen Gymn. Berlin, Ostern 1904. Berlin, Weidmann.
Teixeira, F. Gomes, Obras sobre Matematica. Por ordem do Governo Português. Vol. I. Coimbra, Imprensa da Universidade.
Veröffentlichung des kgl. preuß. geodät. Instituts, neue Folge Nr. 15. Astronomisch-geodät. Arbeiten I. Ordnung, Bestimmung der Längendifferenz Potsdam-Greenwich i. J. 1903. Berlin, Stankiewicz.

Krazer, Dr. **Adolf,** o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. [XXIV u. 509 S.] In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil: Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. Kurt Hensel. Mit 11 Fig. im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 20.—, geb. n. ℳ 21.—

Lobatschefskijs, N. G., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 39 Figuren im Text und einer Tafel am Schluß. (A. u. d. Titel: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XIX. Heft.) gr. 8. 1904. [U. d. Pr.]

Müller, Conrad H., Göttingen, Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik (Sonderabdruck aus dem XVIII. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik). [93 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 2.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor an der Universität Gießen, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 4.40.

Nielsen, Dr. **Niels,** Privatdozent an der Universität Kopenhagen, Inspektor des Mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 14.—

Ostenfeld, A., Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen. Technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen. Deutsche Ausgabe besorgt von D. Skouge. Mit 33 lithographierten Tafeln. [VIII u. 457 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 12.—

Pfeiffer, Dr. **Emanuel,** Professor an der Königl. Industrieschule zu München, physikalisches Praktikum für Anfänger. Dargestellt in 25 Arbeiten. Mit 47 in den Text gedruckten Abbildungen. [VIII u. 150 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 3.60.

Poincaré, Henri, Membre de l'institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. geb. n. ℳ 4.80.

Reichel, Dr. **Otto,** Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 2.40.

Salmon, George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweiter Teil. Sechste Auflage. [XXIV u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—

Schulze, Bruno, Generalmajor und Chef der Topographischen Abteilung der Landesaufnahme, Das militärische Aufnehmen, unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Königl. Preuß. Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der Königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearbeitet. Mit 129 Figuren im Text. [XIII u. 305 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 8.—

Seliwanoff, Demetrius, Priv. Dozent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 4.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Dritter Band. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 43 in den Text gedr. Fig. [XII u. 768 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 9.—, geb. n. ℳ 10.—

Auch in zwei Lieferungen:

1. Lieferung: Differentialgleichungen. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—
2. Lieferung: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 33 in den Text gedruckten Fig. [XII u. 464 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 3.—

Stephan, P., Regierungsbaumeister, Lehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen, Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 255 Figuren im Text. [VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 7.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein,** Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 8.— [Bd. II u. III. 1904. Unter d. Presse.]

Im vorigen Jahre erschien:

Das Ampère'sche elektrodynamische Elementarpotential. Von Franz Kerntler. (17 Seiten.)

Diese Schrift steht, soweit der Vorrat reicht, Interessenten auf ein an den Verfasser (**Budapest, II. Bezirk, Albrechtstraße**) gerichtetes Verlangen unentgeltlich und franko zur Verfügung.

Eine zutreffende Besprechung derselben findet sich in dem diesjährigen Februar-Hefte des Pariser „Journal de Physique théorique et appliquée".

EINLADUNG ZUM
III. INTERNATIONALEN
MATHEMATIKER-KONGRESS
VOM 8.–13. AUGUST 1904 IN HEIDELBERG.

Der Ausschuß für die Vorbereitung des III. internationalen Mathematiker-Kongresses:

A. Ackermann-Teubner-Leipzig. A. Brill-Tübingen. M. Cantor-Heidelberg. M. Disteli-Straßburg. W. v. Dyck-München. A. Gutzmer-Jena. G. Hauck-Berlin. D. Hilbert-Göttingen. F. Klein-Göttingen. A. Kneser-Berlin. L. Königsberger-Heidelberg. A. Krazer-Karlsruhe. J. Lüroth-Freiburg. R. Mehmke-Stuttgart. F. Meyer-Königsberg. M. Noether-Erlangen. C. Runge-Hannover. H. Schubert-Hamburg. F. Schur-Karlsruhe. H. A. Schwarz-Berlin. P. Stäckel-Kiel. J. P. Treutlein-Karlsruhe. H. Weber-Straßburg.

Wegen Programm-Zusendung bittet man sich zu wenden an
Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe i. B., Westendstraße 57.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner in Leipzig,** welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND C. RUNGE IN HANNOVER.

51. BAND. 2. HEFT.

MIT 41 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 15. November 1904.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

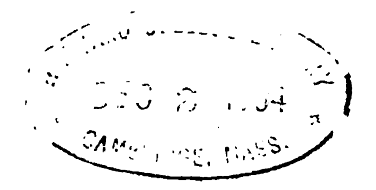
zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Hannover-Kirchrode, Kaiser Wilhelmstr. 9, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☛ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
F. Biske, A. Börsch, G. Bohlmann, K. Doehlemann, V. Fischer, G. Hamel, L. Henneberg, K. Heun, J. Horn, A. Kneser, L. Krüger, A. V. Leon, F. Ludwig, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, R. v. Mises, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, K. Schwarzschild, A. Sommerfeld, P. Stäckel, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, E. Wölffing.



Untersuchung der Festigkeit von Eisenbetonbauten.

Von Ing. MARIO BARONI in Mailand.

Indem ich hiermit meine Untersuchungen über einige Fälle kleinster Veränderungen bei Eisenbetonbauten veröffentliche, habe ich nicht die Absicht eine neue Rechnungsmethode für derartige Bauten anzugeben.

Ich will nur an der Hand einer strengen analytischen Methode zeigen, wie es möglich ist, die über solche Konstruktionen bestehenden Hypothesen zu kontrollieren, indem gleichzeitig nach dem Fortschritt dieser Veränderungen bestimmt wird, was für eine Hypothese der Wahrheit mit größter Wahrscheinlichkeit entspricht.

Die Grundsätze meiner Theorie, von jeder Deformationshypothese unabhängig, sind die bis jetzt allgemein angenommenen.

Die bekanntesten Theorien sind schon zur Genüge in den Arbeiten von Guidi, Canevazzi, Caracciolo, Considère, Ritter, Harel de la Noé und Cristophe erörtert. Diese Theorien lassen sich kurz folgendermaßen zusammenfassen:

1. Jeder senkrechte Querschnitt durch einen gebogenen Körper bleibt während des Deformationsvorganges eben, so daß sich jedes aus Eisen oder Beton bestehende Sektionselement um eine gemeinsame neutrale Achse gleichwinklig dreht.

Der Spannungswiderstand jedes Betonelements bei konstantem Elastizitätsmodul ist der Verlängerung proportional und beträgt etwa $^1/_{10}$ des Elastizitätsmoduls.

2. Die zweite Theorie hält am linearen Deformationsgesetz fest, aber nimmt an, daß der Spannungswiderstand der Betonelemente bei Verlängerungen den gewöhnlichen Elastizitätsgesetzen bei nicht armiertem Beton entspricht, so daß anfangs der Elastizitätsmodul konstant bleibt; aber später beim Überschreiten der Elastizitätsgrenze verringert er sich allmählich, und der größte anzunehmende Widerstand ist nicht höher als die gewöhnliche Betonbruchbelastung.

3. Ritter stellte eine dritte Hypothese auf, bei der vorausgesetzt wird, daß ein senkrechter Querschnitt nicht eben bleibt, sondern sich seine Oberfläche parabolisch ändert, indem angenommen wird, daß die Elemente des Eisens an der Oberfläche der gekrümmten Sektion bleiben.

Es gilt auch in diesem Falle für die Widerstände, was die erste Hypothese angibt.

4. Hennebique stellt keine besonderen Hypothesen über die Deformation auf, sondern er beschränkt sich darauf, nur den Betonzugwiderstand außer acht zu lassen.

Es gibt noch andere Theorien, z. B. die von Piketty und anderen, die man jedoch als nur kleine Umgestaltungen der zweiten, in bezug auf das Zugwiderstandsgesetz des Betons betrachten kann. Es wird jedoch dabei immer vorausgesetzt, daß die Elemente des Eisens in der Ebene des Schnittes bleiben, d. h. daß die Formveränderung der verschiedenen zwischen zwei benachbarten Schnitten gelegenen Elemente nur von ihrem Abstand von der Fläche der neutralen Achsen, nicht aber von ihrem eigenen Wesen abhängt. Dies ist eben bezeichnend für alle bis jetzt aufgestellte Hypothesen, mit Ausnahme einer von Harel de la Noé angedeuteten, welcher annahm, daß die Elemente des Eisens durch den sie umgebenden Beton fortgerissen werden.

Und da die Resultate meiner Untersuchungen in einigen Deformationsperioden den bisher gegebenen Erklärungen und der Hypothese Harel de la Noés widersprechen, so glaube ich, daß sie Fachmänner um so mehr interessieren müssen.

Die erste Theorie verlor infolge der schönen Versuche Considères an Wert; auch Résal beschränkte sich darauf, sie nur auf die erste Periode der Deformation anzuwenden, während deren jedes Betonelement einen Widerstand, geringer als die Elastizitätsgrenze, auszuhalten hat. Jenseits dieser Grenze gab er keine Theorie an. Dagegen hat jetzt die zweite Theorie (die mittlere von Canevazzi) und die von Hennebique besonders Ansehen erlangt. Auch ich glaube, daß beide für die Praxis genügende Resultate geben, die bei ersterer für die Veränderungen des Eisens etwas zu gering, für die des Betons etwas übertrieben sind, während Hennebique die Veränderungen des Eisens überschätzt.

Aber bei der Prüfung der verschiedenen Hypothesen, allein vom theoretischen Standpunkt aus, erregten ihre auffallenden Ungewißheiten und Widersprüche großen Zweifel darüber, wie weit sie besonders in den Fällen, wo Eisen oder wo Beton vorwiegt, der Wahrheit nahe kommen. Das hat in mir den Wunsch geweckt zu untersuchen, ob von jeder Hypothese abgesehen, es möglich wäre, die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit zu behandeln, in der Hoffnung, dabei die Gesetze der verschiedenen Deformationsperioden zu entdecken.

Die Grundsätze der rationellen Statik genügen zur Lösung der Aufgabe nicht, weil diese infolge der unbestimmten Verteilung der Widerstände im Eisen und im Beton selbst unbestimmt ist.

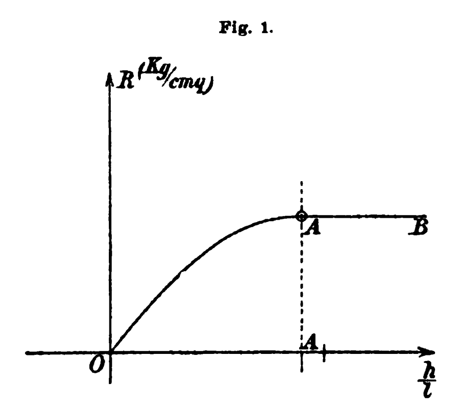
Man mußte also das Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit, das in der Bauwissenschaft so fruchtbar an Erfolgen war, zu Hilfe rufen. Es könnte zwar scheinen, daß die große Adhäsion zwischen Beton und Eisen die Veränderungen einiger Werte des Problems beeinflusse und daher die Anwendung dieses Grundsatzes beschränke: aber meiner Meinung nach ist diese Adhäsion nur ein inneres Band in dem von den beiden Materialien gebildeten System, von welchem die Verteilung der Widerstände im Beton, sowie die Veränderungen an der Oberfläche des Körpers abhängen, und kann eben darum in den Kraftgleichungen und in den Deformationsbewegungen, aus welchen wir das Minimalgesetz herleiten werden, analytisch nicht ausgedrückt werden. Um dies an einem mechanischen Beispiel zu erläutern, erscheint diese Adhäsion wie die Verbindungen in einem Gelenksystem mit sehr zahlreichen Stäben. Sie beeinflussen zwar die Deformation, aber finden in den Gleichungen der Kräfte und Arbeiten keinen Ausdruck. Eben wie in diesem Falle kann ich also den Grundsatz der geringsten Arbeit anwenden: in den folgenden Gleichungen werden einige Werte eine besondere Bedeutung haben, einige veränderliche Werte werden sich nur in bestimmter bekannter Weise verändern können; ihre Veränderungen werden Beziehungen aufweisen, verschieden von denen, die sie hätten, wenn die Verbindung nicht vorhanden wäre, aber diese wird in den Gleichungen nicht besonders zum Ausdruck gelangen, wie eine Kraft, welche auf das ganze Gleichgewicht Einfluß hat.

Ich wollte aber die Lösung des allgemeinen Problems der allmählich gebogenen Körper mit Hilfe einfacherer Probleme erreichen (der Körper wird nur gedehnt, die Adhäsion zwischen den beiden Materialien wird nicht berücksichtigt). Und auch die Lösung dieser letzteren Probleme ist sehr wertvoll, da sich daraus annähernd richtige Rechnungstheorien ergeben, deren Anwendung für die Praxis genügend ist, gleichviel welches die Beziehung zwischen den Sektionsflächen des Eisens und des Betons ist.

Über Zug- und Druckwiderstand des Betons werde ich nur das sagen, was nötig ist, um die Bedeutung der Symbole zu verstehen, die in den folgenden Untersuchungen über gedehnte oder gebogene Körper aus armiertem Zement zur Anwendung gelangen. Der Zug- oder Druckwiderstand eines beliebigen Körpers ist vollkommen bestimmt, wenn das Verhältnis des einheitlichen Widerstandes zur Deformation der Längeneinheit bekannt ist, d. h., wenn man eine Kurve, wo die Ordinaten die einheitlichen Widerstände (R) und die Abszissen die einheitlichen Deformationen $\left(\frac{h}{l}\right)$ darstellen, zeichnen kann. Die auf diese

Weise für die verschiedenen Materialien gezogenen Linien besitzen einige gemeinsame Eigenschaften. Sie beginnen geradlinig oder ungleich gekrümmt, die Konkavität nach der Abszissenachse $\frac{h}{l}$ gerichtet, und in einem Punkte A oder kleinem Abstande (dessen Ordinate die Bruchbelastung ist) gehen sie in eine fast gerade der $\frac{h}{l}$ Achse parallele Linie über, oder (ohne daß man den Punkt A bestimmen kann) streben sie, eine der Achse $O\frac{h}{l}$ parallele Richtung anzunehmen, indem sie Asymptoten einer Geraden werden (Fig. 1).

Fig. 1.



Beim Beton (falls R zwischen 0 und 50 kg pro qcm Druck variiert) wird, infolge der Bachschen Versuche, die oben erwähnte Linie durch die Gleichung:

$$R^n = E\frac{h}{l}$$

bestimmt, worin E und n je nach den Bestandteilen des Betons zwischen folgenden Grenzen schwanken:

E von $2{,}07 \times 10^5$ bis $4{,}57 \times 10^5$ (Einheiten: Kilo und qcm)

n von 1,09 bis 1,21.

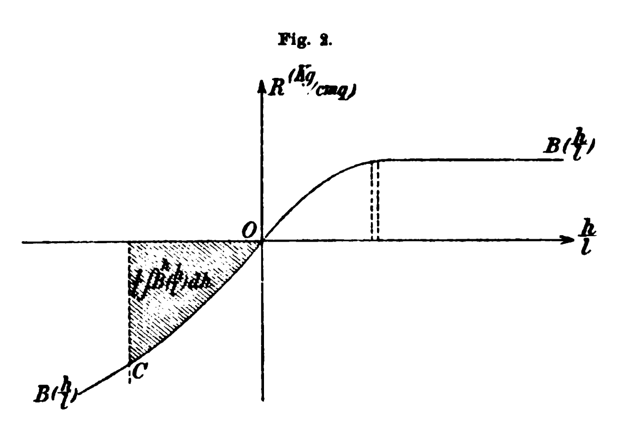
Für den gewöhnlichen Beton kann man E annähernd $= 2 \times 10^5$ und n zwischen 1,41 und 1,21 ansetzen Die Ordinate der Kurventangente am Punkte A, also am Ende der Kurve (Bruchbelastung) hat einen Wert von $190 \div 180$ kg pro qcm. Wo es sich um Zug handelt, ist die Form der Kurve weniger bestimmt. Sie fängt mit einer Geraden an, deren Gleichung

$$R = E\frac{h}{l}$$

ist (E ungefähr $= 2 \times 10^5$), dann krümmt sie sich plötzlich (was einige unberücksichtigt lassen), um in eine Tangente, deren Ordinate zwischen 12 und 19 kg pro qcm schwankt, überzugehen. Beide Linien können in einem einzigen Diagramm zusammengefaßt werden (Fig. 2); auf diesem bedeuten die positiven $\frac{h}{l}$ die einheitlichen Verlängerungen, die negativen die einheitlichen Verkürzungen, ebenso bedeuten die positiven R die einheitlichen Zug-, die negativen die einheitlichen Druckwiderstände.

Bei der Berechnung gezogener und gebogener Körper werde ich diese Linie durch die Funktion $B\left(\frac{h}{l}\right)$ darstellen: sie läßt sich nicht analytisch mit einem einzigen Ausdruck bestimmen, infolge ihrer Veränderungen in den verschiedenen Deformationsperioden; es bedeutet also B nur ein Symbol, das je nach Phase und Wesen der Deformation verschieden erscheint. Man muß also die bestimmten Integrale, wo die Funktion B oder deren Derivate zu $\frac{h}{l}$ vorkommt, als die Summen so vieler Integrale ansehen, als Formen der Funktion zwischen den Grenzen der Integrale vorhanden sind.

Fig. 2.



Unter diesen Integralen hat eines eine besondere physikalische Bedeutung, nämlich:

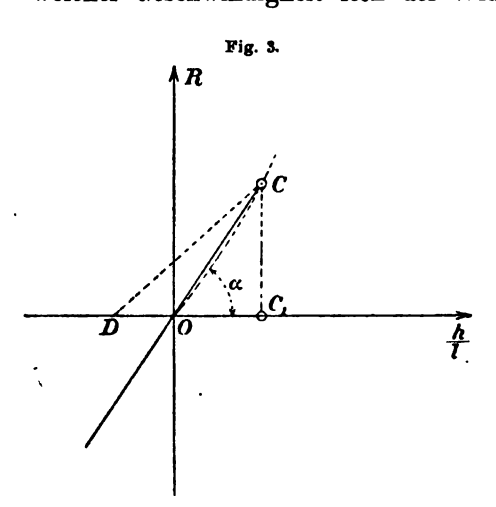
$$\int_0^{\frac{h}{l}} B\left(\frac{h}{l}\right) d\frac{h}{l} = \frac{1}{l}\int_0^{h} B\left(\frac{h}{l}\right) dh$$

als Maß für die Deformationsbewegung eines Körpers mit der ursprünglichen Länge l und dem Querschnitt 1, wenn die Länge von 1 nach $\left(1+\frac{h}{l}\right)$ übergeht; während $\int_0^h B\left(\frac{h}{l}\right) dh$ dieselbe Arbeit für einen Körper von der Länge l und dem Querschnitt 1 angibt.

Die Derivate $\frac{dB}{d\left(\frac{h}{l}\right)}$ wird auf dem Diagramm von dem Winkelparameter der Tangente gegeben: auf der geradlinigen Strecke, mit welcher das Diagramm sowohl des Zuges wie des Druckes beginnt, fällt dieser Parameter zusammen mit dem der vom Anfangspunkt der Koordinaten bis zu dem auf der Linie B betrachteten Punkte gezogenen Sehne, und sein numerischer Wert mißt das Verhältnis zwischen Koordinate und Abszisse, zwischen Widerstand und Deformation, mit anderen Worten den Elastizitätsmodul.

An den krummen Strecken ist er kleiner als der gemeinsame Elastizitätsmodul ($\operatorname{tg} \alpha$) (Fig. 3); während jedoch seine physikalische Bedeutung auf diesen Strecken ihren Wert verliert, da der Widerstand nicht mehr geradlinig wächst, behält die Derivate selbst auf noch so kleinen Strecken immer ihre Bedeutung als Verhältnis zwischen der Veränderung im Widerstand und in der Verlängerung und zeigt, mit welcher Geschwindigkeit sich der Widerstand als Funktion der Deformation verändert. Das hat bei den folgenden Berechnungen der Deformationsarbeit eine besondere Wichtigkeit, daher werde ich der Kürze wegen immer in der Folge Elastizitätsmodul den Winkelparameter der Tangente und nicht das Verhältnis zwischen einheitlichem Widerstand und einheitlicher Deformation nennen. Die Untertangente $C_1 D$ mißt das Verhältnis zwischen dem einheitlichen Widerstand und dem auf obige Weise bestimmten Elastizitätsmodul. Ich werde sie virtuelle Deformation nennen, um sie von der wirklichen Deformation, mit welcher sie bloß in der ersten geradlinigen Phase des Diagramms übereinstimmt, zu unterscheiden: sie wird unendlich, wenn sich der Punkt C der Bruchgrenze nähert, während der Elastizitätsmodul Null wird. Ebenso werde ich bei einem Element des Normalschnittes durch einen gebogenen Körper virtuelle Drehung den Winkel nennen, in dem es sich um die neutrale Achse des Schnittes drehen müßte, um eine wirkliche, seiner virtuellen gleiche Deformation zu bekommen. Die Linie, welche den Widerstand der Flächeneinheit des Eisens bei Zug oder Druck darstellt, besitzt auch die vorgenannten allgemeinen Eigenschaften, nur verläuft sie zuerst gerade in beträchtlichem Maße (bis ungefähr 1500 kg pro qcm), dann in regelmäßiger Krümmung. Man kann also auch in diesem Falle von virtuellen Deformationen sprechen, dieselben werden aber bei den folgenden Berechnungen im allgemeinen den wirklichen entsprechen, da im allgemeinen angenommen wird, daß der Widerstand des Eisens noch innerhalb der ersten Phase liegt.

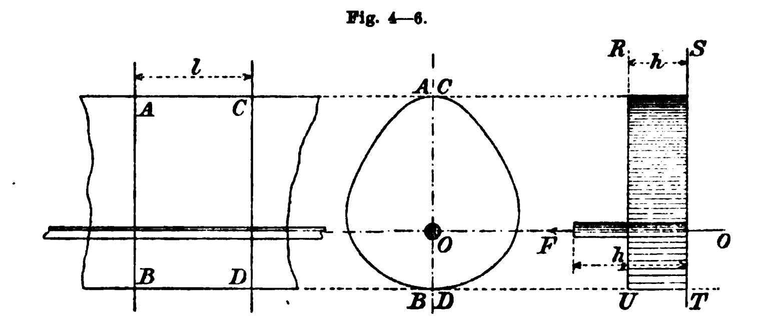
Fig. 3.



Zugwiderstand eines aus Eisen und Beton bestehenden gedehnten Körpers ohne Adhäsion zwischen Eisen und Beton.

Man denke sich einen aus Eisen und Beton bestehenden zylindrischen Körper mit beliebigem Durchschnitt: es bestehe die innere Armierung aus eisernen Stäben von konstantem Schnitt (dessen Form keinen Einfluß hat) mit geradliniger Achse, die der Achse des Körpers aus Beton parallel sei: ferner mögen die Schwerpunkte der beiden senkrechten Querschnitte durch das Eisen und den Beton in O zusammentreffen (Fig. 4—6). Der Einfachheit halber hat man die Armierung in Fig. 4 und 5 als aus einem einzigen Rundeisen bestehend gezeichnet.

Fig. 4—6.



Es unterliege nun der Körper längs seiner Schwerpunktachse der Wirkung der Zugresultante F; gesetzt ihre Komponenten verteilen sich auf die verschiedenen Sektionselemente so wie die Widerstände, und die Adhäsion zwischen Eisen und Beton sei gleich Null, so daß man sie als ein einer gemeinsamen Zugkraft ausgesetztes System betrachten kann, so ergibt sich folgende Frage:

Wie müssen die Spannungswiderstände, in einer beliebigen Sektion des Körpers, zwischen Eisen und Beton verteilt sein, damit die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum werde?

Ich setze ferner voraus, daß in dem Betonschnitt die Spannungswiderstände (folglich auch die Verlängerungen) gleichmäßig verteilt sind, so daß während der Deformation jeder Querschnitt eben, und zur Schwerpunktachse senkrecht bleibt. Dasselbe nehme ich für die Armierung an. Ich ziehe jetzt eine Schicht des Körpers in Betracht, die zwischen den Normalschnitten AB und CD liegt und bezeichne mit

l = die Länge der Fibern zwischen zwei Sektionen vor der Deformation.

h_1 = die Verlängerung der Eisenfibern.

$\frac{h_1}{l}$ ihre einheitliche Verlängerung.

$A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = den entsprechenden einheitlichen Widerstand.

$\frac{1}{l}A'\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = die Derivate von $A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ nach h_1.

Ω_1 = den gesamten Querschnitt der Armierung.

h = die Verlängerung der Betonelemente.

$\frac{h}{l}$ = die einheitliche Verlängerung derselben.

$B\left(\frac{h}{l}\right)$ = den entsprechenden einheitlichen Widerstand.

$\frac{1}{l}B'\left(\frac{h}{l}\right)$ = die Derivate nach h der Funktion $B\left(\frac{h}{l}\right)$.

Ω = die Fläche des Betonquerschnittes.

Es ist also:

$\Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ der gesamte Widerstand der Armierung.

$\Omega B\left(\frac{h}{l}\right)$ der gesamte Widerstand des Betons.

$\Omega_1 \int_0^{h_1} A\left(\frac{h_1}{l}\right) dh_1$ die Deformationsbewegung der zwischen den beiden Schnitten enthaltenen Armierung, wenn die Verlängerung zwischen Null und h begriffen ist.

Die Bedingungsgleichungen müssen bestimmen:

1. daß die Summe der Widerstände $= F$ ist;

2. daß die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist, und sind mithin folgende:

$$\Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right) + \Omega B\left(\frac{h}{l}\right) = F,$$

$$\Omega_1 \int_0^{h_1} A\left(\frac{h_1}{l}\right) dh_1 + \Omega \int_0^{h} B\left(\frac{h}{l}\right) dh = \text{Minimum}.$$

Die Variabeln dieser Gleichungen sind h und h_1; wenn sich h_1 verändert, verändert sich auch der entsprechende Gesamtwiderstand, und infolge der ersten Gleichung verändert sich auch der zweite, d. h. auch h: es handelt sich darum, das Verhältnis zwischen h und h_1 zu bestimmen, um der zweiten Gleichung zu genügen.

Ich setze h_1 als unabhängige Variable und leite beide Gleichungen danach ab, indem ich mit h' die Derivate von h nach h_1 bezeichne. Dann bekomme ich:

$$\begin{cases} \Omega_1 \frac{1}{l} A'\left(\frac{h_1}{l}\right) + \Omega \frac{h'}{l} B'\left(\frac{h}{l}\right) = 0. \\ \Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right) + \Omega h' B\left(\frac{h}{l}\right) = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung erhalte ich für h'

$$h' = \frac{\Omega_1 A'\left(\frac{h_1}{l}\right)}{\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)}$$

durch Substitution in der zweiten erhalte ich:

$$\frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)} = \frac{B\left(\frac{h}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)}, \tag{1}$$

woraus sich, unabhängig von der Kraft F, das Verhältnis zwischen den beiden Deformationen ergibt, wenn die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist.

Erörterung der Formel (1). — Dehnung des Körpers ohne Adhäsion.

Ziehen wir jetzt die Formel (1) in Betracht:

$$\frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h'}{l}\right)} = \frac{B\left(\frac{h}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)}.$$

1. Fall. Man setze die Spannung J so klein an, daß in keinem Eisen- oder Betonelement die elastische Periode, während deren der Widerstand der wirklichen Deformation annähernd proportional bleibt, überschritten werde.

Man erhält in diesem Falle

$$A\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1\frac{h_1}{l},$$

$$B\left(\frac{h}{l}\right) = E\frac{h}{l},$$

worin E und E_1 die gemeinsamen Elastizitätsmoduln für die Zugkraft sind. Man bekommt also:

$$A'\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1,$$

$$B'\left(\frac{h}{l}\right) = E,$$

und so wird die Formel (1)

$$\frac{E_1\frac{h_1}{l}}{E_1} = \frac{E\frac{h}{l}}{E}, \text{ d. h. } h_1 = h.$$

Also während dieser Phase der geringsten Beanspruchungen ist die Verlängerung des Betons gleich der des Eisens.

2. Fall. Man nehme an, die Zugkraft F habe die Höhe erreicht, daß in den Betonelementen die Elastizitätsperiode überschritten sei, daß also der Widerstand nicht mehr als der Verlängerung proportional anzusehen sei; dann wird die Funktion B nicht mehr eine lineare sein. Die Formel (1) wird in diesem Fall:

$$\frac{E_1 \frac{h_1}{l}}{E_1} = \frac{B\left(\frac{h}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)}$$

oder

$$\frac{h_1}{l} = \frac{B\left(\frac{h}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)},$$

woraus hervorgeht, daß „die Verlängerung für die Längeneinheit der virtuellen Betonverlängerung gleich ist“, und da während dieser nicht elastischen Phase der Deformation die virtuelle Verlängerung größer als die wirkliche ist, so folgt daraus, daß sich das Eisen mehr als der Beton verlängert: die Differenz wächst, je weiter sich der Widerstand des letzteren der Bruchbelastung nähert.

3. Fall. Man nehme an, daß die Deformation des Eisens die elastische Periode auch schon überschritten habe: dann wird die Funktion A auch nicht mehr eine lineare sein Die Formel (1) wird:

$$\frac{A\left(\frac{x}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)} = \frac{B\left(\frac{x}{l}\right)}{B'\left(\frac{h}{l}\right)}$$

und drückt aus, daß die virtuelle Verlängerung des Eisens der ebenfalls virtuellen des Betons gleich kommt.

Theoretisch müßte man diesen Zustand erreichen können; denn wenn der Betonwiderstand sich der Bruchbelastung nähert, nähert sich die virtuelle Betonverlängerung der Unendlichkeit, während die wirkliche Eisenverlängerung nicht unendlich werden kann. Und da sich beide virtuelle Verlängerungen gleichzeitig der Unendlichkeit nähern, so müßte der Bruch in beiden Materialien gleichzeitig geschehen.

Dehnung des Körpers. — Vollständige Adhäsion zwischen Eisen und Beton.

Man denke sich einen zylindrischen Körper aus Beton und Eisen von beliebigem Querschnitt; die Armierung bestehe aus einem oder mehreren Stäben, parallel zu den Erzeugungslinien der zylindrischen

Oberfläche des Körpers, von beliebigem Durchschnitt. Man nehme ferner an, daß in jeder Sektion die Schwerpunkte der Eisen- und der Betonflächen zusammenfallen.

Fig. 7—8.

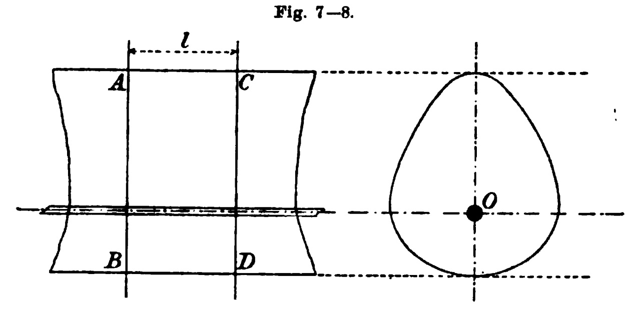


Fig. 7 stellt die Schicht des in Betracht zu ziehenden Körpers dar zwischen den Sektionen AB und CD, die zur Schwerpunktachse senkrecht sind.

Fig. 8 stellt den Schnitt AB dar, worin die Armierung zu größerer Einfachheit durch ein einziges Rundeisen bezeichnet ist. Der Körper unterliege längs der Schwerpunktachse der Wirkung der Zugresultante F.

Ich nehme an:

1. daß vollständige Adhäsion zwischen Eisen und Beton vorhanden sei, so daß, wie groß auch die Spannung sei, die sich berührenden Fibern des Eisens und des Betons gleiche Deformation haben;

2. daß der einheitliche einer bestimmten Verlängerung entsprechende Betonwiderstand derselbe sei wie bei gleicher Deformation in nicht armierten Körpern.

Über die Deformation der verschiedenen Betonelemente stelle ich keine Hypothese auf; um in dem allgemeinen Fall zu bleiben, will ich diese Deformationen als verschieden ansehen, obwohl sich dieselben nach einem unbekannten Gesetz von Element zu Element verändern.

Ich bezeichne mit h_1 die Verlängerung der Eisenfibern und mit h die eines beliebigen Betonelementes $l d\omega$. Der gesamte Zugwiderstand des Eisens ist eine bekannte Funktion von $\frac{h_1}{l}$; ferner ist der Zugwiderstand eines Betonelementes $l d\omega$ ebenfalls eine bekannte Funktion von $\frac{h}{l}$. Die Summe der Gesamtwiderstände beider Materialien muß gleich F sein. Wenn man also diese Bedingung als unverändert festhält, und für h_1 einen beliebigen Wert ansetzt, so sind die verschiedenen Werte von h, infolge dessen, alle bestimmt und zwar hängt jeder von der Lage des Betonelementes ab, nach dem erwähnten unbekannten Gesetze, so daß also h immer als Funktion von h_1 angesehen werden kann.

Man kann also folgende Aufgabe lösen:

Welches Verhältnis muß zwischen der Deformation h_1 und dem Deformationssystem h obwalten, damit, wenn die Summe der Widerstände gleich F ist, die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum darstelle.

Es sei:

Ω_1 = die Gesamtfläche des Schnittes durch die Armierung.

Ω = die Gesamtfläche des Betonschnittes.

$A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = der einheitliche Zugwiderstand des Eisens, der einheitlichen Verlängerung $\frac{h_1}{l}$ entsprechend.

$\frac{1}{l}A'\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = die Derivate dieses Widerstandes zu h_1.

$B\left(\frac{h}{l}\right)$ = der einheitliche Zugwiderstand des Betons, der einheitlichen Verlängerung $\frac{h}{l}$ entsprechend.

$\frac{1}{l}B'\left(\frac{h}{l}\right)$ = die Derivate dieses einheitlichen Widerstandes zu h.

h' = die Derivate von h zu h_1.

Dann haben wir:

$\Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right)$ = dem gesamten Spannungswiderstand der Armierung.

$\int_0^\Omega B\left(\frac{h}{l}\right)d\omega$ = dem gesamten Spannungswiderstand des Betons.

$\Omega_1\int_0^{h_1} A\left(\frac{h_1}{l}\right)dh_1$ = der gesamten Deformationsarbeit des Eisens.

$\int_0^\Omega d\omega\int_0^\Omega B\left(\frac{h}{l}\right)dh$ = der gesamten Deformationsarbeit des Betons.

Die Bedingungsgleichungen drücken aus:

1. daß die Summe der Widerstände gleich F ist;

2. daß die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist, und sind folgende:

$$\Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right) + \int_0^\Omega B\left(\frac{h}{l}\right)d\omega = F,$$

$$\Omega_1\int_0^{h_1} A\left(\frac{h_1}{l}\right)dh_1 + \int_0^\Omega d\omega\int_0^h B\left(\frac{h}{l}\right)dh = \text{Minimum}.$$

Durch Ableitung in bezug auf h_1 bekommt man daraus folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \Omega_1 \frac{1}{l}A'\left(\frac{h_1}{l}\right) + \frac{1}{l}\int_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)h'\,d\omega = 0, \\ \Omega_1 A\left(\frac{h_1}{l}\right) + \int_0^\Omega B\left(\frac{h}{l}\right)h'\,d\omega = 0, \end{cases}$$

woraus

$$(2)\qquad \frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)}=\frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right)h'\,d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right)h'\,d\omega},$$

was das Verhältnis zwischen h_1 und dem System der Deformationen h ergibt, sobald die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist.

Erörterung der Formel (2). — Dehnung des Körpers. — Vollständige Adhäsion.

$$\text{Formel (2)}=\frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)}=\frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right)h'\,d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right)h'\,d\omega}.$$

1. Fall. — Man nehme nun die Zugkraft F so klein an als genügt, damit jedes Element des Betons elastische Deformation habe, und man also den Widerstand jeden Elementes als der entsprechenden Verlängerung proportional ansehen kann.

Die Funktionen A und B können auf folgende Weise geschrieben werden:

$$A\left(\frac{h_1}{l}\right)=E_1\frac{h_1}{l},$$

$$B\left(\frac{h}{l}\right)=E\frac{h}{l},$$

daher ist

$$A'\left(\frac{h_1}{l}\right)=E_1,$$

$$B'\left(\frac{h_1}{l}\right)=E.$$

Die Formel (2) wird dann:

$$\frac{E_1\left(\frac{h_1}{l}\right)}{E_1}=\frac{\int_0^{\Omega} E\frac{h}{l}h'\,d\omega}{\int_0^{\Omega} Eh'\,d\omega}\quad\text{oder}\quad h_1=\frac{\int_0^{\Omega} Ehh'\,d\omega}{\int_0^{\Omega} Eh'\,d\omega}.$$

Hier muß daran erinnert werden, daß h' die Derivate von h nach h_1 ist, und trotz der Integrationszeichen, kann man dh_1 entfernen und den Bruch durch l dividieren.

$$h_1 = \frac{\int_0^\Omega Eh \frac{dh}{l} d\omega}{\int_0^\Omega E \frac{dh}{l} d\omega}.$$

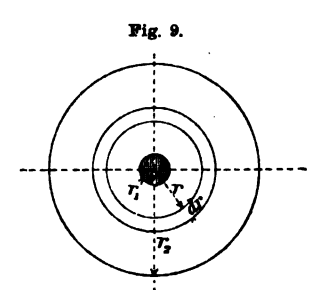
$E\frac{dh}{l}d\omega$ ist die Widerstandsveränderung eines Elementes $l d\omega$, wenn seine Verlängerung dh beträgt. $Eh\frac{dh}{l}d\omega$ ist dagegen die Arbeitsveränderung des Elementes $l d\omega$. Es bezeichnen also die beiden Glieder des Bruches die gleichzeitige Bewegung und Kraftveränderung; mit anderen Worten der Bruch ist die Derivate der Deformationsarbeit des Betons nach seinem Gesamtwiderstand. Der Wert dieser Derivate wird natürlich von dem Gesetze abhängen, welches die Verteilung der Widerstände auf die verschiedenen Elemente des Betonschnittes bestimmt.

Man kann jedoch der Derivaten der gesamten Bewegung zu dem Gesamtwiderstand eine noch klarere Bedeutung geben: in der Tat kann sie folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$h_1 = \frac{\int_0^\Omega h\, dh\, d\omega}{\int_0^\Omega dh\, d\omega},$$

wo aber dh nicht das Differential von h, als Funktion von ω, sondern als Funktion von h_1 ist. In der neuen Gestalt lassen sich beide Integrale graphisch darstellen; ich will mich auf einen sehr einfachen Fall beschränken, dessen Ergebnis jedoch leicht zu verallgemeinern ist. Der Schnitt des Körpers sei kreisförmig, und die Armierung ein Rundstab, dessen Achse zugleich die des Körpers ist.

Fig. 9.



(Fig. 9). Man kann sich alsdann den Betonschnitt in mit dem Rundstab konzentrische Elementflächen zerlegt denken

$$d\omega = 2\pi r dr,$$

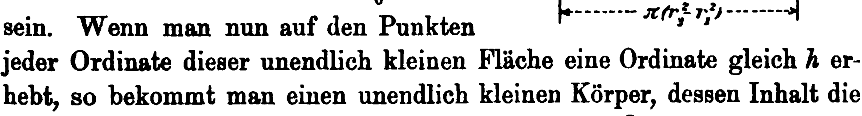
und annehmen, daß bei jeder einzelnen die Deformation konstant sei. Somit läßt sich graphisch das Integral $\int_0^{\Omega} h d\omega$ darstellen durch die Fläche zwischen einer horizontalen Achse, auf die die Flächen $\pi(r^2 - r_1^2)$ als Abszissen aufgetragen werden, und einer Linie, deren Ordinaten die entsprechenden h sind.

Die erste Ordinate wird h_1 sein, da infolge der Adhäsion ich vorausgesetzt habe, daß die sich berührenden Fibern des Eisens und des Betons dieselbe Verlängerung haben; die folgenden Ordinaten können h_1 gleichen, oder verschieden sein, doch in letzterem Falle muß man mir die Hypothese gestatten: entweder nehmen die Ordinaten ab (wenn h_1 die größte Verlängerung ist) oder zu (wenn h_1 die kleinste ist) mit dem Bestreben konstant zu werden.

Fig. 10.

Wenn man nun h_1 veränderlich annimmt, so werden auch alle h veränderlich, aber nicht im gleichen Sinne, da bei Zunahme von h (indem die Zugkraft F konstant bleibt), der Betonwiderstand $\left(\int_0^{\Omega} E \frac{h}{l} d\omega\right)$ abnimmt, und folglich auch die in Betracht gezogene Fläche. Umgekehrt bei Abnahme von h_1 nimmt die Fläche $\int_0^{\Omega} h d\omega$ zu. Die neue Linie (h, ω) wird also die vorhergehende schneiden (Fig. 11), und die zwischen den beiden Linien gelegene Fläche wird $\int_0^{\Omega} dh d\omega$ sein.

Fig. 11.

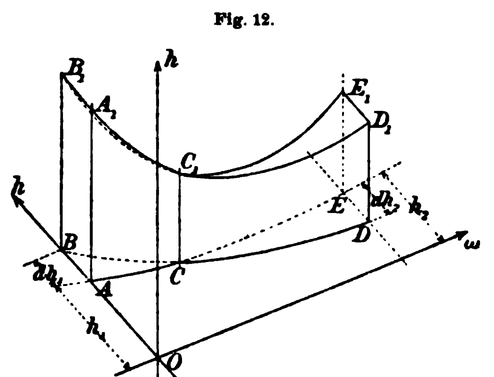


Wenn man nun auf den Punkten jeder Ordinate dieser unendlich kleinen Fläche eine Ordinate gleich h erhebt, so bekommt man einen unendlich kleinen Körper, dessen Inhalt die Formel $\int_0^{\Omega} h dh d\omega$ darstellt (Fig. 12). Der Bruch $\dfrac{\int_0^{\Omega} h dh d\omega}{\int_0^{\Omega} dh d\omega}$ ist dann das

Verhältnis zwischen diesem Raum und der Grundfläche, er ist also eine mittlere Ordinate des Inhaltes nicht in bezug auf ω, sondern auf $\int_0^{\Omega} d\bar{h} d\omega$.

Die Grundfläche des in Betracht gezogenen Körpers besteht aus zwei Teilen mit entgegengesetzten Zeichen, deren algebraische Summe ein dh_1 entgegengesetztes Zeichen hat. Der Körper selbst hat auch zwei Teile von entgegengesetzten Zeichen, deren algebraische Summe das nämliche Zeichen wie die vorhergehende hat, da ihr Quotient positiv und gleich h_1 ist.

Fig. 12.



Im Falle der Figur ($dh_1 > 0$) bekommt man also

$$ABC < CED$$

$$ABCA_1B_1C_1 < CEDC_1E_1D_1.$$

Setzt man voraus, daß die Ordinaten der Linie (h, ω) zunehmen, so wird diese mittlere Ordinate $\left(\frac{\text{Inhalt}}{\text{Grundfläche}}\right)$ größer als die kleinste Ordinate h_1 sein, während sie nach (2′) gleich h_1 sein müßte. Wenn man hingegen annimmt, daß die Ordinaten der Linie (h, ω) abnehmen, so wird diese mittlere Ordinate kleiner als die größte h_1 sein. Die Linie (h, ω), deren Ordinaten weder ab- noch zunehmen können, ist also eine Gerade, deren Ordinaten konstant und gleich h_1 sind; und nur in diesem Falle wird der Bruch $\dfrac{\int_0^{\Omega} h\,dh\,d\omega}{\int_0^{\Omega} dh\,d\omega}$ den Wert h_1 haben, wie (2′) erfordert. Es sind also in dieser ersten Deformationsperiode, wie vorauszusehen war, und alle zugeben, die Verlängerungen des Betons und des Eisens gleich.

2. Fall. Man nehme nun an, die Zugkraft F habe eine solche Höhe erreicht, daß, wenn die Betonverlängerungen denen des Eisens gleich sind, die elastische Periode beim Beton schon überschritten ist. In diesem Falle ist die Funktion B für alle Betonelemente oder wenig-

stens für die das Eisen berührenden zu h keine lineare, während A eine lineare Funktion zu h_1 ist; also

$$A\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1 \frac{h_1}{l}$$

$$A'\left(\frac{h_1}{l}\right) = E_1$$

folglich

$$\frac{A\left(\frac{h_1}{l}\right)}{A'\left(\frac{h_1}{l}\right)} = \frac{h_1}{l}$$

Die Formel (2) wird also:

$$\frac{h_1}{l} = \frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) h' \, d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right) h \, d\omega}$$

die man auch so schreiben kann

$$\frac{h_1}{l} = \frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) dh \, d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right) dh \, d\omega}$$

$$h_1 = \frac{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right) dh \, d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right) \frac{dh}{l} \, d\omega}$$

aber da $B\left(\frac{h}{l}\right) dh\, d\omega$ das Differential der Arbeit und $B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l} d\omega$ das der Kraft ist, so gleicht die Eisenverlängerung der Derivate der gesamten Betonbewegung zu dem ganzen Betonwiderstand.

Es ist möglich, mit Hilfe dieser Derivate die Art der Deformation zu erkennen. Bezeichnen wir mit μ das Verhältnis zwischen $B\left(\frac{h}{l}\right)$ und $B'\left(\frac{h}{l}\right)$, (was früher virtuelle Verlängerung genannt wurde), so hat man die Gleichung

$$B\left(\frac{h}{l}\right) = \mu B'\left(\frac{h}{l}\right) \cdot$$

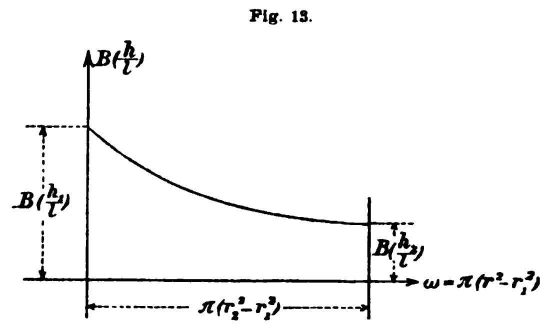
Die Derivate der Arbeit nach der Kraft kann mithin so geschrieben werden:

$$h_1 = \frac{\int\limits_0^\Omega \mu B'\left(\frac{h}{l}\right) dh\, d\omega}{\int\limits_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l} d\omega}$$

(2″)
$$h_1 = \frac{\int\limits_0^\Omega \mu l \cdot B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l} d\omega}{\int\limits_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l} d\omega}$$

Setzen wir nun, wie im vorhergehenden Falle, voraus: 1. daß der Schnitt des Körpers kreisförmig sei und die Armierung, deren Achse die des Körpers sei, auch kreisförmig; 2. daß auf jeder Elementarfläche $2\pi r dr$ die Deformation, daher auch der Widerstand in jeder Flächeneinheit $B\left(\frac{h}{l}\right)$ konstant sei; 3. daß die Deformation in den mit dem Eisen und dem Beton in Berührung kommenden Fibern gleich h_1 sei, und sich ferner nach ab- oder zunehmendem Gesetz verändere, mit dem Bestreben in den vom Eisen entferntesten Elementarflächen konstant zu werden: so wird es möglich sein, auf dieser Fläche ein Diagramm der einheitlichen Widerstände zu zeichnen, das von einer Linie begrenzt ist, deren Ordinaten die Werte von $B\left(\frac{h}{l}\right)$ in den folgenden Elementarflächen sind (daher werden auch diese letzteren ab- oder zunehmen mit dem Bestreben konstant zu werden).

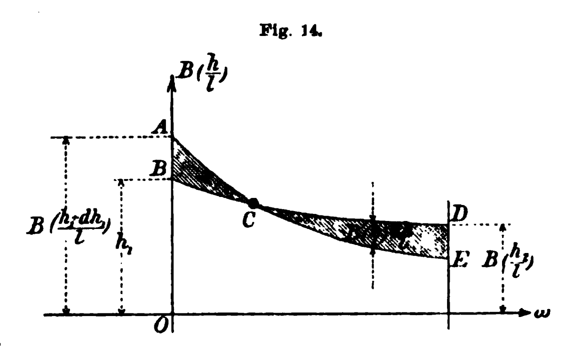
Fig. 13.



Gesetzt h_1 verändere sich um den Wert dh_1, so wird sich jede Ordinate $B\left(\frac{h}{l}\right)$ um den unendlich kleinen Wert $B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}$ verändern; es werden jedoch diese Variationen, so wie beim ersten Falle, nicht alle gleiches Zeichen haben, denn bei Abnahme von h_1 nimmt der Gesamtwiderstand des Betons $\int\limits_0^\Omega B\left(\frac{h}{l}\right) d\omega$ (die Diagrammfläche) zu; und bei

Zunahme von h_1 tritt das Gegenteil ein. Daher wird sich die gezogene Linie so wie es Fig. 14 zeigt, verändern, und die Fläche, zwischen den beiden Linien und den äußersten Ordinaten wird $\int_0^\Omega B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}d\omega$, den Nenner des Bruches (2′) darstellen.

Fig. 14.



Wenn man nun (wie schon beim ersten Fall) auf jeden Punkt einer beliebigen Ordinate dieser Fläche den entsprechenden Wert μl aufträgt, so bekommt man einen unendlich kleinen Körper, dessen Inhalt den Zähler des Bruches (2″) darstellt, nämlich

$$\int_0^\Omega \mu l B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{.l}d\omega$$

Fig. 15.

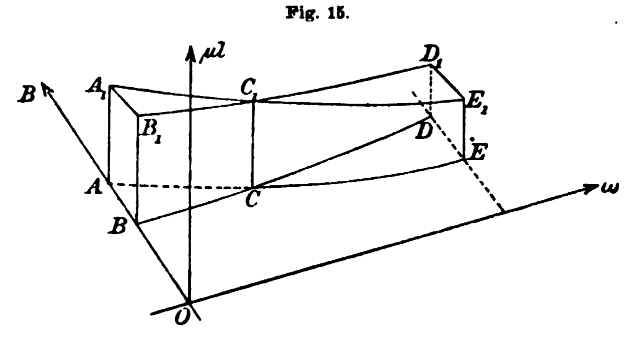


Fig. 15 stellt diesen Körper dar, er besteht aus zwei Teilen mit entgegengesetzten Zeichen

$ABCA_1B_1C_1$

$CDEC_1D_1E_1$.

Auch die Grundflächen haben entgegengesetzte Zeichen: die Fläche ABC ist als positiv anzusehen, denn in der ihr entsprechenden Fläche ω verhalten sich die Kräfte $B\left(\frac{h}{l}\right)$ wie h_1, sodaß die Differentiale $B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}$ positiv sind: der Rauminhalt $ABCA_1B_1C_1$ ist gleichfalls positiv. Die Fläche CDE ist also negativ, sowie der Rauminhalt $CDEC_1D_1E_1$. Als absoluten Wert erhält man

$$CDE > ABC,$$

da die Variation des gesamten Betonwiderstandes, die eben die Fläche $ABCDE$ darstellt, und dh_1 entgegengesetzte Zeichen haben.

Es muß auch

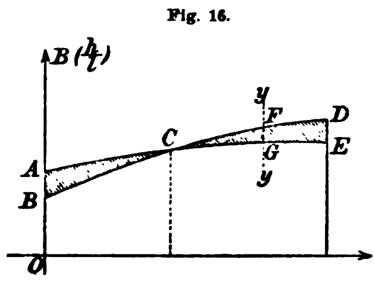
$$CDEC_1D_1E_1 > ABCA_1B_1C_1$$

sein, da die Fläche $ABCDE$ und der Rauminhalt $ABCDEA_1B_1C_1D_1$ gleiches Zeichen haben, weil h_1, der Quotient derselben, positiv ist.

Nun ist es möglich verschiedene Hypothesen zu erörtern.

1. Man setze h_1 kleiner als irgend ein h voraus, dann muß man das Eisen als vom Beton mit fortgerissen ansehen; das ist eine der Hypothesen von Harel de la Noë. Die Fläche $ABCDE$ wird dann, wie es Fig. 16, und der Körper $ABCDEA_1B_1C_1D_1$, wie es Fig. 17 zeigt, erscheinen. Die Ordinaten AA_1, BB_1 werden die kleinsten sein, da der kleinsten Verlängerung (h_1) der kleinste einheitliche Widerstand und die kleinste virtuelle Verlängerung μl entspricht: diese Ordinaten werden nach und nach zunehmen, bis sie DD_1EE_1, den größten Wert, erreichen.

Fig. 16.



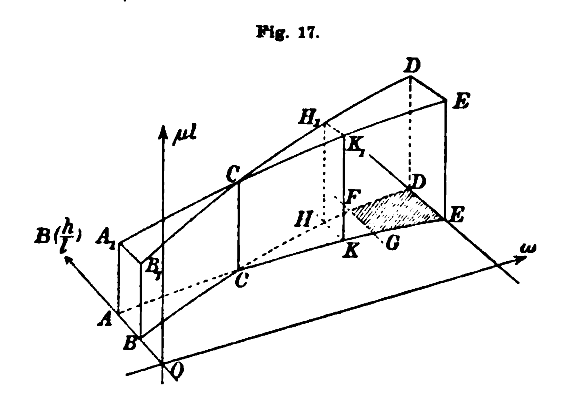
Trennen wir mittelst einer Ordinate yy eine Fläche CFG ab, die der Fläche ABC gleich sei und trennen wir mittelst einer den Geraden AA_1BB_1 parallelen senkrechten Ebene einen Raum $CHKC_1H_1K_1$ ab, der gleich $ABCA_1B_1C_1$ sei. Da die Ordinaten dieses Raumes größer als die von $ABCA_1B_1C_1$ sind, so ist

$$CHK < ABC$$

und daher

$$CHK < CFG.$$

Fig. 17.



Das Verhältnis zwischen dem Raume $HKDEH_1K_1D_1E_1$ und der Fläche $FGDE$ ist der Wert des Bruches

$$\frac{\int_0^{\Omega} \mu l B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}\,d\omega}{\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}\,d\omega}$$

oder von h_1, aber dies Verhältnis ist sicher größer als die mittlere Ordinate des Inhaltes $HKDEH_1K_1D_1E_1$ und daher auch größer als AA_1BB_1, die virtuelle Verlängerung, entsprechend einer wirklichen Verlängerung auf der Fiber gleich h_1: das ist aber widersinnig, da die wirkliche Verlängerung der virtuellen höchstens gleichkommen, nicht aber sie überschreiten kann. Wenn also die ganze Deformations-

arbeit ein Minimum ist, so kann die Verlängerung h_1 des Eisens nicht kleiner als jede Verlängerung h des Betons sein:

2. Man nehme an, h_1 sei einer beliebigen Verlängerung des Betons gleich: das ist die gewöhnliche Annahme.

In diesem Falle sind alle Ordinaten des Raumes $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ unter einander gleich, und das Verhältnis zwischen Raum und Grundfläche ist natürlich der Ordinate gleich: aber h_1 müßte gleich diesem Verhältnis sein, was unmöglich ist, da dann die Betonelemente eine wirkliche, der virtuellen gleiche, Verlängerung bekämen, was der Voraussetzung, das Beton habe die elastische Periode bereits überschritten, zuwider ist.

Fig. 18.

Also wenn die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist, und sich die Betonelemente nicht alle in der Deformationsperiode befinden, kann die Eisenverlängerung nicht einer jeden Betonverlängerung gleich sein.

3. Man nehme also h_1 größer als jedes h an, sodaß der Beton als vom Eisen mit fortgerissen zu betrachten ist.

Die Fläche $ABCDE$ wird die in Fig. 18, der Körper $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ die in Fig. 19 angegebene Form haben.

Die Ordinaten AA_1, BB_1 werden Maxima sein, da der größten Verlängerung (h_1) der größte einheitliche Widerstand und die größte virtuelle Verlängerung μl entspricht: diese Ordinaten werden nach und nach abnehmen, bis sie in DD_1 und EE_1 den geringsten Wert erreichen.

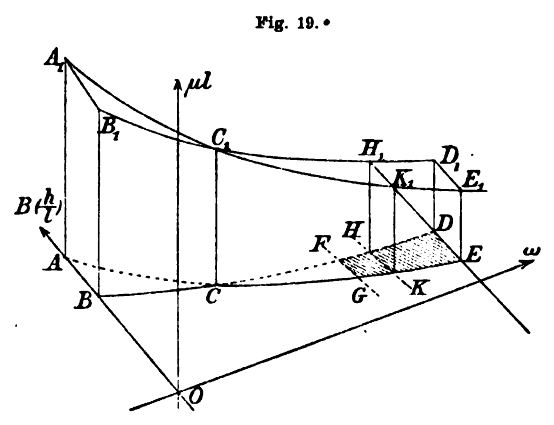


Fig. 19.

Trennen wir mittels einer Ordinate yy eine Fläche CFG gleich ABC ab, und mittels einer mit AA_1, BB_1 parallelen senkrechten Ebene einen Körper $CHKC_1H_1K_1$ der gleich $ABCA_1B_1C_1$ sei. Da die Ordinaten dieses Körpers kleiner als die von $ABCA_1B_1C_1$ sind, ergibt sich:

$$CHK > ABC$$

folglich

$$CHK > CFG,$$

jedoch unmöglich

$$CHK \geq CDE,$$

da der Körper $ABCA_1B_1C_1$ jedenfalls kleiner als $CDEC_1D_1E_1$ ist. Das Verhältnis zwischen $HKDEH_1K_1D_1E_1$ und der Fläche $FGDE$ ist der Wert des Bruches

$$\frac{\int_0^{\Omega} \mu l \cdot B'\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}\,d\omega}{\int_0^{\Omega} B\left(\frac{h}{l}\right)\frac{dh}{l}\,d\omega}$$

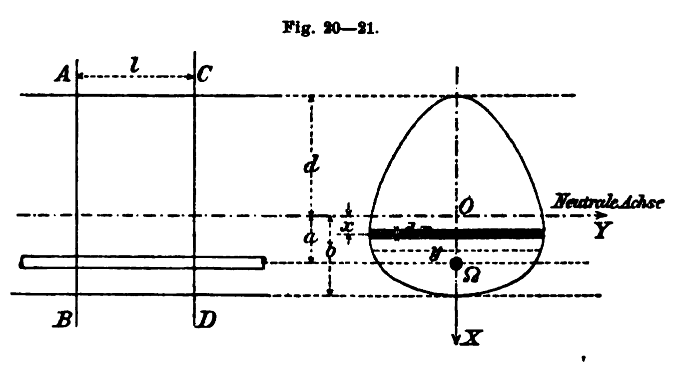
oder der Ordinate h_1. Er ist sicher kleiner als die mittlere Ordinate des Körpers $HKDEH_1K_1D_1E_1$ und könnte auch kleiner als die kleinste Ordinate DD_1 oder EE_1 sein. Das wäre aber nicht im Widerspruch mit der Hypothese, daß h_1 die größte wirkliche Verlängerung sei, da DD_1 eine virtuelle Verlängerung ist, die jenseits der elastischen Defórmatiosperiode immer größer als die wirkliche ist: höchstens könnte man in diesem Falle sagen, die größte wirkliche Verlängerung sei so wenig von der kleinsten verschieden, daß sie zwischen dieser und der ihr entsprechenden virtuellen Verlängerung enthalten ist.

Also nur bei dieser dritten Hypothese stoßen wir auf keinen Widersinn, sodaß man behaupten kann: „Sobald die Deformationsarbeit ein Minimum ist, ist die Verlängerung h_1 des Eisens größer als jede Verlängerung h des Betons und kleiner als die mittlere virtuelle Verlängerung des letzteren."

Biegung des Körpers ohne Adhäsion zwischen Beton und Eisen.

Man denke sich einen Körper aus Beton und Eisen von beliebigem Querschnitt (gleichviel ob konstant oder veränderlich) mit ebener Schwerpunktlinie. Fig. 20 stellt eine Schicht des Körpers dar zwischen den so nahe zu einander liegenden Schnitten AB und CD, daß man sie als kongruent, parallel und

Fig. 20—21.



in gleicher Richtung gelegen betrachten kann. Fig. 21 stellt den senkrechten Querschnitt AB des Körpers dar: sei Ω der Querschnitt der Armierung, die zu größerer Einfachheit in der Figur mit einem einzigen Rundstab bezeichnet ist, die aber auch aus mehreren Rundstäben oder anders geformten Eisen bestehen kann.

Ich nehme an:

1. Es sei keine Adhäsion zwischen Beton und Eisen vorhanden, sodaß sich die sich berührenden Fibern des Eisens und des Betons ganz unabhängig von einander verlängern können.

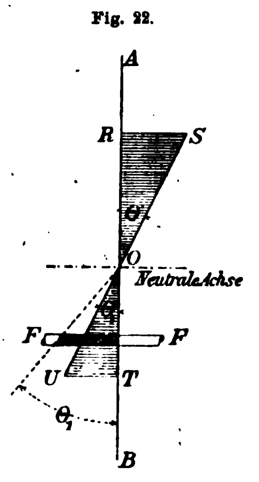
2. Bei den Betonelementen finde die Verteilung der Widerstände dem linearen Gesetze gemäß statt, sodaß sie sich um die neutrale Achse des Schnittes CD um einen gleichen Winkel θ drehen.

3. Dieselbe Annahme gelte auch für die Eisenelemente, deren gemeinsamer Drehungswinkel θ_1 sei.

Auf Figur 22 stellt die Linie $RSOUT$ das lineare Gesetz der Verlängerungen oder Verkürzungen der Betonfiber l dar.

Nun sei folgende Aufgabe gestellt:

Fig. 22.



Welche gegenseitige Beziehung besteht zwischen den Winkeln θ_1 und θ, sobald ihr gesamtes Widerstandsmoment zur neutralen Achse gleich M, und ihre gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist?

Beide Bedingungen können gleichzeitig angenommen werden; die Summe der beiden Widerstandsmomente des Betons und des Eisens ist konstant und gleich M: wenn sich θ_1 verändert, so verändert sich das zweite Moment, folglich auch das erste, daher auch θ, θ kann also als Funktion von h_1 betrachtet werden, und es ist möglich die Beziehung zu bestimmen, welche zwischen den beiden Winkeln stattfinden muß, damit die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum sei.

Sei:

$x_1 \theta_1$ = die Deformation eines Eisenelementes $(l d\omega)$, das von der neutralen Achse einen Abstand x hat.

$\frac{x_1 \theta_1}{l}$ = die entsprechende einheitliche Verlängerung oder Verkürzung.

$A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right)$ = der entsprechende einheitliche Widerstand.

$\frac{1}{l} A'\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right)$ = die Derivate der Funktion $A\left(\frac{x_1 \theta_1}{l}\right)$ zu $x_1 \theta_1$.

$x\theta$ = die Deformation eines Betonelementes $(l y d y)$, das von der neutralen Achse einen Abstand x hat.

$\frac{x\theta}{l}$ = die entsprechende einheitliche Verlängerung oder Verkürzung.

$B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ = der entsprechende einheitliche Widerstand.

$\frac{1}{l}B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ = die Derivate der Funktion $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ zu $x\theta$.

θ' = die Derivate von θ zu θ_1, wenn bei Veränderung der beiden Drehungen θ und θ_1 die Summe der Widerstandsmomente gleich M ist.

Dann ist also:

$\int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega$ = Widerstandsmoment des Eisens.

$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)xy\,dx$ = das gesamte Widerstandsmoment des Betons.

$\int d\omega \int_0^{\theta_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\theta_1$ = die gesamte Deformationsarbeit der Armierung.

$\int_{-d}^{b} y\,dx \int_0^{\theta} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)x\,d$ = die gesamte Deformationsarbeit des Betons.

Die Bedingungsgleichungen sind also:

$$\begin{cases} \int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega + \int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)xy\,dx = M \\ \int d\omega \int_0^{\theta_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\theta_1 + \int_{-d}^{b} y\,dx \int_0^{\theta} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)x\,d\theta = \text{Minimum.} \end{cases}$$

Durch Ableitung nach θ bekommt man:

$$\begin{cases} \frac{1}{l}\int A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1^2\,d\omega + \frac{\theta'}{l}\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2y\,dx = 0 \\ \int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega + \theta'\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)xy\,dy = 0, \end{cases}$$

aus der ersten

$$\theta' = \frac{\int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1^2\,d\omega.}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2y\,dx}$$

und durch Substitution in der zweiten

$$(3)\qquad \frac{\int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega}{\int A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1^2\,d\omega} = \frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)xy\,dx}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2y\,dx},$$

was die Beziehung zwischen θ und θ_1 bestimmt, wenn die gesamte Deformationsarbeit ein Minimum ist.

Erörterung der Formel (3).

Formel (3):

$$\frac{\int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega}{\int A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1^2\,d\omega} = \frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)xy\,dx}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2y\,dx}.$$

1. Fall: Setzen wir das Moment M so klein voraus, daß die Deformation der einzelnen Eisen- und Betonelemente innerhalb der elastischen Periode bleibt. Dann ergibt sich, sowohl für die gedehnten wie für die zusammengedrückten Fibern:

$$A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) = E_1\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right),$$

$$A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) = E_1,$$

daher

$$\int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega = E_1\frac{\theta_1}{l}\int x_1^2\,d\omega$$

$$\int A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1^2\,d\omega = E_1\int x_1^2\,d\omega.$$

mithin

$$\frac{\int A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1\,d\omega}{\int A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)x_1^2\,d\omega} = \frac{E_1\frac{\theta_1}{l}\int x_1^2\,d\omega}{E_1\int x_1^2\,d\omega},$$

Ferner für die gezogenen Betonelemente (von $-d$ bis 0)

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E'\frac{x\theta}{l} \qquad B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E'$$

und für die zusammengedrückten Elemente (von 0 bis b)

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E''\frac{x\theta}{l} \qquad B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E''.$$

Man muß die bestimmten Integrale der Formel (3) als von zwei Integralen gebildet betrachten; das eine für den gezogenen Teil, zwischen den Grenzen $-d$ und 0, das andere für den zusammengedrückten Teil, zwischen 0 und b.

$$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx = \int_{-d}^{0} E' \frac{x\theta}{l} xy\,dx + \int_{0}^{b} E'' \frac{x\theta}{l} xy\,dx$$

$$= E' \frac{\theta}{l} \int_{-d}^{0} x^2 y\,dx + E'' \frac{\theta}{l} \int_{0}^{b} x^2 y\,dx$$

$$= \frac{\theta}{l} \left\{ E' \int_{-d}^{b} x^2 y\,dx + E'' \int_{0}^{b} x^2 y\,dx \right\}$$

$$\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y\,dx = \int_{-d}^{0} E' x^2 y\,dx + \int_{0}^{b} E'' x^2 y\,dx$$

$$= E' \int_{-d}^{b} x^2 y\,dx + E'' \int_{0}^{b} x^2 y\,dx\,.$$

Somit wird das zweite Glied der Formel (3)

$$\frac{\frac{\theta}{l}\left\{ E' \int_{-d}^{0} x^2 y\,dx + E'' \int_{0}^{b} x^2 y\,dx \right\}}{E' \int_{-d}^{0} x^2 y\,dx + E'' \int_{0}^{b} x^2 y\,dx} = \frac{\theta}{l},$$

und die Formel (3) wird $\frac{\theta_1}{l} = \frac{\theta}{l}$

$$\theta_1 = \theta,$$

d. h. während der ersten Deformationsphase, solange das ganze Moment so klein ist, daß die Beanspruchungen der Eisen- und Betonelemente innerhalb der elastischen Deformationsgrenze bleiben, ist die Drehung der Eisen- gleich der der Betonelemente.“

Setze man das Moment M groß genug voraus, daß ein Teil der Betonelemente über die Grenzen der elastischen Deformation hinaus beansprucht werde, während die Hypothese der gleichen Drehungen unverändert bleibt. Es wird also die Funktion A linear zu θ_1 sein, und das erste Glied der Formel (3) $\frac{\theta_1}{l}$ gleich sein, aber die Funktion B wird zu θ nicht mehr in lineare Formen zerlegbar sein, sodaß das zweite Glied der Formel (3) so wie in der allgemeinen Formel bleibt

Der Zähler dieser zweiten Seite ist die Summe unendlich kleiner Größen $B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y dx$, die, da y gleich oder größer als Null ist, und $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ und x gleiches Zeichen haben, alle positiv sind.

Der Nenner desselben Bruches ist ebenfalls die Summe unendlich kleiner Größen $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y dx$, die alle positiv sind, da y und x^2 gleich oder größer als Null sind, und $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ sich dem Nullwerte nähern aber niemals negativ werden kann. Jedem Werte des Zählers entspricht auch ein Wert des Nenners, und ihr Verhältnis kann in einfacher Weise ausgedrückt werden. In der Tat ist $B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = \mu\, B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ (wo μ die einheitliche virtuelle Deformation bedeutet), daher

$$\frac{B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y dx}{B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y dx} = \frac{\mu}{x} = \frac{\xi}{l},$$

wo ξ der Drehungswinkel des Querschnitts um die neutrale Achse ist, durch den das betrachtete Element eine wirkliche, der virtuellen gleiche Deformation erlangt. Diese Drehung ξ ist, für die der neutralen Achse nahe liegenden Elemente, deren Beanspruchung die elastische Deformation nicht überschreitet, gleich dem Winkel θ; je weiter sich das Element von der neutralen Achse entfernt, desto mehr nimmt die Drehung ξ zu.

Die zweite Seite der Gleichung (3) kann man also so schreiben:

$$\frac{\int_{-d}^{b} \frac{\xi}{l} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y dx}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y dx},$$

wo jede unendlich kleine Größe gleich oder größer als Null und $\xi \gtreqless 0$ ist. Diese beiden Bedingungen erlauben uns die sichere Behauptung, daß der Wert des vorgenannten Bruches in unserem Falle größer als $\frac{\theta}{l}$ ist, und da derselbe gleich $\frac{\theta_1}{l}$, so ist es möglich, in dieser zweiten Deformationsphase

$$\theta_1 > \theta$$

anzusetzen, d. h. die Drehung um die neutrale Achse ist bei den Eisenelementen größer, als bei den Betonelementen. Es ist auch möglich,

durch Versuche das Verhältnis zwischen θ und θ_1 zu bestimmen. Früher hat man gefunden:

$$\frac{\theta_1}{l} = \frac{\int\limits_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y\, dx}{\int\limits_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y\, dx},$$

eine Gleichung, die so geschrieben werden kann:

$$\frac{\theta_1}{l} = \frac{\theta}{l} \frac{\int\limits_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y\, dx}{\int\limits_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \times \frac{\theta}{l} x^2 y\, dx},$$

wo Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{\int\limits_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x y\, dx}{\int\limits_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \times \frac{\theta}{l} x^2 y\, dx}$$

Momente von Größen von drei Dimensionen sind, die sich leicht graphisch darstellen lassen. In Fig. 23 stellt $ABCD$ den senkrechten Querschnitt des gebogenen, in der Ebene der Achsen xx, yy (der neutralen Achse) enthaltenen Körpers dar. Auf jedem Punkte der Geraden AOC (mit der Abszisse x), hat man eine Ordinate erhoben, deren Wert $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ dem einheitlichen Widerstand im betrachteten Punkte entspricht. So erhält man die Linie $A_1 O C_1$ welche in der Strecke um den Punkt O, wo die Deformation elastisch ist, geradlinig ist; an den anderen Strecken ist dieselbe gekrümmt und stets zur Achse AOC konvex.

Fig. 23.

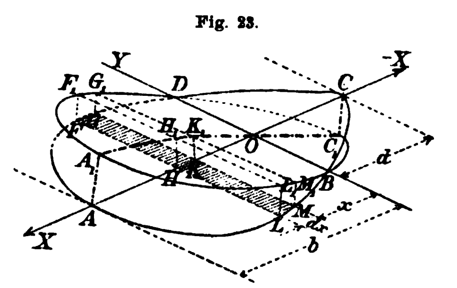


Fig. 23 stellt dann den zylindrischen Körper $ABCDA'BC'D$ dar, welcher als Grundfläche den senkrechten Querschnitt $ABCD$, und als Erzeugende eine der Achse yy parallele und die bestimmende Linie

$A_1 O C_1$ berührende Gerade hat. Das Moment dieses Körpers zur Ebene welche die neutrale Achse yy enthält und zur Achse xx senkrecht ist, ist $\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy dx$. Nehmen wir in der Tat eine unendlich kleine Schicht $FGML$ in Betracht, die der Achse yy parallel, deren Länge $GM = y$, deren Breite $HK = dx$ und deren Abszisse $KO = x$ sei; dieser unendlich kleine Körper hat eine konstante Höhe $KK_1 = B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$, also einen Rauminhalt $B\left(\frac{x\theta}{l}\right) y dx$ und ein Moment zu der vorgenannten Ebene $\left(B\left(\frac{x\theta}{l}\right) y dx\right) x = B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy dx$: das vollständige Moment des geraden Körpers ist also

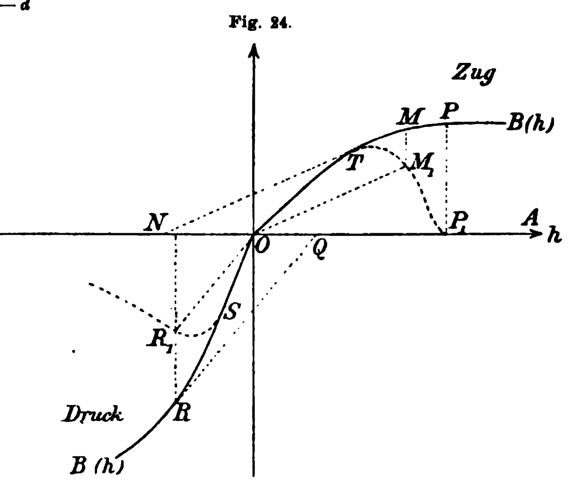
$$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy dx.$$

Wenn die Ordinaten statt $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ den Wert $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\theta}{l}$ hätten, so würde man einen anderen Körper mit derselben Grundfläche $ABCD$ bekommen, dessen Moment zu der schon betrachteten Ebene

$$\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\theta}{l} xy dx$$

wäre.

Fig. 24.



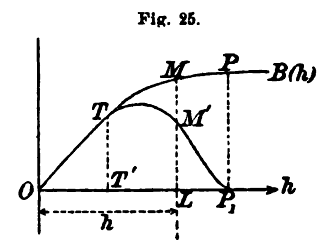
Um das Verhältnis zwischen den beiden Momenten zu bestimmen, dient folgendes Diagramm. (Fig. 24) Man zeichne eine Kurve $RSOTMP$, wo die Abszissen die einheitlichen Deformationen h, die Ordinaten die entsprechenden Werte der einheitlichen Widerstände $B(h)$, sind; diese Kurve ist das gewöhnliche Diagramm der einheitlichen Widerstände.

Wenn man nun an jedem Punkte M oder R der beiden Abzweigungen eine Tangente, und vom Punkte O eine parallele Gerade bis zu den entsprechenden Ordinaten bei M oder R_1 zieht, so erhält man eine Linie $R_1 S O T M_1 P_1$, deren Ordinaten das Produkt der Abszisse

h und der Tangente $B'(h)$ sind: diese Linie stellt also die Funktion $B'(h)h$ dar, deren Eigenschaften folgende sind: 1. in den geradlinigen Strecken OS, OT fällt die Funktion $B'(h)h$ mit der $B(h)$ zusammen. 2. Außerhalb der Strecke SOT ist die Ordinate $B'(h)h$ beständig kleiner als $B(h)$; bei Zunahme der Abszisse wächst $B'(h)h$, bis sie den größten Wert erreicht, dann sinkt dieselbe bis Null, und bleibt so, bis die Widerstandskurve der Achse OA parallel wird.

Betrachten wir jetzt hinsichtlich der Spannungen die beiden Flächen zwischen den vorgenannten Linien, also einer beliebigen Ordinate $MM'L$ (Fig. 25) und der Abszissenachse, und integrieren wir deren elementare Momente zur Achse OB; diese beiden Momente sind Funktionen von h, die man durch $\alpha_t(h)$ und $\beta_t(h)$ bezeichnen kann; diese Funktionen sind bekannt, sobald die Linie der einheitlichen Widerstände bekannt ist; es ist dann auch ihr Verhältnis $\frac{\alpha_t(h)}{\beta_t(h)} = \gamma_t(h)$ bekannt. Die Funktion $\gamma_t(h)$ ist innerhalb der Grenzen $h = 0$ und $h = OT_1$, nämlich in der Periode der elastischen Deformation, gleich der Einheit, dann wächst sie immer rascher, und wenn die Abszisse den Wert OP_1 überschritten hat, wird der Nenner $\beta_t(h)$ konstant. Dasselbe gilt für die Pressung, und so erhält man ähnliche positive Funktionen, die wir mit $\alpha_c'(h)$ $\beta_c'(h)$ $\gamma_c(h)$ bezeichnen wollen.

Fig. 25.



Es sind also:

$$\alpha(h) = \int_0^h B(h)h\,dh$$

$$\beta(h) = \int_0^h B'(h)h \cdot h\,dh$$

$$\gamma(h) = \frac{\int_0^h B(h)h\,dh}{\int_0^h B'(h)h \cdot h\,dh}.$$

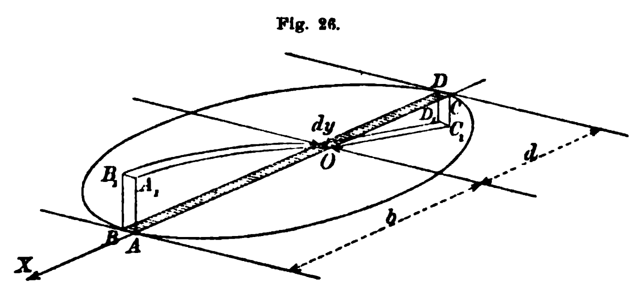
Sei nun in Fig. 26 die unendlich kleine Schicht $ABA_1B_1D_1C_1DC$ gegeben, deren senkrechter Querschnitt das unendlich kleine Streifchen $BADC$, zu der x-Achse parallel, mit den Abszissen $-d$ und b und der

Breite dy, darstellt. Die äußersten Ordinaten der Kurve A_1OC_1 werden durch die Formeln ausgedrückt

$$AA_1 = B\left(\frac{b\theta}{l}\right) \qquad CC_1 = B\left(\frac{-d\theta}{l}\right),$$

und die Kurve ist der Linie $B(h)$ auf Fig. 24 ähnlich; das Ähnlichkeitsverhältnis entspricht dem Verhältnis zwischen den Abszissen beider Linien, denen gleiche Ordinaten entsprechen. Es ist also der Quotient von b und der einheitlichen Deformation

Fig. 26.



entsprechend $B\left(\frac{b\theta}{l}\right)$, also $\frac{b\theta}{l}$, das Ähnlichkeitsverhältnis ist demnach $\frac{l}{\theta}$. Das Moment dieser unendlich kleinen Schicht ist mithin:

$$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) \times x\,dy\,dx = dy\,\frac{l^2}{\theta^2}\left\{\alpha_t\left(\frac{b\theta}{l}\right) + \alpha_c\left(\frac{-d\theta}{l}\right)\right\}.$$

Dementsprechend, wenn man mit $y_1 y_2$ die äußersten Ordinaten des gespannten Teils des Körpers auf Fig. 23 darstellt, und wenn $y_3 y_4$ die äußersten des gepreßten bezeichnen, so ist das ganze Moment des Körpers:

$$\int_{0}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx = \frac{l^2}{\theta^2}\left\{\int_{y_1}^{y_2} \alpha_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \alpha_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy\right\}.$$

Ebenso kann man das Moment .

$$\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l}\, xy\,dy$$

so schreiben:

$$\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l}\, xy\,dx = \frac{l^2}{\theta^2}\left\{\int_{y_1}^{y_2} \beta_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \beta_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy\right\}.$$

Das Verhältnis der beiden Momente gestaltet sich mithin folgendermaßen:

$$\frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l}\, xy\,dx} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \alpha_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \alpha_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy}{\int_{y_1}^{y_2} \beta_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \beta_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy}.$$

Da die Verhältnisse zwischen den Funktionen α und β von der Funktion γ gegeben sind, deren Wert, wie oben gezeigt, in der elastischen Periode gleich 1 und außerhalb derselben größer als 1 ist, und da auch die Funktion immer positiv ist, so kann man daraus schließen: 1. So lange θ den Wert hat, bei dem kein Betonelement über die Grenzen der elastischen Deformation hinaus beansprucht wird, ist der betrachtete Bruch gleich 1, so daß man schreiben kann:

$$\frac{\theta_1}{l} = \frac{\theta}{l} \qquad \theta_1 = \theta,$$

wie im ersten Falle auf andere Art bewiesen wurde. 2. Sobald θ einen Wert erreicht, bei dem ein noch so kleiner Teil vom Querschnitt des gebogenen Körpers über die Grenzen der elastischen Deformation hinaus beansprucht wird, wird der betrachtete Bruch größer als Eins, so daß man hat:

$$\frac{\theta_1}{l} > \frac{\theta}{l} \qquad \theta_1 > \theta.$$

Je mehr dann die Beanspruchung des gebogenen Körpers zunimmt, desto mehr wächst das Verhältnis zwischen θ_1 und θ, bis zum Werte, wo die Beanspruchung der Betonelemente die Bruchbelastung erreicht. Dieser höchste Wert des Verhältnisses hängt natürlich von der Querschnittform, der Lage der neutralen Achse und der Veränderung der Funktionen $\gamma_t(h)$, $\gamma_c(h)$ ab.

Es besteht also dieser wichtige Unterschied zwischen den gezogenen Körpern, wenn die Adhäsion zwischen Beton und Eisen nicht berücksichtigt wird, und den gebogenen, daß während sich bei ersteren Eisen und Beton gleichzeitig der Bruchgrenze nähern, bei letzteren (keine Adhäsion) rascher der Bruch bei Beton als bei Eisen erfolgt. Der neue Ausdruck des Verhältnisses zwischen θ_1 und θ

$$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \alpha_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \alpha_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy}{\int_{y_1}^{y_2} \beta_t\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy + \int_{y_3}^{y_4} \beta_c\left(\frac{x\theta}{l}\right) dy} = F(\theta)$$

ist für die Rechnung bequemer als der andere. In der Tat enthält er Integrale bekannter Funktionen α und β innerhalb einer bekannten Fläche: für jeden bekannten Querschnitt des gebogenen Körpers und für jede Lage der neutralen Achse ist jenes Verhältnis eine Funktion $F(\theta)$, die man näherungsweise leicht bestimmen kann, womit eine der Gleichungen bestimmt wird, welche die Werte von θ und θ_1 gibt.

Im allgemeinen sind die Unbekannten drei: θ, θ_1 und der Parameter (die Lage der neutralen Achse bestimmend), und drei sind auch die Gleichungen: 1) die Gleichung der Momente, 2) die, welche die Gleichheit zwischen der Druck- und Zugresultante bestimmt, 3) die Gleichung $\frac{\theta_1}{\theta} = F(\theta)$.

Obwohl die vorhergehende Erörterung für die Entwicklung meiner Theorie genügt, so will ich doch eine neue Form für obigen Beweis und für das Verhältnis zwischen θ und θ_1 geben, da sie Funktionen enthält, die in einigen Fällen leichtere Anwendung finden können. Jedoch ist es vorher nötig einige einfache Eigenschaften der Momente besonderer geometrischer Formen darzutun.

1. $ABCD$ sei ein Rechteck mit den Seiten a und b; das Moment des Rechteckes zur Geraden AB ist

$$ab \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a^2b,$$

das Moment des Dreieckes ABD zu derselben Geraden ist

$$\tfrac{1}{2}ab \cdot \tfrac{2}{3}a = \tfrac{1}{3}a^2b,$$

das Moment des Dreieckes ABD ist

$$\tfrac{1}{2}ab \cdot \tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{6}a^2b.$$

Fig. 27.

Zwischen den drei Momenten besteht die Gleichung

$$\text{Mom}\,(ABCD) - \text{Mom}\,(BCD) = \text{Mom}\,(ABD)$$

die man auch so schreiben kann

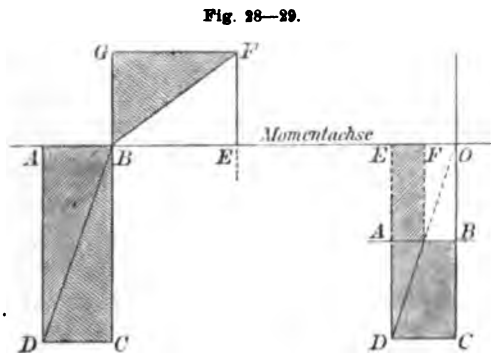
$$2\,\{(\text{Mom}\,ABCD - \text{Mom}\,BCD)\} = \text{Mom}\,(BCD)$$

daher

$$\frac{\text{Mom}\,(BCD)}{2\,\{(\text{Mom}\,ABCD) - \text{Mom}\,(BCD)\}} = 1.$$

2. Dieselben Eigenschaften lassen sich auf ähnliche Art beweisen für Figuren, die man in Summen oder Differenzen von Rechtecken zer-

Fig. 28—29.



legen kann, deren Base auf der Achse der Momente liegt. So ergibt Fig. 28

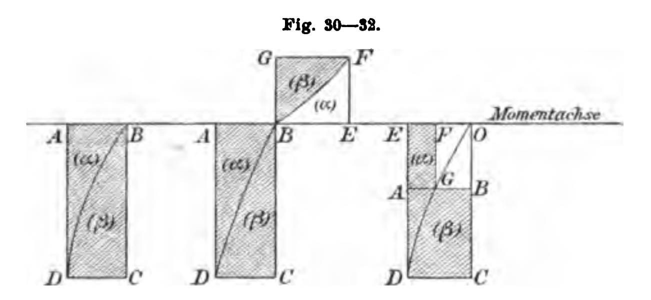
$$\text{Mom}\,(ABCDEFG) - \text{Mom}\,(DCBGF) = \text{Mom}\,(ADBFE)$$
$$\text{Mom}\,(DCBFG) = 2\,\text{Mom}\,(ADBFE)$$
$$\frac{\text{Mom}\,(DCBFG)}{2\,\text{Mom}\,(ADBFE)} = 1$$

und Fig. 29

$$\text{Mom}\,(EDCBGF) - \text{Mom}\,(GDCB) = \text{Mom}\,(EDGF)$$
$$\text{Mom}\,(GDCB) = 2\,\text{Mom}\,(EDGF)$$
$$\frac{\text{Mom}\,(GDCB)}{2\,\text{Mom}\,(EDGF)} = 1.$$

3. Seien nun die Rechtecke durch Kurven, welche die entgegengesetzten Winkel verbinden und zur Momentachse konvex sind, geteilt, wie es die Figuren 30, 31, 32 darstellen. In diesem Falle werden sich die Momente ändern, so daß

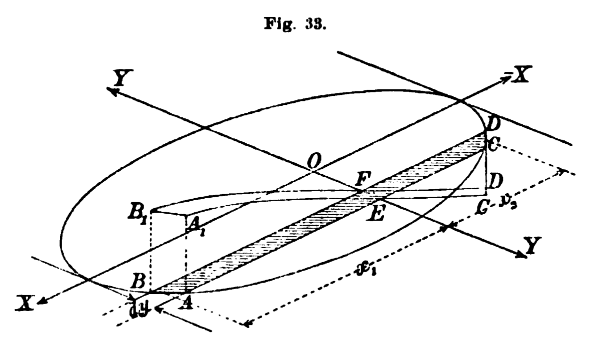
Fig. 30—32.



$$\frac{\text{Mom}\,(\beta)}{2\,\text{Mom}\,(\alpha)} > 1.$$

4. Nun nehme man an, es werden auf den Punkten der vorhergehenden Figuren Ordinaten von konstanter Höhe errichtet, sodaß gerade Prismen entstehen. Dann erhalten wir statt der Momentachse eine Momentebene, und die Kurven, welche früher die Rechtecke teilten, werden zylindrische Oberflächen. Aber es bestehen die schon erwähnten Eigenschaften fort, so daß man für die beiden ersten Fälle schreiben kann:

Fig. 33.



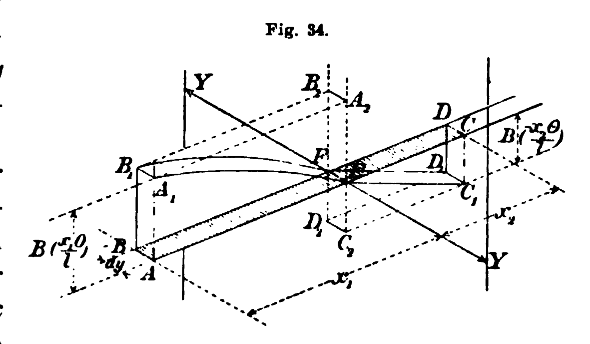
$$\frac{\text{Mom Prisma}\,(\beta)}{2\,\text{Mom Prisma}\,(\alpha)} = 1$$

und für den dritten Fall:

$$\frac{\text{Mom Prisma}\,(\beta)}{2\,\text{Mom Prisma}\,(\alpha)} > 1.$$

Nehmen wir wieder den in Fig. 23 dargestellten Körper in Betracht und beschränken wir wieder unsere Untersuchung auf eine unendlich kleine Schicht des Körpers (Fig. 33), dessen Grundfläche ein beliebiges Streifchen sei, das zur neutralen Achse yy senkrecht ist, die Breite dy und die äußersten Abszissen $x_1 x_2$ hat.

Fig. 34.



Wie schon früher bewiesen, wird das Moment dieses unendlich kleinen Körpers, das zur Ebene der Achse ox senkrecht ist und die neutrale Achse yy enthält, durch $dy \int_{-x_2}^{x_1} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx$ analytisch ausgedrückt.

Wenn man die Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ auf die Momentfläche projektiert (Fig. 34), so erhält man, so zu sagen, den Ergänzungskörper für diese Schicht, indem man das Moment der vorgenannten Schicht (Fig. 33) von dem der Parallelipede $ABA_1 B_1 A_2 B_2 EFC_2 D_2 C_1 D_1 CD$ subtrahiert. Man erhält somit:

$$\text{Mom}\,(A_1 B_1 A_2 B_2 EFC_2 D_2 C_1 D_1)$$

$$= \tfrac{1}{2} x_1^2 B\left(\frac{x_1\theta}{l}\right) dy - dy \int_0^{x_1} B\left(\frac{x_1\theta}{l}\right) x dx - \tfrac{1}{2} x_2^2 B\left(-\frac{x_2\theta}{l}\right) dy$$

$$- dy \int_{-x_2}^{0} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx = \tfrac{1}{2} dy\left[x_1^2 B\left(\frac{x_1\theta}{l}\right) - 2\int_0^{x_1} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2} dy\left[- x_2^2 B\left(-\frac{x_2\theta}{l}\right) - 2\int_{-x_2}^{0} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} dy \int_0^{x_1} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{\theta}{l} x^2 dx + \tfrac{1}{2} dx \int_{-x_2}^{0} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{\theta}{l} x^2 dx\,^{1)}$$

$$= \tfrac{1}{2} dy \int_{-x_2}^{x_1} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{x\theta}{l} x dx.$$

---

1) Bei $\int B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{\theta}{l} x^2 dx$ setze man: $v' = B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{\theta}{l}$, $u = x^2$ daher $v = B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$, $u' = 2x$, daher

$$\int B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \frac{\theta}{l} x^2 dx = x^2 B\left(\frac{x\theta}{l}\right) - 2\int B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x dx.$$

Nach den vorhergehenden Ausführungen ist das Verhältnis zwischen dem Moment der Schicht $ABA_1B_1EFC_1D_1CD$ und dem doppelten Moment der Ergänzungsschicht $AB_1A_2B_2EFC_1D_1C_2D_2$, wenn die Linien A_1E, EC_1 gerade sind (elastische Deformation), gleich eins, und es ist größer als eins, wenn ein Teil dieser Linien Kurven sind (und die Konvexität nach der Momentfläche gerichtet ist), wie eben in unserem Falle.

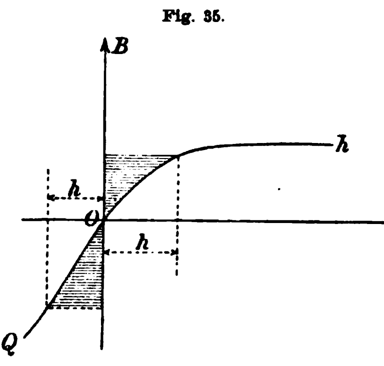
Für die verschiedenen Streifchen, in welche der Querschnitt eines gebogenen Körpers zerlegt werden kann, sind keine andern Fälle denkbar als die von den Figuren 30, 31, 32 dargestellten. Man darf also auf alle die vorhergehenden Ausführungen anwenden.

$\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx$ ist aber die Summe der Momente aller Schichten, in welche man den Körper der Fig. 23 zerlegen kann; ebenso ist $\int_{-d}^{d} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\theta}{l} xy\,dx$ die doppelte Summe der Momente der betreffenden Ergänzungsschichten. Da nun alle Posten positiv sind, so erhält man durch Übertragung auf die Summen dessen, was für die einzelnen Posten bewiesen wurde:

$$\frac{\int_{-d}^{b} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx}{\int_{-d}^{b} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\theta}{l} xy\,dx} > 1 \left[\text{nämlich } \frac{\theta_1}{\theta} > 1\right];\ \theta_1 > \theta.$$

Aus dieser neuen Ausführung geht hervor, daß von den beiden Gliedern des Verhältnisses das eine das Moment, das andere das doppelte Moment zweier Körper ist, deren ersterer, in Fig. 23 dargestellt, nichts anders als das Diagramm der einheitlichen Widerstände der Querschnittselemente bildet, und deren anderer durch Projektion der Linie BA, BC (Fig. 23) auf die Momentfläche erhalten wird. Diese beiden Körper und ihre Momente hängen von der Form des senkrechten Querschnittes des gebogenen Körpers, von der Lage der neutralen Achse und von Funktionen der bekannten einheitlichen Defor-

Fig. 35.



mationen h ab; eine derselben ist die, welche früher mit $\alpha_t(h)$ und $\alpha_c(h)$ bezeichnet wurde; die andere, welche wir nun mit $\delta_t(h)$ (Zug) und $\delta_c(h)$ (Pressung) bezeichnen, ist das Moment zu der Achse OB der in Fig. 35 schraffierten Fläche, wo EOP die Linie der einheitlichen Widerstände ist. Es ist also leicht, für jede Querschnittform eines gebogenen Körpers die Veränderungen der Größen θ_1 und θ, im Verhältnisse $\frac{\theta_1}{\theta}$, als Funktion des Drehungswinkels $\frac{\theta}{l}$ zu berechnen.

* * *

Es ist hier nötig zu bemerken, daß, wenn man statt θ = konstant, ξ = konstant angenommen hätte, $\theta_1 = \xi$ wäre.

In der Tat: da für die elastisch beanspruchten Elemente $\xi = 0$ ist, so besteht für jedes Betonelement die Gleichung:

$$\theta_1 B\left(\frac{x\theta}{l}\right) xy\,dx = \theta' \frac{\xi}{l} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y\,dx,$$

und die Formel (3) wird:

$$\frac{1}{l} = \frac{\xi}{l} \frac{\int_{-d}^{b} \theta' B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y\,dx}{\int_{-d}^{b} \theta' B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2 y\,dx} = \frac{\xi}{l},$$

nämlich $\theta_1 = \xi$, also „die wirkliche Drehung des Eisens gleicht der konstanten und virtuellen des Betons". Dieses Resultat hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem, was bei gezogenen Körpern gefunden wurde, wenn die Adhäsion zwischen den beiden Materialien nicht berücksichtigt wird.

Gebogener Körper, falls Adhäsion zwischen Beton und Eisen stattfindet.

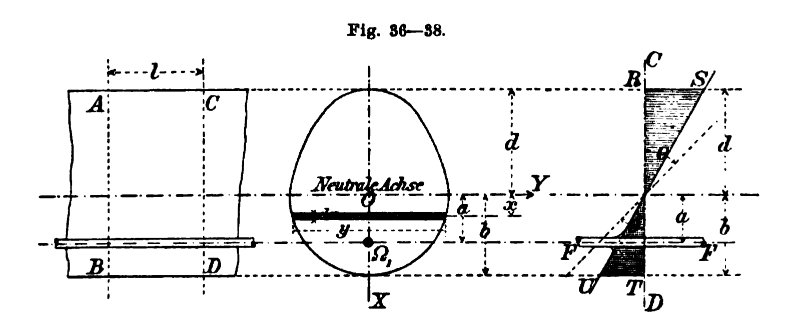
Es sei ein Körper aus Eisen und Beton von beliebigem Querschnitt (konstant oder veränderlich) gegeben, bei dem die Schwerpunktlinie in einer Ebene liegt. Nehmen wir eine Schicht des Körpers zwischen zwei so nahe aneinander liegenden Schnitten in Betracht, daß man dieselben als gleich, parallel und gleich gelegen ansehen kann (Fig. 36). Fig. 37 stellt den senkrechten Querschnitt AB, und Ω den Querschnitt der Eisenarmierung dar, den man kreisförmig gewählt hat, obwohl die Form keinen Einfluß hat. Es werden folgende Hypothesen angenommen:

1. Die Fläche AB schneidet, nach der Deformation, den Schnitt AB in der gegenwärtigen Lage, unabhängig vom Verteilungsgesetz der Widerstände, nach der Geraden oy (von uns neutrale Achse der Sektion genannt), die zur Biegungsebene senkrecht ist.

2. Der Drehungswinkel um die neutrale Achse sei für jedes Eisenelement derselbe und gleich θ_1; der jedes Betonelementes $d\omega$ sei vom Winkel θ dargestellt.

Auf Fig. 38 stellt die Linie $RSOUT$ das Gesetz der Verlängerungen oder Verkürzungen h der Betonfiber dar, über welches Gesetz hier keine anderen Hypothesen aufgestellt werden.

Fig. 36—38.



Jetzt können wir folgende Aufgabe stellen:

„Was für eine Beziehung hat zwischen den Winkeln θ und θ_1 stattzufinden, wenn das Widerstandsmoment zur neutralen Achse $= M$ und die Deformationsarbeit ein Minimum ist?"

Beide Bedingungen lassen sich gleichzeitig annehmen: die Summe der zwei Widerstandsmomente des Eisens und des Betons ist konstant und gleich M, sobald sich θ_1, und daher das erste Moment, verändert, muß sich auch das zweite verändern, so daß, wenn die Drehungen θ von Element zu Element nach einem bestimmten, obzwar uns unbekannten Gesetze verschieden sind, jedem Werte des Widerstandsmomentes des Betons für die verschiedenen Betonelemente ein besonderer Wert des Winkels θ entspricht; θ ist also nicht nur als Funktion der Koordinaten des Elementes $d\omega$, sondern auch als Funktion zu θ_1 zu betrachten, und es ist möglich den Zusammenhang zu bestimmen, welcher zwischen dem θ-System und dem Winkel θ_1 besteht, damit, während die Momentsumme gleich M ist, die ganze Deformationsarbeit ein Minimum sei.

Bezeichnen wir mit:

$x_1 \theta_1 =$ die Deformation eines Eisenelementes $(l d\omega_1)$, dessen Abstand von der neutralen Achse gleich x_1 ist.

$A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)$ den einheitlichen Widerstand eines Eisenelementes $l d\omega_1$, dessen Deformation gleich $\theta_1 x_1$ sei.

$\frac{1}{l}B'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right]$ = die Derivate zu $x_1\theta_1$ der Funktion $B\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right)$.

θ = die Drehung eines Betonelementes $l d\omega$, dessen Abstand von der neutralen Achse gleich x ist.

$B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ = den einheitlichen Widerstand, $\frac{x\theta}{l}$ entsprechend.

$\frac{1}{l}B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ = die Derivate zu $x\theta$ der Funktion $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$.

θ' = die Derivate zu θ_1 einer besonderen Drehung θ.

Es wird also sein:

$\int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\omega_1$ = das ganze Widerstandsmoment des Eisens.

$\int_0^{\Omega} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\omega$ = das ganze Widerstandsmoment des Betons.

$\int_0^{\Omega_1} d\omega_1 \int_0^{\theta_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\theta_1$ = die ganze Deformationsarbeit der Eisenarmierung.

$\int_0^{\Omega} d\omega \int_0^{\theta} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\theta$ = die gesamte Deformationsarbeit des Betons.

Die Bedingungsgleichungen sind also:

$$\begin{cases} \int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\omega_1 + \int_0^{\Omega} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\omega = M, \\ \int_0^{\Omega_1} d\omega_1 \int_0^{\theta_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\theta_1 + \int_0^{\Omega} d\omega \int_0^{\theta} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\theta = \text{Minimum.} \end{cases}$$

Durch Ableitung nach θ_1 erhält man folgende zwei derivierte Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{1}{l}\int_0^{\Omega_1} A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1^2 d\omega_1 + \frac{1}{l}\int_0^{\Omega} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2\theta' d\omega = 0, \\ \int_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1 d\omega_1 + \int_0^{\Omega} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x\theta' d\omega = 0, \end{cases}$$

aus denen sich folgendes Verhältnis zwischen der Drehung θ_1 und dem Drehungssystem θ ergibt:

$$\frac{\int\limits_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1\, d\omega_1}{\int\limits_0^{\Omega_1} A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1^2\, d\omega_1} = \frac{\int\limits_0^{\Omega} B\left(\frac{x\theta}{l}\right) x\theta'\, d\omega}{\int\limits_0^{\Omega} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x^2\theta'\, d\omega}. \tag{4}$$

Erörterung der Formel (4).

1. Fall. Das Drehungssystem θ und die Drehung θ_1 sind so beschaffen, daß, wenn das Moment M Null wird, auch θ und θ_1 Null werden, und ferner, wenn M allmählich zunimmt, auch das Drehungssystem θ und die Drehung θ_1 (nach einem bestimmten Gesetze) allmählich zunehmen.

In diesem ersten Falle nehmen wir M so klein an, daß kein Eisen- oder Betonelement über die Grenzen der elastischen Deformation hinaus beansprucht wird.

Es ergibt sich dann, sowohl für die gezogenen, als auch für die gepreßten Eisenfibern:

$$A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) = E_1 \frac{x_1\theta_1}{l},$$

$$A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) = E_1,$$

folglich:

$$\int\limits_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1\, d\omega_1 = E_1 \frac{\theta_1}{l} \int\limits_0^{\Omega_1} x_1^2\, d\omega_1,$$

$$\int\limits_0^{\Omega_1} A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1^2\, d\omega_1 = E_1 \int\limits_0^{\Omega_1} x_1^2\, d\omega_1,$$

daher:

$$\frac{\int\limits_0^{\Omega_1} A\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1\, d\omega_1}{\int\limits_0^{\Omega_1} A'\left(\frac{x_1\theta_1}{l}\right) x_1^2\, d\omega_1} = \frac{E_1 \frac{\theta_1}{l} \int\limits_0^{\Omega_1} x_1^2\, d\omega_1}{E_1 \int\limits_0^{\Omega_1} x_1^2\, d\omega_1} = \frac{\theta_1}{l}.$$

Ebenso kann man für die gezogenen Betonelemente (von 0 bis Ω_1) schreiben:

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E_t \frac{x\theta}{l}, \quad B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E_t$$

und für die gepreßten (von $-\Omega_c$ bis θ):

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E_c\frac{x\theta}{l}, \quad B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) = E_c.$$

Jedes Integral des zweiten Gliedes der Formel (4) zerfällt in zwei Teile, von denen einer innerhalb der Grenzen 0 und Ω_t (Pressung), der andere innerhalb der Grenzen $-\Omega_c$ und 0 (Zug) bleibt.

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} B\left(\frac{x\theta}{l}\right)x\theta'\,d\omega = \int_{-\Omega_c}^{0} E_c\frac{x\theta}{l}x\theta'\,d\omega + \int_{0}^{\Omega_t} E_t\frac{x\theta}{l}x\theta'\,d\omega =$$

$$= E_c\frac{1}{l}\int x^2\theta\theta'\,d\omega + \frac{E_t}{l}\int_0^{\Omega_t} x^2\theta\theta'\,d\omega,$$

$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2\theta'\,d\omega = \int_{-\Omega_c}^{0} E_c x^2\theta'\,d\omega + \int_{0}^{\Omega_t} E_t x^2\theta'\,d\omega =$$

$$= E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x^2\theta'\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta'\,d\omega,$$

und das zweite Glied der Formel (4) wird

$$\frac{1}{l}\,\frac{E_c\int_{-\Omega_t}^{0} x^2\theta\theta'\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta\theta'\,d\omega}{E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x^2\theta'\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta'\,d\omega},$$

so daß die Formel (4) geschrieben werden kann:

$$\text{(4')} \qquad \theta_1 = \frac{E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x^2\theta\theta'\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta\theta'\,d\omega}{E\int_{-\Omega_t}^{0} x^2\theta'\,d\omega + E_c\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta'\,d\omega},$$

und da θ' die Derivate von θ zu θ_1 ist, so darf man noch weiter vereinfachen:

$$\theta_1 = \frac{E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x^2\theta\,d\theta\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\theta\,d\theta\,d\omega}{E_c\int_{-\Omega_c}^{0} x\,d\theta\,d\omega + E_t\int_{0}^{\Omega_t} x^2\,d\theta\,d\omega}.$$

Auch in diesem Falle dürfen unserer Meinung nach nur drei Hypothesen aufgestellt werden: 1. Es sei θ_1 die größte Drehung der betrachteten Eisen- oder Betonelemente, so daß die Drehung θ um so kleiner werde, je weiter sich die Betonelemente $d\omega$ vom Eisenschnitt entfernen; 2. es sei θ_1 die kleinste Drehung, so daß die Werte von θ um so größer werden, je weiter sich die Betonelemente $d\omega$ vom Eisenschnitt entfernen; 3. es seien die Drehungen θ_1 und θ gleich.

Die Erörterung dieser drei Hypothesen ist nicht wesentlich verschieden von dem, was über die gezogenen Körper ausgeführt wurde. Sie ist aber schwerer zu begreifen, da die Integrale des Zählers in der Formel (4') geometrisch nur mit Körpern von vier Dimensionen sich darstellen lassen. Man kann sich auf dem Betonschnitt Linien, welche die Punkte gleicher Drehung (θ = konstant) verbinden, gezogen denken; bei den beiden ersten Hypothesen bilden dieselben so viele Systeme als Eisen der Armierung sind, jedes Eisen liegt in der Mitte des entsprechenden Systems; man kann sich diese Linien so nahe aneinander gelegen denken, daß die dazwischen befindlichen Streifchen $d\omega$ beliebig klein sind. Nehme man nun an, daß, während M konstant bleibt, θ_1 die unendlich kleine Veränderung $d\theta_1$ erfahre; alsdann werden sich auch alle θ der verschiedenen Streifchen verändern, die einen, den Eisenelementen anliegend, im gleichen Sinne wie θ_1, die anderen im entgegengesetzten Sinne, so daß die Veränderung des Betonwiderstandsmoments gleich und entgegengesetzt zu der des Eisens ist. Diese Veränderung ist:

$$E_c \int_{-\Omega_c}^{0} x \cdot x d\theta \cdot d\omega + E_t \int_{0}^{\Omega_t} x \cdot x d\theta \cdot d\omega,$$

d. h. der Nenner der Formel (4'): dieser Nenner hat also ein $d\theta_1$ entgegengesetztes Zeichen, ebenso wie der Zähler, da ja ihr Quotient gleich θ_1, also positiv ist.

Man denke sich auf jedem Streifen Ordinaten errichtet, eine, deren Länge $E_c d\theta$ für die gepreßten, $E_t d\theta$ für die gezogenen Flächen sei. Man erhält so einen Körper, dessen Elemente $E d\theta d\omega$ sind; das Trägheitsmoment dieses Körpers zur neutralen Achse wird vom Nenner der Formel (4') ausgedrückt. Wie schon vorher gezeigt, ist der betreffende Rauminhalt teils positiv (von demselben Zeichen als $d\theta_1$), teils negativ: ebenso verhält es sich mit seinem Trägheitsmoment, dessen negativer Teil als absoluter Wert der größere ist, da dessen Zeichen dem von $d\theta_1$ entgegengesetzt ist. Es ist also möglich von dem negativen Teil des Körpers ein Trägheitsmoment gleich dem des positiven abzutrennen, dann gleicht das Trägheitsmoment des übrigen Körpers dem Nenner

der Formel (4'). Bilden wir nun auf jedem Element $E d\theta d\omega$ mittels der neuen Dimension θ, das Element $E\theta d\theta d\omega$ eines Körpers mit vier Dimensionen, dessen Base, sozusagen, der vorhergehende Rauminhalt ist. Dieser neue Körper besteht auch aus zwei Teilen von entgegengesetzten Zeichen: das Trägheitsmoment desselben, analytisch durch den Zähler der Formel (4') ausgedrückt, hat auch zwei Teile, von welchen der negative (als absoluter Wert) größer als der positive ist: Auch hier kann man von dem negativen Körper einen Teil abtrennen, dessen Trägheitsmoment dem des positiven gleicht. Der Zähler der Formel (4') wird daher das Trägheitsmoment des übrigbleibenden Körpers (T) sein: dieser hat als Base einen Teil der negativen Elemente $E d\theta d\omega$, deren Gesamtheit wir mit W bezeichnen. Bei der ersten Annahme sind die Werte von θ, für die Streifen, in denen $d\theta$ positiv ist, größer als die der übrigen; folglich ist W ein Teil von V. Bei der zweiten Annahme findet das Gegenteil statt, und V ist ein Teil von W. Daher hat im ersten Falle der Bruch $\frac{\text{Trägheitsmoment } (T)}{\text{Trägheitsmoment } (V)}$ einen Wert, der jedenfalls kleiner als das größte der θ ist, die den Streifen der Base W entsprechen, also natürlich auch kleiner als θ_1 und nicht etwa gleich, wie es nach Formel (4') scheinen könnte: im zweiten Falle ist derselbe Bruch größer als das kleinste dieser verschiedenen θ und natürlich größer als θ_1 und nicht etwa gleich, wie Formel (4') angibt. Da nun die erste und die zweite Annahme zu einer Unmöglichkeit führen, so bleibt nur die dritte übrig, infolge deren, da θ konstant ist, W gleich V, und das Verhältnis der Trägheitsmomente T und V gleich θ ist; daher

$$\theta_1 = \theta,$$

wie es die Annahme verlangt.

Man kann also folgern, daß während der elastischen Deformationsperiode jedes Eisen- oder Betonelement sich in einem konstanten Winkel um die neutrale Achse dreht und die Fläche eines Querschnittes eben bleibt.

2. Fall. In diesem zweiten Falle setzen wir $\theta = \theta_1$ und das Moment groß genug an, damit an einem, wenn auch noch so kleinen Teile des Schnittes, die Längenveränderung die elastische Deformation übersteigt. Dann ist nicht mehr, wie beim ersten Falle $B\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ eine lineare Funktion als $E\frac{x\theta}{l}$, und die betreffenden Ausführungen haben für diesen Fall keine Geltung mehr.

Die Funktion B ist (wie schon erwähnt) derartig, daß man jeden Wert derselben als das Produkt von $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ und einer gleichartigen

Größe (der virtuellen Deformation), betrachten kann, die aber der wirklichen Deformation $\frac{x\theta}{l}$ gleich, oder größer als diese ist.

Die Funktion B gleicht der erwähnten Deformation eines Elementes für eine Drehung ξ (virtuelle Drehung), die gleich θ, oder größer als θ ist. Mithin ist

$$B\left(\frac{x\theta}{l}\right) = B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\xi}{l},$$

wo $\xi > 0$ für die über die Elastizitätsgrenze hinaus beanspruchten Elemente ist, und gleich θ bei denen, deren Beanspruchung sich innerhalb der Elastizitätsgrenze hält.

Das erste Glied der Formel (4) ist wieder, wie im vorhergehenden Falle, gleich $\frac{\theta_1}{l}$, sodaß man es auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\frac{\theta_1}{l} = \frac{\int\limits_{-\Omega_c}^{\Omega_t} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\frac{x\xi}{l}\,x\theta'\,d\omega}{\int\limits_{-\Omega_c}^{\Omega_t} B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)x^2\theta'\,d\omega},$$

oder noch einfacher

$$(4'') \qquad \theta_1 = \frac{\int\limits_{-\Omega_c}^{\Omega_t} x^2\left(B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)\xi\,d\theta\,d\omega\right)}{\int\limits_{-\Omega_c}^{\Omega_t} x^2\left(B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)d\theta\,d\omega\right)}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von der (4′) nur in folgenden Punkten: 1. Statt der Koeffizienten E_c, E_t hat man die Funktion $B'\left(\frac{x\theta}{l}\right)$ mit θ veränderlich und gleich E_c oder E_t nur in den elastisch deformierten Elementen; 2. θ_1 bei dem Integral des Zählers wird durch ξ, gleich oder größer als das entsprechende θ, ersetzt.

Man darf auch hier die drei Hypothesen des ersten Falles aufstellen; 1. θ_1 ist gleich dem θ Maximum, und je größer der Abstand des betrachteten Punktes von der Eisenarmierung wird, desto kleiner wird θ. 2. θ_1 ist gleich θ Minimum, das um so kleiner wird, je weiter sich das Element $d\omega$ von der Eisenarmierung entfernt. 3. θ ist konstant und gleich θ_1. Denken wir uns nun auf der Schnittfläche Linien gezogen, welche die Punkte gleicher Drehung verbinden, sodaß der Beton-

schnitt in Streifen $d\omega$ geteilt wird und für jeden einzelnen derselben θ als konstant betrachtet werden kann.

Man nehme nun an, daß M konstant bleibt, aber θ_1 sich um den unendlich kleinen Wert $d\theta_1$ vergrößert; dann werden sich auch alle θ der verschiedenen Streifen verändern, einige, die den Eisenelementen anliegen, im gleichen Sinne wie θ_1, die anderen im entgegengesetzten Sinne, sodaß die Veränderung des Betonwiderstandsmoments der des Eisens gleich und entgegengesetzt ist. Diese Veränderung wird ausgedrückt durch:

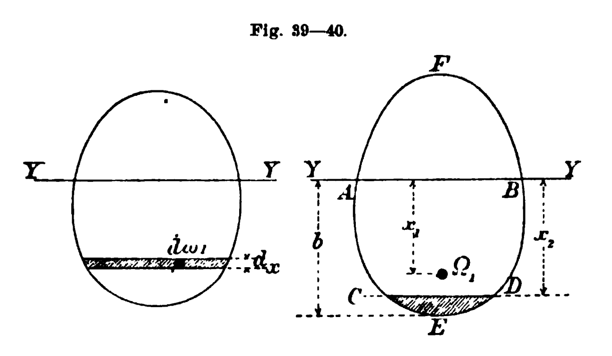
$$\int_{-\Omega_c}^{\Omega_t} x B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) x d\theta \cdot d\omega$$

d. h. durch den Nenner der (4″): dieser Nenner hat also ein $d\theta_1$ entgegengesetztes Zeichen. Dasselbe gilt für den Zähler, da ihr Quotient gleich θ_1, also positiv ist.

Es ist aber hier nicht möglich, einen dem vorigen ähnlichen Beweis zu führen, da die Drehungen ξ für einige Elemente größer als die entsprechenden θ sind, und im voraus die Elemente zu bestimmen, bei denen das der Fall ist, auch unmöglich ist.

Die vorigen Ausführungen haben also für diesen Fall keine Geltung, aber es ist dennoch möglich, durch Folgerungen aus den für gezogene Körper geltenden Darlegungen und durch Prüfung einzelner besonderer Fälle zu einem bestimmten Ergebnis zu gelangen. Betrachten wir z. B. einen beliebigen der neutralen Achse yy parallelen Streifen (Fig. 39), dessen Breite dx beliebig klein sei, und der, außer Betonelementen, wenigstens ein Eisenelement $d\omega_1$ enthalte. Da sämtliche Elemente dieses Streifens denselben Abstand von der neutralen Achse haben, so wird man wohl diesen Streifen als einen ein-

Fig. 39—40.



fach gezogenen Körper aus armiertem Beton betrachten dürfen, sodaß die für gezogene Körper gefundenen Ergebnisse hier zur Anwendung gelangen können, nämlich: Solange die elastische Deformation nicht überschritten ist, drehen sich alle Elemente um die neutrale Achse in gleichem Winkel, und die Deformation ist gleichförmig. Ist aber diese Grenze erreicht

oder überschritten, so wird das Eisen die größte lineare Deformation und somit auch die größte Drehung erfahren, welche der der anliegenden Betonelemente gleich sein wird, während die Drehung der übrigen Betonelemente um so kleiner wird, je weiter sich dieselben vom Eisenschnitt entfernen. Nehmen wir nun an, daß bei der Hypothese der gleichförmigen Deformation aller Schnittelemente die Elastizitätsgrenze nur von denjenigen Elementen überschritten werde, welche den größten Abstand von der neutralen Achse irgend eines Elementes der Armierung haben. Der Einfachheit wegen haben wir auf Fig. 40 die Armierung mittels eines einzigen Kreises Ω_1 (mit der Abszisse x), die Fläche, wo die Elastizitätsgrenze überschritten wird, mit *CDE* (deren kleinste Abszisse $x_2 \gtrless x_1$, und äußerste b ist) dargestellt. Wir nehmen an, nach den vorigen Ausführungen, aber nicht auf Grund sicheren Beweises, daß in der Fläche *ACDBF* die Drehung gleichförmig sei; berechnen wir sie mit θ_1, und jede beliebige Drehung eines Elementes der Fläche *CDE* mit θ, endlich mit ξ die entsprechende virtuelle Drehung, welche in der Fläche *CDE* konstant sein kann oder veränderlich (zu- oder abnehmend bezüglich θ_1, da längs der Geraden *CD* $\theta_1 = \theta = \xi$).

Durch Anwendung der vorhergehenden Methode findet man folgende Beziehung zwischen θ_1 und dem ξ-System:

$$\theta_1 = \frac{\int_{x_2}^{b} x^2 \left(B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) \xi \, d\theta \, d\omega\right)}{\int_{x_2}^{b} x^2 \left(B'\left(\frac{x\theta}{l}\right) d\theta \, d\omega\right)},$$

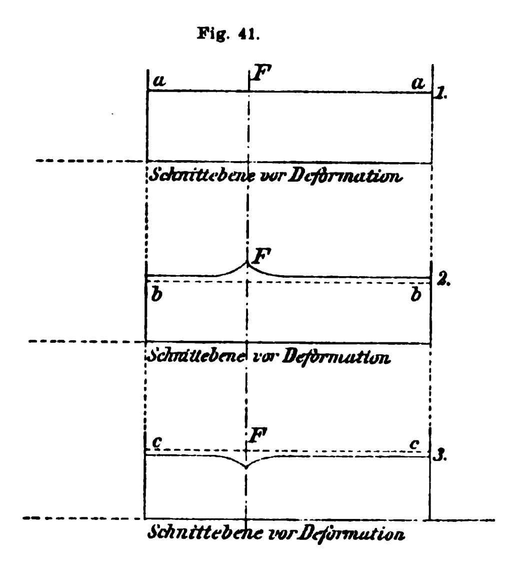
worin $d\theta$ die Veränderung von θ ist, wenn das ganze Moment M konstant bleibt.

Es ist leicht, wie bei dem ersten Falle zu beweisen, daß ξ konstant und gleich θ_1 ist, sodaß die wirkliche Drehung θ um so kleiner wird, je größer die Abszisse des Elementes $d\omega$ von x_2 bis b wird; denn da die virtuelle Deformation $\frac{x\xi}{l}$ immer zunimmt, wächst das Verhältnis zwischen derselben und der wirklichen Deformation $\frac{x\theta}{l}$, also der Quotient $\frac{\xi}{\theta}$. Diese Lösung (virtuelle Drehung konstant) genügt also der Gleichung der kleinsten Arbeit, und da man, um dieselbe zu erhalten (durch Annahme gleichförmiger Drehung der Fläche *AFBDC*) zwischen den verschiedenen Elementen Adhäsion vorausgesetzt hat, so halten wir sie für der Wirklichkeit entsprechend. In der Tat kann eine Auf-

gabe betreffend die kleinste Arbeit, in ihrer Allgemeinheit aufgefaßt, unmöglich zwei Lösungen haben.

Nach diesen beiden einfachen Fällen erscheint nun die Art der möglichen Auflösungen (im allgemeinen Falle, wo die Elastizitätsgrenze auch in den eiserne Elemente enthaltenden Flächen überschritten wird) in drei Fällen, die wir graphisch erklären werden, völlig bestimmt. Man errichte (Fig. 41) auf jedem Betonelement des Schnittes eine zur Schnittebene senkrechte Ordinate, die die wirkliche Drehung θ des Elementes mißt, falls die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist, aber im andern Falle die virtuelle Drehung ξ mißt. — Wenn man den so entstandenen Körper mittels einer zur obigen Schnittoberfläche senkrechten Ebene schneidet, die den Mittelpunkt einer der Elemente F der Eisenarmierung enthält, so sind für den Schnitt folgende, denen der gezogenen Körper ähnliche Fälle möglich: 1. Der Schnitt ist eine Gerade mit konstanter Ordinate. 2. Er ist eine Linie nach F steigend, deren zwei Teile eine Gerade bb mit konstanter Ordinate als Asymptote haben. 3. Er ist eine Kurve mit einem Minimum oder einem Rückkehrpunkt, deren Zweige eine Gerade mit konstanter Ordinate als Asymptote haben.

Fig. 41.



Die Erörterung kann auf dieselbe Weise, wie schon für die gezogenen Körper geführt werden, mit dem Unterschied, daß die Verhältnisse zwischen Rauminhalt und Flächen durch die Verhältnisse ihrer Trägheitsmomente zu ersetzen sind.

Die Ergebnisse sind ganz ähnliche, nämlich: der dritte Fall führt zu der Unmöglichkeit, daß die Drehung des Eisens einen Wert ergibt, der größer als sie selbst ist. Der erste Fall tritt nur dann ein, wenn die Betonelemente bei F die Elastizitätsgrenze nicht überschritten haben, sonst führt er ebenfalls zu dem Widersinn, daß die Drehung des Eisens bei F einen größeren Wert, als sie selbst annimmt. Der zweite Fall ist der einzige, der zu keinem Widersinn führt, wenn die Lösung des ersten die Überschreitung der Elastizitätsgrenze durch die F anliegenden Betonelemente ergibt. Dann ist die Eisendrehung kleiner als der mittlere Wert der wirklichen und virtuellen Drehungen der Beton-

elemente und vielleicht auch kleiner als das Minimum beider. Dies ist keineswegs unmöglich, denn da jede virtuelle größer als die entsprechende wirkliche Drehung ist, so kann die Eisendrehung zwischen der kleinsten Ordinate und der kleinsten wirklichen Drehung enthalten sein; es kann daher das Eisenelement die anliegenden Betonelemente mit sich fortreißen.

Schlußfolgerungen.

Wir wollen nun die Ergebnisse vorstehender Untersuchungen zusammenfassen und mit den in der Einleitung erwähnten Theorien vergleichen.

Beginnen wir mit den einfach gezogenen Körpern, und nehmen wir an, daß der gesamte Zug von Null ab allmählich zunehme und in den beiden Materialien allmählich zunehmende einheitliche Widerstände hervorrufe.

In der ersten Deformationsperiode stimmen die beiden ersten Theorien und die Resultate unserer Untersuchung überein, nämlich: Die Querschnitte des gezogenen Körpers bleiben eben und die Verlängerungen der Eisen- und der Betonelemente sind gleich.

Der einheitliche Widerstand, den die Betonelemente entwickeln, ist gleichförmig und der einheitlichen Verlängerung proportional, ihr Verhältnis ist der gewöhnliche Zugelastizitätsmodul. Dasselbe gilt auch für die Eisenelemente; das Verhältnis zwischen den beiden Widerständen, von den Verlängerungen unabhängig, gleicht dem der Elastizitätsmoduln beider Materialien. Aber bei Zunahme des Gesamtwiderstandes, der Verlängerung der Betonelemente, mithin auch ihres einheitlichen Widerstandes, erreicht dieser letztere die Elastizitätsgrenze, über welche hinaus das Verhältnis zwischen Widerstand und Deformation nicht mehr konstant bleibt. Hier tritt eine neue Periode der Veränderungstätigkeit ein, wo sich die beiden Theorien unter einander und von dem, was bewiesen wurde, unterscheiden: was die Deformation anbetrifft, so lassen beide Theorien das, was bei der ersten Phase gesagt wurde, bestehen; für die einheitlichen Widerstände bleibt bei der ersten Hypothese ebenfalls das schon Gesagte in Kraft, sodaß beim Beton sogar Zugwiderstände von 2 kg oder mehr auf das Quadratcentimeter angenommen werden.

Das ist aber offenbar undenkbar, da in diesem Falle das bloße Vorhandensein des Eisens bei beliebigem Abstande das Wesen des Betons dermaßen verändern würde, daß sich die elastische Deformationsperiode über die gewöhnliche Bruchgrenze hinaus erstreckt. Man könnte allenfalls vermuten, daß durch eine etwaige chemische Wirkung oder einen physikalischen Vorgang dies beim Eisen in sehr beschränktem Maße

stattfinde; doch kann dies selbstverständlich nicht für jeden beliebigen Abstand Geltung haben. Die Unmöglichkeit dieser Annahme wird jetzt, unserer Meinung nach, von den meisten Verfassern zugegeben, welche die zweite Theorie oder Hennebiques Methode anwenden. Canevazzi gibt das in seinem wertvollen Werke klar zu verstehen, und Résal wagt es überhaupt nicht, irgend eine Berechnungsmethode bei dieser zweiten Periode der Veränderungstätigkeit zu empfehlen. Die zweite Theorie entspricht besser der Logik. Denn wenn sie auch die Verlängerungen beider Materialien als gleich ansieht, nimmt sie für den Beton keine größeren einheitlichen Widerstände an, als die, welche bei nicht armiertem Beton entstanden wären. Daher nimmt der Elastizitätsmodul des Betons ab, sobald die Verlängerung zunimmt; wenn diese letztere ebenso groß oder größer als die gewöhnliche Bruchdeformation ist, wächst der einheitliche Widerstand nicht weiter und bleibt stets der gewöhnlichen den Bruch bewirkenden Ziehung gleich.

Wir meinen, daß diese Theorie fehlgeht, wenn sie für beide Materialien dieselbe Verlängerung bei jedem beliebigen Abstande vom Eisen annimmt, so daß in jedem Punkte des Schnittes auch die gewöhnliche Bruchverlängerung überschritten werden kann, während uns diese Annahme in beschränktem Maße in der Nähe des Eisens zulässig dünkt.

Das eben glauben wir bewiesen zu haben, nämlich: die Verlängerungen der Eisen- und der anliegenden Betonelemente sind gleich, und, je weiter sich die Beton- von den Eisenelementen entfernen, desto kleiner wird die Verlängerung der ersteren. Diese Abnahme in der Verlängerung der Betonelemente hat eine Grenze, die wir nicht bestimmen konnten, doch glauben wir ein absolutes Minimum derselben gefunden zu haben bei der Untersuchung betreffs der gezogenen Körper, wo die Adhäsion zwischen Eisen und Beton nicht berücksichtigt wurde.

Und so bestimmt nach unserer Meinung die zweite Theorie ein absolutes Maximum für die Deformation des Betons, während unsere Untersuchungen deren Minimum festsetzen. Mithin werden die auf der zweiten Theorie fußenden Berechnungen für das Beton zu große, für das Eisen zu kleine Widerstände ergeben, während das Gegenteil bei Anwendung unser Untersuchungen stattfindet. Zwischen diesen beiden Resultaten muß die Wahrheit liegen, und das Gebiet, auf welches sie nunmehr beschränkt ist, ist viel kleiner als vorher.

Ein Gebiet, worin der Widerstand beider Materialien enthalten ist, bestimmen zu können, ist alles, was man für die Baufestigkeit von der Theorie verlangen kann. Die Annäherung ist für die Praxis genügend, wenn man bedenkt, daß auch bei Annahme des kleinsten Betonwiderstandes gleich Null (Hennebiquesche Methode) die Differenzen mit

den Resultaten der zweiten Theorie 10% in den gewöhnlichen Fällen nicht überschreiten. Jedenfalls ist es das Höchste, was bis jetzt zu erreichen ist. Unsere Berechnungsmethode ist ganz besonders nützlich, sobald das Verhältnis zwischen den Flächen des Eisen- und des Betonschnittes sehr klein ist.

Da wir beabsichtigen unsere Untersuchungen auf die inneren Verschiebungen beider Materialien auszudehnen, so haben wir hier keine numerischen Beispiele gegeben. Wir haben die Hoffnung nicht aufgegeben, noch genauere Ergebnisse erreichen zu können.

* * *

Die Vergleichung zwischen den beiden Theorien und den Resultaten unserer Untersuchungen betreffs der gebogenen Körper führt zu ähnlichen Folgerungen. Man muß jedoch in diesem Falle von dem Beginne der Beanspruchung bis zur Bruchbelastung drei Perioden unterscheiden.

In der ersten Periode stimmen (wie bei den gezogenen Körpern) die beiden Theorien und was wir bewiesen haben, vollkommen überein, nämlich:

Jeder Querschnitt des gebogenen Körpers bleibt nach der Deformation eben, und die Eisenelemente bleiben auf der Schnittebene; die Elemente beider Materialien drehen sich in gleichem Winkel um die neutrale Achse. Der einheitliche Widerstand jedes Betonelementes ist der entsprechenden einheitlichen Verlängerung proportional, ihr konstantes Verhältnis ist der gewöhnliche Modul der Zug- oder Pressungselastizität; dasselbe gilt auch für die Eisenelemente, so daß das Verhältnis der einheitlichen Widerstände zweier Elemente der beiden Materialien bei gleichem Abstand von der neutralen Achse dem Quotienten der bezüglichen Elastizitätsmoduln gleicht.

Sobald aber die Beanspruchung der der neutralen Achse am fernsten gelegenen Elemente die Elastizitätsgrenze erreicht, endigt die erste Bewegungsphase und beginnt die zweite. Hier stellt die erste Theorie die schon erwähnten Postulate auf, von welchen besonders das zweite sich so weit von der Wahrheit entfernt, wie bei den gezogenen Körpern auseinandergesetzt wurde, daß eine Vergleichung hier nutzlos wäre. Wir wollen diese auf die zweite Hypothese und auf die Hennebiquesche Methode beschränken.

Die zweite Theorie hält das erste Postulat aufrecht, verändert aber das zweite folgendermaßen:

Der einheitliche Widerstand jedes Betonelementes ist gleich dem, welcher bei derselben Deformation von dem Element entwickelt worden wäre, wäre der Körper nicht armiert. Also für die Elemente, welche,

infolge ihres Abstandes von der neutralen Achse Längenveränderungen erfahren, die größer als die Elastizitätsgrenze sind, wächst der einheitliche Widerstand nicht der Deformation proportional, sondern mit abnehmendem Modul, bis die gewöhnliche Bruchgrenze erreicht ist, jenseits deren der Widerstand konstant und von der Längenveränderung unabhängig bleibt.

Die Hennebiquesche Methode läßt, wie schon gesagt, jeden Zugwiderstand des Betons unberücksichtigt und nimmt an, daß sich die gesamte derartige Beanspruchung nur im Eisen vereinigt.

Aus unserer Untersuchung geht dagegen Folgendes hervor:

Sobald das der neutralen Achse entfernteste Betonelement die Elastizitätsgrenze erreicht hat, dreht es sich nicht mehr in gleichem Winkel wie die andern Elemente um die neutrale Achse, sondern verlangsamt seine Drehung, so daß es eine virtuelle Drehung annimmt, die deren wirklicher Drehung gleichkommt. Bei Zunahme der Beanspruchung geschieht dasselbe nach und nach auch mit den der neutralen Achse näheren Elementen, während in der übrigen Schnittfläche die Drehung gleichförmig ist und die Elemente in einer einzigen Ebene bleiben. Und da ein beständiger Übergang von den wirklichen zu den virtuellen Deformationen stattfindet, so verändert sich auch beständig die Fläche des deformierten Schnittes. Da ferner in einem nicht über die Elastizitätsgrenze hinaus beanspruchten Körper die virtuelle der wirklichen Deformation gleich ist, so haben die Elemente des Schnittes (die Eisenflächen eingeschlossen) gleiche Drehung um die gemeinsame neutrale Achse.

Die zweite Phase der Veränderungstätigkeit dauert so lange, als (bei Zunahme der Beanspruchung) die Elastizitätsgrenze auch in den Betonelementen, deren Abstand von der neutralen Achse dem der am fernsten gelegenen Eisenelemente gleicht, erreicht ist: hier fängt die dritte Bewegungs- oder Arbeitsperiode an. Was den Wert der einheitlichen Elementwiderstände als Funktion ihrer Deformationen anbetrifft, so behält natürlich das gewöhnliche Widerstandsgesetz des Betons seine Geltung. Es erhellt also, bei Vergleichung unserer Ausführungen mit der zweiten Theorie, daß diese letztere für den Beton größere Deformationen annimmt als die, welche in der zweiten Periode der Veränderungstätigkeit tatsächlich stattfinden. Daher ergibt bei gleicher Beanspruchung die Berechnung der Armierung zu kleine Resultate, während dagegen die Hennebiquesche Methode zu große ergibt, da die Zugarbeit des Betons unberücksichtigt bleibt. Wir meinen also, daß sowohl die Methoden der zweiten Theorie als auch die von Hennebique durch eine Berechnung nach unserem Prinzip der virtuellen konstanten Drehung zu ersetzen sind.

In der dritten Phase der Veränderungstätigkeit hält die zweite Theorie die nämlichen Postulate aufrecht, die für die zweite aufgestellt wurden. Alle darauf beruhenden Berechnungen ergeben daher stets für die Betonelemente die größte Deformation (als absoluten Wert), und umgekehrt wird die Veränderungstätigkeit beim Eisen ein Minimum sein.

Das Resultat der vierten Untersuchung, wo bei gezogenen Körpern die Adhäsion zwischen Eisen und Beton in Betracht gezogen wird, zeigt uns: Während der Betonschnitt zur Armierung vollständige Adhäsion hat, so daß die Eisen- und die anliegenden Betonelemente gleiche Deformation erfahren, hat der Schnitt an den entfernten Punkten eine Form, welche einer konstanten virtuellen Drehung entspricht. Wenn ferner die Adhäsion zwischen Eisen und Beton unberücksichtigt bleibt, und man annimmt, daß in der dritten Phase der Veränderungstätigkeit das Deformationsgesetz der zweiten fortbesteht, so findet man, daß die wirkliche Eisendrehung der virtuellen des Betons gleichkommen müßte. Offenbar erhält man hier, indem die Adhäsion unberücksichtigt bleibt, die absolut kleinste Veränderungstätigkeit beim Beton, während die des Eisens größer als die wirkliche ist.

In dieser dritten Periode der Veränderungstätigkeit kann also die wirkliche Deformation jedes Beton- oder Eisenelements nicht bestimmt werden. Doch ist es möglich, dieselbe auf einen Bereich zu beschränken, dessen Grenzen einerseits von den Berechnungen nach der zweiten Theorie gegeben werden, andererseits von der Methode, die auf folgendem Prinzip beruht: „die virtuelle Drehung der verschiedenen Betonelemente ist konstant und gleich der wirklichen der Eisenelemente“, und so sind die Grenzen unseres Gebietes viel enger geworden, doch meinen wir, es sei möglich dieselben noch enger zu ziehen durch neue Untersuchungen über die Verschiebungen der beiden Materialien unter Beibehaltung unserer Methode.

* * *

Wir haben keine endgültige Formeln und numerische Beispiele gegeben, da dies nicht der Zweck unserer Arbeit war; es gibt hier noch zu viel zu untersuchen, besonders über die Wirkungen der Verschiebungskräfte, als daß irgend eine Formel als endgültig zu betrachten wäre. Dagegen halten wir es für angebracht, darauf hinzuweisen, wie man größere Genauigkeit in der Praxis erreichen kann. Es wäre für uns eine große Genugtuung, wenn unsere bescheidene Arbeit bei Fachmännern die Überzeugung erwecken könnte, daß auch auf diesem Gebiete des armierten Betons Wahrheit erreicht werden kann. Wir meinen

auch, daß Hypothesen nicht aufgestellt werden dürfen, wenn sie nicht vorher durch Berechnungen, die auf bewährten Prinzipien beruhen — wie dem der kleinsten Veränderungstätigkeit — geprüft wurden. Obwohl nach der Berechnung die deformierten Querschnitte nicht eben sind, so steht das mit den Erfahrungsresultaten und dem, was man sieht, nicht im Widerspruch. Denn diese Erscheinung zeigt sich erstens augenscheinlich auch in den homogenen Systemen, wo die Elastizitätsgrenze überschritten wird (in diesem Falle sind die über die Elastizitätsgrenze hinaus beanspruchten Teile als Materialien verschiedener Art zu betrachten); zweitens wären bei den Versuchen von Considère diese Erscheinungen nicht wahrnehmbar gewesen.

Neuer Beweis einer Grunertschen Formel aus der Kartenentwurfslehre.

Von E. HAENTZSCHEL in Berlin.

Im 38. Jahrgang dieser Zeitschrift (1893) hat Hr. E. Roedel auf S. 56—60 unter dem Titel: Ableitung einer neuen Formel für den Flächeninhalt der Zone eines Rotationsellipsoids den folgenden Ausdruck für den Flächeninhalt einer von der Breite φ_1 bis zur Breite φ sich erstreckenden Zone gefunden:

$$\begin{aligned} Z = \frac{4\pi a^2}{1-n^2}\Big[&(1-n)^2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ &-\frac{n}{3}(2-3n+n^3)\sin\tfrac{3}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{3}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ &+\frac{n^2}{5}(3-4n-n^2+2n^3)\sin\tfrac{5}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{5}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ &-\frac{n^3}{7}(4-5n-2n^2+3n^3)\sin\tfrac{7}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{5}{2}(\varphi+\varphi_1) \\ &+\frac{n^4}{9}(5-6n-3n^2+4n^3)\sin\tfrac{9}{2}(\varphi-\varphi_1)\cos\tfrac{9}{2}(\varphi+\varphi_1)\mp\cdots\Big]. \end{aligned}$$

Hätte Hr. Roedel bemerkt, daß in der eckigen Klammer die Größe $(1-n)^2$ ein allen Gliedern gemeinsamer Faktor ist, hätte er alsdann beachtet, daß

$$\frac{a(1-n)^2}{1-n^2} = \frac{a(1-n)}{1+n} = b \tag{1}$$

ist, so hätte er es gewiß nicht unterlassen, seiner Formel die Gestalt zu geben:

$$\begin{aligned}
&Z = 2\pi ab\{(\sin\varphi - \sin\varphi_1) - \tfrac{1}{3}n(n+2)\cdot(\sin 3\varphi - \sin 3\varphi_1)\\
\text{(I)}\quad &+ \tfrac{1}{5}n^2(2n+3)\cdot(\sin 5\varphi - \sin 5\varphi_1) - \tfrac{1}{7}n^3(3n+4)\cdot(\sin 7\varphi - \sin 7\varphi_1)\\
&+ \tfrac{1}{9}n^4(4n+5)\cdot(\sin 9\varphi - \sin 9\varphi_1) \mp \cdots\}.
\end{aligned}$$

Damit hört aber unsere Formel auf neu zu sein. Grunert hat sie bereits in seinem Buche „Sphäroidische Trigonometrie" (G. Reimer, Berlin 1833, 4⁰) gegeben. Ein sehr beschwerlicher Beweis führt ihn auf sieben Seiten Groß-Quart (S. 39—46) nach mühsamen Rechnungen zu dem erstrebten Ziele.

Nach Feststellung dieser Tatsache bleibt für uns nur die Frage zu erledigen übrig, ob der von Herrn Roedel gegebene Beweis nicht durchsichtiger und ein wenig kürzer gestaltet werden kann. In der Tat gelingt dies, wenn man sich des Symbols $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Gaußschen hypergeometrischen Reihe bedient, und eine der bekanntesten Eigenschaften desselben, die schon von Euler gefunden wurde, anwendet.

Schreibt man nämlich, wie Herr Roedel, das Flächenelement der Zone in der Form:

$$\text{(2)}\quad dZ = 2a^2\pi(1-n^2)^2\cdot\cos\varphi\cdot(1+ne^{2i\varphi})^{-2}\cdot(1+ne^{-2i\varphi})^{-2}\,d\varphi,$$

verwandelt man die hierin enthaltenen Binome in die bekannten Potenzreihen, und führt man die Multiplikation beider aus, so findet man, unter Berücksichtigung von

$$\cos r\varphi = \frac{e^{+ir\varphi} + e^{-ir\varphi}}{2},$$

$$\begin{aligned}
(1+ne^{+2i\varphi})^{-2}\cdot(1+ne^{-2i\varphi})^{-2} &= A - 2B\cos 2\varphi + 2C\cos 4\varphi\\
&- 2D\cos 6\varphi + 2E\cos 8\varphi \mp \cdots,
\end{aligned}$$

wo die $A, B, C, D \ldots$ die von Herrn Roedel im Gleichungssystem (3) explizite angegebene Gestalt haben, sich aber mit dem Gaußschen Symbol schreiben lassen:

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned}
A &= F(2,\ 2,\ 1,\ n^2),\\
B &= 2n\cdot F(2,\ 3,\ 2,\ n^2),\\
C &= 3n^2\cdot F(2,\ 4,\ 3,\ n^2),\\
D &= 4n^3\cdot F(2,\ 5,\ 4,\ n^2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nun ist aber schon von Euler die Relation bemerkt worden — Gauß gibt sie als Formel [82] im Artikel 40 seiner „Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe“ —

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),$$

wonach

$$\begin{aligned}
A &= (1-n^2)^{-3}F(-1, -1, 1, n^2) = (1-n^2)^{-3}(1+n^2),\\
B &= 2n\,(1-n^2)^{-3}F(0, -1, 2, n^2) = 2n\,(1-n^2)^{-3}\cdot 1,\\
C &= 3n^2(1-n^2)^{-3}F(1, -1, 3, n^2) = 3n^2(1-n^2)^{-3}(1-\tfrac{1}{3}n^2),\\
D &= 4n^3(1-n^2)^{-3}F(2, -1, 4, n^2) = 4n^3(1-n^2)^{-3}(1-\tfrac{1}{2}n^2),\\
(4)\quad E &= 5n^4(1-n^2)^{-3}F(3, -1, 5, n^2) = 5n^4(1-n^2)^{-3}(1-\tfrac{3}{5}n^2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L &= (k+1)n^k(1-n^2)^{-3}F(k-1, -1, k+1, n^2)\\
&= (k+1)n^k(1-n^2)^{-3}\left(1-\frac{k-1}{k+1}n^2\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

ist, so daß also jeder der genannten Koeffizienten ein geschlossener Ausdruck ist.

Daher ist denn

$$\begin{aligned}
dZ &= 2ab\pi\left(\frac{a}{b}\right)(1-n^2)^{-1}d\varphi\,\{(1+n^2)\cos\varphi - 4n\cos 2\varphi\cos\varphi\\
&\quad + 6n^2(1-\tfrac{1}{3}n^2)\cos 4\varphi\cos\varphi - 8n^3(1-\tfrac{1}{2}n^2)\cos 6\varphi\cos\varphi\\
&\quad + 10n^4(1-\tfrac{3}{5}n^2)\cos 8\varphi\cos\varphi \mp \cdots\},\\
&= \frac{2\pi ab}{(1-n)^2}\cdot d\varphi\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot(-n)^k\left(1-\frac{k-1}{k+1}n^2\right)(\cos(2k+1)\varphi + \cos(2k-1)\varphi)\right\},
\end{aligned}$$

wo der Koeffizient des sich für $k = 0$ ergebenden Gliedes nur halb zu nehmen ist. Faßt man hier die beiden Glieder zu einem einzigen zusammen, die mit $\cos(2k+1)\varphi$ behaftet sind, und beachtet, daß der entstehende Koeffizient durch $(1-n)^2$ teilbar ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
dZ &= 2\pi ab\cdot d\varphi\{\cos\varphi - n(n+2)\cos 3\varphi + n^2(2n+3)\cos 5\varphi\\
&\quad - n^3(3n+4)\cos 7\varphi \pm \cdots\},
\end{aligned}$$

woraus durch Integration in den Grenzen φ und φ_1 die Formel (I) hervorgeht.

Die Grunertsche Formel darf wohl als die beste für die numerische Rechnung bezeichnet werden. Sie ist bisher, wie es scheint, der Aufmerksamkeit der Geodäten entgangen; zieht doch Jordan in seinem Handbuch der Vermessungskunde (Bd. III, S. 223; 1896) seine eigenen, auf sehr umständliche Weise gefundenen und mit

viel Zeitverlust zu berechnenden Reihen für die Koeffizienten sogar den Roedelschen Ausdrücken vor. Unsere Formel findet praktische Anwendung bei der Berechnung der Größe des Teiles der Oberfläche des Erdsphäroids, der in einer Sektion der Generalstabskarte des Deutschen Reiches (Maßstab 1 : 100000) und ferner desjenigen, der in einem Meßtischblatt der Kgl. Preußischen Landesaufnahme (Maßstab 1 : 25000) dargestellt wird. Eine ganz elementare Herleitung der Grunertschen Formel nebst einigen erläuternden Rechnungsbeispielen habe ich in meiner Monographie: Das Erdsphäroid und seine Abbildung, Leipzig, B. G. Teubner, 1903, S. 53—57, gegeben.

Kleinere Mitteilungen.

Nachtrag zu der Mitteilung:

„Statische Eigenschaft eines Systems von Punkten, für die eine beliebige Funktion ihrer Lage ein Minimum ist."

(Diese Zeitschrift, Bd. 50, S. 156.)

Durch eine Angabe in dem von Herrn Voß bearbeiteten Abschnitt über die Prinzipien der rationellen Mechanik in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV 1, S. 86, habe ich Kenntnis davon erhalten, daß der in der oben genannten Mitteilung Herrn Finsterwalder zugeschriebene Satz (und seine Umkehrung) sich bereits in dem Lehrbuch der Statik von Möbius (1837) auf S. 350 findet.

Stuttgart. R. Mehmke.

Bücherschau.

C. H. Müller, Oberl. am kgl. Kaiser Friedrichs-Gymnasium zu Frankfurt a. M. und **O. Presler,** Oberl. an der städt. Oberrealschule zu Hannover. **Leitfaden der Projektionslehre.** Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Ausgabe A: Vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen. Mit 233 Figuren im Text. [VIII und 320 S.] gr. 8. In Leinwand geb. M. 4. Ausgabe B: Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Mit 122 Figuren im Text. [VI und 138 S.]. gr. S. In Leinwand geb. M. 2. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1903.

Mit Vergnügen unterzieht sich der Referent der Aufgabe, über dies ausgezeichnete, inhaltsreiche, sowohl von großer Belesenheit der Verfasser als auch von ihrer praktischen Erfahrung und Sachkenntnis zeugende Schulbuch Bericht zu erstatten. Erscheint es doch auch im richtigen Augenblick. Auf dem Kongreß deutscher Mathematiker in Gießen (1901) wurde durch die mit großer Mehrheit erfolgte Annahme einer ganzen Reihe von Thesen dem Wunsche Ausdruck gegeben, daß die Elemente der darstellenden Geometrie an allen Mittelschulen wenigstens soweit Gegenstand des Unterrichtes werden sollen, daß die in der Stereometrie nötigen Figuren korrekt hergestellt werden können. Gleichzeitig soll das Buch den Lehrern und Schülern die Durchführung der neuen Lehrpläne erleichtern, die in Preußen im Jahre 1901 erschienen und gleichfalls das konstruierende Element im stereometrischen Unterricht betonen.

Die Ausgabe A enthält im ersten Teile eine ausführliche, von der Darstellung des Würfels ausgehende Entwickelung der schrägen Parallelprojektion. Die Schrägbilder ebener Vielecke, des Kreises und Zylinders werden besprochen. Daran schließen sich die Schnitte von Körpern, von Zylinder, Kegel und Kugel, Schattenkonstruktionen, sowie einfache Körperdurchdringungen und sehr zahlreiche Anwendungen aus der Kristallographie. Weiter folgen Aufgaben aus der mathematischen Erd- und Himmelskunde (Darstellung der Revolution der Erde um die Sonne, Sonnenuhr), aus der Botanik (Blattstellungsspiralen), aus der Zoologie (Bienenzelle), aus der Physik (scharfes Schraubengewinde, Lochkamera, magnetisches Kraftfeld) und aus der Chemie (Kohlenstoffatom). Einige theoretische Betrachtungen über die Parallelprojektion beschließen diesen ersten Teil. Der zweite Teil enthält die Normalprojektion. Es werden die Risse des Punktes, der Strecke, ebener Vielecke, des Kreises und von Polyedern in einfacher Lage ermittelt, wobei nun mittels der im ersten Teile erlernten schiefen Projektion Figuren angelegt werden, welche die Vorstellung der im Grund- und Aufriß zu

zeichnenden Gebilde erleichtern. Bei den Normalbildern krummflächiger Körper wird auch die Normalprojektion einer Kugel und im Anschluß daran die orthographische Äquatorial- und Polarkarte konstruiert, ferner führen die Verfasser eine näherungsweise Konstruktion der Kugelloxodromen im Riß durch und gelangen zu einer angenäherten Konstruktion einer Merkatorkarte. Erst jetzt folgt ein mehr theoretischer Abschnitt über unbegrenzte Gerade und Ebenen, sodann kommen ebene Körperschnitte, Durchdringungen und Schattenkonstruktionen zur Behandlung. Den Schluß bildet ein Abschnitt über Zentralprojektion im Zusammenhange mit der Normalprojektion. Im Anschluß daran werden die zentralen und damit verwandten Kartenprojektionen erörtert.

Die Ausgabe B zeigt die gleiche Einteilung des Stoffes, doch sind die Anwendungen beschränkt. Es fehlen die theoretischen Betrachtungen über die Parallelprojektion, sowie die Körperdurchdringungen und zentralen Kartenentwürfe; die Schattenkonstruktionen werden bloß im Schrägbild ausgeführt.

In beiden Ausgaben bilden den Schluß ein erster Anhang mit Erklärungen und Lehrsätzen aus der systematischen Stereometrie, sowie ein zweiter Anhang „Anmerkungen", in dem sich, namentlich bei der Ausgabe A, zahlreiche Literaturnachweise, historische Notizen und analytische Ergänzungen finden.

Was die Darstellung betrifft, so ist dieselbe klar, einfach und ausführlich. Die gewöhnlichen, hergebrachten Fehler werden nicht nur vermieden, sondern ausdrücklich besprochen. Die zahlreichen Figuren zeigen eine vorzügliche, plastische Durchführnng. Alle Schrägbilder sind exakt unter Angabe der betreffenden Konstanten konstruiert. Als verbesserungsbedürftig fielen dem Referenten auf Figur 67 auf S. 60 und Figur 187 auf S. 224[1]), bei denen die Konturpunkte mangelhaft konstruiert erscheinen. Da beide Bücher für die Schule bestimmt sind, so ist die systematische Darstellung zugunsten einer anschaulichen unterdrückt, und es wird das Prinzipielle, mathematisch Wichtige nicht hervorgehoben. Vielleicht gehen die Verfasser dabei aber doch weiter als nötig. Aufgaben wie die Schnittlinie zweier Ebenen oder den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu zeichnen, bieten in rein mathematischer Hinsicht soviel Instruktives, daß sie in jedem Leitfaden der Projektionslehre zuerst eine lediglich mathematische Behandlung finden und nicht als Aufgabe aus der Markscheider-Praxis (S. 191) eingeführt werden sollten. Denn diese technische Einkleidung wirkt störend auf den mathematischen Gedanken. Auch die Ausdrucksweise könnte an manchen Stellen, auch auf dieser Stufe des Unterrichtes, mathematisch strenger gehalten sein. So wird z. B. beim parabolischen Schnitt eines Kegels S. 49 und 209 die schneidende Ebene dadurch definiert, daß sie zu *einer* Mantellinie des Kegels parallel sein soll. Um aber eine solche Ebene wirklich zu finden, muß man sie doch parallel einer Tangentialebene des Kegels wählen, also wäre dies wohl gleich in die ursprüngliche Fassung mit aufzunehmen. Der Begriff des Tangentialebene muß ja ohnehin erörtert werden.

Auf S. 254 heißt es ferner: „Das Zentralbild eines Kreises ist im *allgemeinen* eine Ellipse ..., die *Ausnahmen* (Parabel, Hyperbel) sind ohne

1) Die Angaben beziehen sich auf Ausgabe A.

Schwierigkeiten zu erkennen." Mathematisch sind aber alle 3 Schnitte gleichberechtigt. Vielleicht wäre es auch möglich, eine geometrische Rektifikation des Kreises in das Buch anfzunehmen, außer der durch $\pi = \frac{22}{7}$ gegebenen. Gewiß ist der Hinweis am Platze, daß die Irrationalität von π keine geometrisch genaue Konstruktion zuläßt (S. 157), aber in einem Leitfaden der Projektionslehre, in dem überdies so zahlreiche Näherungskonstruktionen durchgeführt werden, verdient dann auch die Bemerkung einen Platz, wie auf geometrischem Wege die Rektifikation des Kreises *praktisch* ebenso genau durchgeführt werden kann wie jede andere Konstruktion der Geometrie, z. B. wie die Halbierung einer Strecke.

Weniger gelungen als die übrigen Teile des Buches erscheint dem Berichterstatter der letzte Paragraph über die Zentralprojektion. Die Verfasser verlassen hier merkwürdigerweise ihre bewährte Methode, immer zuerst einfache *Körperformen* zur Darstellung zu bringen. Statt der ermüdenden Aufgaben über die Konstruktion des Bildes eines Punktes S. 245—250 sollten einfache Raumobjekte und Maßstäbe konstruiert werden. Dadurch wird das Auge für die der Perspektive eigentümliche Bild- und Tiefenwirkung besser ausgebildet. Der Fluchtpunktsatz ließe sich wohl in *allgemeiner* Fassung behandeln.

Einen Hauptvorzug des Buches bilden die sehr reichhaltigen Anwendungen nicht bloß in der Stereometrie, sondern auch auf andere Gebiete. Hierher gehören auch die zahlreichen, in dem Buche behandelten Kartenentwürfe. Wenn bei diesen auch für die Zwecke der Projektionslehre nicht allzuviel gewonnen wird, da rein geometrisch ableitbare Kartenentwürfe nur in seltenen Fällen benutzt werden, so dürfte die Erörterung dieser Dinge doch für den *geographischen* Unterricht von großem Werte sein. Der Berichterstatter aber würde sich freuen, wenn er einen kleinen Beitrag zur etwaigen weiteren Durcharbeitung dieses guten Buches geliefert hätte, das den Sinn und das Verständnis für korrekte Darstellung auch in weiteren Kreisen zu verbreiten geeignet ist.

München, Febr. 1904. KARL DOEHLEMANN.

Astronomischer Kalender für 1904. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. 8°, 141 S. Wien, K. Gerold Sohn. Preis kart. Mk. 2.40.

Dieser astronomische Kalender, der nun schon in seinen 66. Jahrgang tritt, eignet sich besonders zum Gebrauche für die zahlreichen astronomischen Amateure, denen es um eine knappe und einfache Orientierung am Sternhimmel zu tun ist. Überdies bietet der engere Ephemeridenabschnitt für jeden Tag soviel Angaben über den Sonnenlauf, daß eine Zeitbestimmung, wie sie der Liebhaber der Himmelskunde mit Hilfe eines kleinen Instrumentchens, z. B. eines Ebleschen Sextanten, eines Dipleidoskops, Passagenprismas oder Chronodeiks anzustellen pflegt, hinlänglich scharf berechnet werden kann.

Unter den „Beilagen", von denen die meisten (Verzeichnisse von Sternen, interessanten schon kleinen Refraktoren zugänglichen Objekten, Übersicht über das Sonnensystem, geographische Koordinaten) in jedem Jahrgange

wiederkehren, verdient besondere Beachtung der Artikel Nr. VIII: „Über den Helligkeitseindruck einiger Nebelflecke und Sternhaufen", in welchem Herr Holetschek einen Katalog der Helligkeiten, in Größenklassen ausgedrückt, von 213 Nebelflecken und Sternhaufen aufstellt. Die zugrunde liegenden Beobachtungen sind durch Schätzungen teils mit bloßem Auge, teils an einem sechszölligen Refraktor und einem $1^1/_2$zölligen Fernrohre gewonnen und zwar in der Weise, daß die Auffälligkeit des ins Auge gefaßten Nebelgebildes verglichen wurde mit einem seiner Lichtintensität nach bekannten Sterne. Es ist klar, daß man sich hierbei geringer Vergrößerungen und möglichst schwacher Fernrohre bedienen soll, damit der betrachtete Gegenstand nicht allzu flächenhaft ausgebreitet und dadurch seine Vergleichung mit einem Fixsterne erschwert und unsicher gemacht werde.

Beilage IX bringt wieder den gewohnten Jahresbericht über „Neue Planeten und Kometen" von Herrn Weiß. Wir erfahren, daß bis Dezember 1903 die Zuerteilung definitiver Nummern für die Asteroiden bis Nr. 512 vorangeschritten ist. Unter den Neuentdeckungen gehört zu den bemerkenswertesten der Planet 499, der bei sehr großer Bahnachse und Exzentrizität die größte bis jetzt im Asteroidengürtel bekannte Apheldistanz (4,84 Erdbahnradien) aufweist, derart, daß er sich dem mächtigsten Gliede unseres Sonnensystems, dem Planeten Jupiter auf 0,4 Erdbahnradien nähern kann. — Von den Kometen des Jahres 1903 nahm das meiste Interesse der von Borelly entdeckte Koment 1903 IV in Anspruch; er erreichte eine Maximalhelligkeit von der dritten Größe und zeigte eine in einem gewöhnlichen Opernglase leicht kenntliche beträchtliche Schweifentwicklung. Zu den im „Kalender" angeführten Helligkeitsbeobachtungen von Ebell und Holetschek sind inzwischen noch Reihen von Rosenberg und Wirtz (Astr. Nachr. Nr. 3924) hinzugekommen. Danach lassen sich die Resultate der photometrischen Messungen etwa so zusammenfassen: das Licht des Kometen war wesentlich reflektiertes Sonnenlicht; eine Schwächung der Helligkeit durch Einwirkung des Phasenwinkels ist angedeutet; die Helligkeit des eigentlichen Kernes unterlag keinen merklichen Schwankungen.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

W. Jordan. Handbuch der Vermessungskunde. Zweiter Band. Feld- und Landmessung. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten. Sechste erweiterte Auflage, bearbeitet von Dr. C. Reinhertz, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Stuttgart 1904. 863 u. [47] S.

Beim Erscheinen der 5. Auflage des II. Bandes seines Handbuches der Vermessungskunde im Jahre 1897 konnte Jordan auf ein 25jähriges Bestehen seines Buches zurückblicken, das sich aus kleinen Anfängen als Taschenbuch der praktischen Geometrie zu einem umfangreichen Werke entwickelt hatte. Mit der Übersicht über alle Zweige der Landmessung verband sich bei Jordan eine außergewöhnliche Gabe, die Darstellung lebendig zu gestalten. Er verstand es, gleichzeitig dem Studierenden ein leicht faßliches Lehrbuch, wie dem ausübenden Vermessungsbeamten ein Handbuch, das zu eigenen Untersuchungen anregt, zu bieten. Besonders gilt dies vom II. Bande, der in bezug auf die Durcharbeitung und in der

Verwertung der reichen Erfahrungen des Verfassers den andern beiden Bänden des Handbuchs wohl voran steht. Jetzt da bereits nach 6 Jahren Zwischenzeit eine neue Auflage desselben nötig geworden ist, konnte Jordan selbst nicht mehr bessernd und fördernd Hand anlegen, jedoch hat es der Bearbeiter des Bandes, Prof. Reinhertz, verstanden, im Sinne des Verstorbenen die Arbeit fortzuführen. Reinhertz hat mit Benutzung der neueren Literatur eine große Anzahl von Zusätzen hinzugefügt, verschiedentlich Umstellungen und auch einige Weglassungen vorgenommen, in manchen Fällen eine andere Einteilung getroffen, auch einige Male durch Änderung der Überschriften den Inhalt deutlicher hervorgehoben. Außerdem ist eine Reihe von alten Instrumentabbildungen durch neuere und bessere ersetzt worden. Um den ohnehin erheblichen Umfang des Buches nicht allzusehr zu vergrößern, wurde noch häufiger als bisher kleiner Druck benutzt.

Für einige Zusätze ließen sich spätere Arbeiten Jordans selbst verwenden, so z. B. die geometrische Betrachtung zur Erläuterung des Prytzschen Stangenplanimeters beim Kapitel Mechanische Hilfsmittel für Berechnungen, und die Behandlung des Falles, bei dem die Bildfläche nicht vertikal zum Hauptstrahl ist, im Kapitel Photogrammetrie.

Von den vielen Zusätzen des Herausgebers seien hier folgende hervorgehoben. In der Einleitung sind Erklärungen des Geoids sowie der Grundbegriffe der Horizontal- und Vertikalwinkelmessung hinzugekommen. Das I. Kapitel, das einen kurzen Abriß der einfachsten Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gibt, um den Band für den Anfänger zu einem selbständigen Ganzen zu machen, ist durch die Ausgleichung beobachteter Größen, zwischen denen eine Bedingungsgleichung besteht, vermehrt worden. Späterhin bei den Nivellementsausgleichungen sind auch mehrere Bedingungsgleichungen in Betracht gezogen, ebenso wie bei der Behandlung eines Höhennetzes die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen für mehrere Unbekannte erfolgt. Das II. Kapitel, die Arbeiten, Aufnahmen und Instrumente des Feldmessers besprechend, bringt außer der Prüfung von Meßbändern einen größern und interessanten Zusatz über die Fehler der Längenmessung mit einer besonderen Untersuchung über die Messung der Bonner Basis mit Meßstäben und Meßband. Eine Reihe kleiner Ergänzungen und Umstellungen haben das III. Kapitel, Berechnung und Teilung der Flächen, das V. Kapitel, welches die Grundlagen der geodätischen Instrumentenkunde, Libelle, Linse, Lupe, Fernrohr, behandelt, und das die Konstruktion des Theodoliten und seine Fehlertheorie enthaltende VI. Kapitel erfahren. Dem letztern sind auch mehrere neue Theodolitabbildungen und -Beschreibungen und einige kleinere Beispiele über das Anstellen von Winkelmessungen zugefügt worden. Im IV. Kapitel, das die bei den Berechnungen benutzten Hilfsmittel, Planimeter, Rechenschieber und Rechenmaschine beschreibt, ist jetzt zu dem Scheiben-Rollplanimeter von Coradi auch dessen Kugel-Rollplanimeter hinzugetreten, ferner wird eine Beschreibung und Abbildung des zweiteiligen bei den polygonometrischen Rechnungen für die französischen Katastermessungen benutzten Rechenschiebers von Lallemand sowie der neuen Multiplikationsrechenmaschine von Steiger und Egli gegeben. Der ausgedehnte Gebrauch, der neuerdings von Rechenmaschinen gemacht wird, ist Veranlassung geworden, die folgenden 3 Kapitel über Koordinatenberechnung, über Triangulierung der Dreiecke niederer Ordnung und über polygonale Zugberechnung

durch Beispiele für eine Kleinpunktsrechnung, für die wichtigen Aufgaben des Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens und für eine Polygonzugberechnung unter Anwendung der Rechenmaschine zu vervollständigen. Bemerkt sei, daß in den beiden letzten dieser Kapitel auch immer Rücksicht auf die Vorschriften der amtlichen preußischen Anweisung IX genommen ist.

In den Kapiteln X—XII, welche die nivellitische, trigonometrische und barometrische Höhenmessung betreffen, hat besonders das erste, entsprechend seiner Wichtigkeit für den Bauingenieur, eine Reihe von Ergänzungen erhalten. Es werden die Bestimmungen des Zentraldirektoriums des preußischen Vermessungswesens für den Nivellementsanschluß an den Landeshorizont mitgeteilt, ferner die bei der Landesaufnahme gebräuchliche Rechnung mit dekadischen Ergänzungen erläutert. Auch das neueste Verfahren derselben, das Einstellen eines Doppelfadens auf eine Strichskala, wird erwähnt, wie auch das Verfahren von Vogler mit seinem mit Schiebefernrohr versehenen Nivellierinstrument. Etwas mehr Raum als früher ist dem Verfahren des Büreaus für die Hauptnivellements des preußischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten gewidmet worden, doch wäre hier noch eine größere Ausführlichkeit, schon wegen der großen Ausdehnung dieser Nivellements, wohl am Platze gewesen. Es hätte auch eine Abbildung des dabei benutzten Seibt-Breithauptschen Nivellirinstruments wie der Seibtschen Reversionslatte, die auch bei den späteren Nivellements des geodätischen Instituts benutzt wurde, gegeben werden können. Bei der trigonometrischen Höhenbestimmung sei besonders auf die einfache Jordansche Refraktionstheorie hingewiesen. Von den zu Höhenbestimmungen dienenden Quecksilberbarometern werden verschiedene neue Formen beschrieben und abgebildet, auch einige neue Beispiele zur Bestimmung von Höhenunterschieden mittels des Federbarometers sind eingefügt worden. Im Anschluß an die Literaturangaben beim Siedethermometer hätte vielleicht auch kurz das Prinzip der Schwerkraftsbestimmungen auf dem Ozean erörtert werden können.

In einem der Zusätze zum Kapitel XIII, Distanzmesser, wird darauf aufmerksam gemacht, wie Winkel-Spiegel und -Prisma zum Distanzmesser verwendet werden können und dabei der Grundgedanke des Telemeters von Paschwitz erläutert. Das Kapitel Tachymetrie ist durch Beschreibung und Abbildung mehrerer Instrumente vermehrt worden, besonders erwähnt sei der selbstreduzierende nach Hammers Angaben von Fennel konstruierte Theodolit, dessen Theorie auch kurz gegeben wird. Kleinere Einschaltungen haben bei den folgenden Kapiteln, Meßtischaufnahmen und Photogrammetrie, stattgefunden; bei letzterem ist der Phototheodolith von Koppe hinzugekommen. Das XVII. Kapitel, Vorarbeiten für den Eisenbahnbau, erhielt verschiedene Zusätze, die sich auf das Abstecken von Kreisbogen beziehen. Bei den Ausführungen über Tunnelabsteckungen ist bereits des Simplon-Tunnels und der Tunnel der Albulabahn gedacht worden. Die Übersicht über die Kataster- und Stadtvermessungen in Deutschland, die das Schlußkapitel bringt, ist bis auf die neueste Zeit fortgeführt worden.

Ungeändert blieben die dem Bande beigegebenen zahlreichen Hilfstafeln für trigonometrische und barometrische Höhenmessungen, Tachymetrie und Kreisbogenabsteckungen. Nur die Tabelle für die Mißweisung der Magnetnadel ist durch eine neuere für das Jahr 1905 nach Messerschmitt ersetzt worden.

Hervorgehoben sei noch, daß der Herausgeber große Sorgfalt darauf verwendet hat, die den einzelnen Kapiteln zugefügten Literaturangaben zu vervollständigen und bis auf die jüngste Zeit zu ergänzen.

Potsdam. L. Krüger.

Neue Bücher.

Analysis.

1. Nernst, W., u. Schönflies, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung m. besond. Berücksicht. der Chemie. 4. Aufl. München, Oldenbourg. M. 11; geb. M. 12.50.

Astronomie, Geodäsie, Nautik.

2. Hohenner, Heinrich, Graphisch-mechanische Ausgleichung trigonometrisch eingeschalteter Punkte. Mit 16 Fig., 1 Zahlentabelle u. 2 graphischen Tafeln. Stuttgart, Wittwer. M. 2.80.
3. Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. I. Bd. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 5. Aufl., hrsg. v. C. Reinhertz. Stuttgart, Metzler. M. 13.60.

S. auch Nr. 37.

Biologie und Statistik.

4. Davenport, C. B., Statistical methods, with special reference to biological variation. 2nd, revised edition. New York, Wiley & Sons (London, Chapman & Hall). Morocco $ 1.50.

Darstellende Geometrie, Photogrammetrie.

5. Berniolle, P., Cours de géométrie descriptive. Préparation à l'École militaire de Saint-Cyr. Avec 204 fig. Paris, Paulin. Cart Frs. 4.
6. Lafarga, P., Tratado de sombras y perspectiva, con arreglo à los programas de las escuelas de ingenieros civiles, academias militares y escuelas superiores de industrias. Alicante. Frs. 15.
7. Lambot, Oscar, Traité de perspective linéaire. Avec un atlas de 31 pl. Bruxelles, Castaigne. Frs. 4.
8. Opderbecke, Adf., Angewandte darstellende Geometrie f. Hochbau- u. Steinmetz-Techniker, umfassend geometrische Projektionen, die Bestimmung der Schnitte v. Körpern u. Ebenen u. unter sich, das Austragen von Treppenkrümmlingen u. der Anfängersteine bei Rippengewölben, die Schattenkonstruktionen u. die Zentralperspektive. Für den Schulgebrauch u. die Baupraxis. 32 Taf. m. erläut. Text. Leipzig, Voigt. M. 6.75.
9. Schell, Ant., Die stereophotogrammetrische Bestimmung der Lage e. Punktes im Raume. M. 3 Taf. Wien, Seidel & Sohn. M. 1.60.

Geschichte, Biographien.

10. Poggendorff, I. C., Handwörterbuch. 4. Bd. v. Ad. v. Oettingen. 18. u. 19. Lfg. Leipzig, Barth. Je M. 3.

Mechanik.

11. Andrews, E. S., On the the theory of stresses in crane and coupling hooks, with experimental comparision with existing theory. With 13 diagrams. London, Dulau. 3 s.

12. Bannings, Rud., Zur Theorie des Segelns. Progr. Hamburg, Herold. M. 2.50.
13. Fischer, Otto, Der Gang des Menschen. VI. Über den Einfluß der Schwere u. der Muskeln auf die Schwingungsbewegung des Beins. (Abh. Sächs. Ges. Wiss. Bd. 28 Nr. 7.) Mit 3 Doppeltaf. u. 7 Textfig. Leipzig, Teubner. M. 4.
14. Haesen, Edm., Cours de balistique intérieure. Bruxelles, Castaigne. Frs. 6.
15. Heinzerling, Frdr., Dreieck u. Kraftübertragung in Baukonstruktionslehre u. Bauwesen. Grundzüge einer Dynamo-Statik der Baugefüge. Mit 156 Textfig. u. 3 Taf. Leipzig, Scholtze. M. 5.50; geb. M. 6.50
16. Morel, Marie-Auguste, La Balistique graphique et son application dans le calcul des tables de tir. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.
17. Perry, John, Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der „British Association" in Leeds. Übersetzt von August Walzel. Mit 58 Abb. im Text u. einem Titelbild. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 2.80.
18. Stephan, P., Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere machinentechnische Fachschulen mit Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. I. Mechanik starrer Körper. Mit 255 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 7.
19. Tratado de mecánica. Principios fundamentales Vol. I. (Enciclopedia española.) Barcelona, Roviro y Chiques. Fr. 1.
20. Zucchetti, F., Nozioni teoriche ed applicazioni pratiche di statica grafica. 2ª ediz. riveduta ed ampliata da G. Allava. Torino. Con 39 tavole. L. 10.

Physik, Chemie.

21. Bakhuis Roozeboom, H. W., Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre. 2. Heft, Systeme aus zwei Komponenten, I. Tl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12.50.
22. Beckmann, Herm., Abhängigkeit der Strahlungsintensität des „schwarzen Körpers" von der Temperatur, untersucht f. einen bestimmten Strahlenkomplex. Diss. Tübingen, Fues. M. 1.40.
23. Chree, C., An inquiry into the nature of the relationship between sun-spot frequency and terrestrial magnetism. London, Dulau. 1 s. 6 d.
24. Detels, Frdr., Über stigmatische Brechung dünner Strahlenbündel im oblongen Rotationsellipsoid. Progr. Hamburg, Herold. M. 2.50.
25. Dorr, R., Mikroskopische Faltungsformen. Ein physikalisches Experiment. Mif 4 Taf. u. 31 Textfig. Danzig, Kafemann. M. 5.
26. Duddell, W., On the resistance of electromotive forces of the electric arc. London, Dulau. 4 s.
27. Encyklopädie d. math. Wiss. V. Bd. Physik. 2. Tl. 1. Heft. Leipzig, Teubner. M. 8.
28. Fortschritte, die, der Physik im J. 1903. Dargestellt v. der deutschen physik. Gesellsch. 59. Jahrg. 1. Abtlg. Allgemeine Physik, Akustik, physikalische Chemie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 26.
29. Frick, J., Physikalische Technik, oder Anleitung zu Experimentalvorträgen sowie zur Selbstherstellung einfacher Demonstrationsapparate. 7., vollkommen umgearb. u. stark verm. Aufl. v. Otto Lehmann. I. Bd. 1. Abteilg. Mit 2003 Abb. u. einem Bildnis des Verf. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 16; geb. in Halbfrz. M. 18.
30. Kepler, Johannes, Dioptrik, oder Schilderung der Folgen, die sich aus der unlängst gemachten Erfindung der Fernrohre für das Sehen u. die sichtbaren Gegenstände ergeben (1611). Übersetzt u. hrsg. v. Ferdinand Plehn. (Ostwalds Klassiker Nr. 144.) Leipzig, Engelmann. geb. M. 2.
31. Kübler, J., Woher kommen die Weltgesetze? Mit 3 Fig. Leipzig, Teubner. M. 1.

32. Lorenz, Hans, Lehrbuch der technischen Physik. 2. Bd. Technische Wärmelehre. München Oldenburg. M. 13; geb. M. 14.

33. Mie, Gustav, Moleküle, Atome, Weltäther. (Aus Natur u. Geisteswelt, Nr. 58.) Mit 27 Fig. Leipzig, Teubner. M. 1; geb. in Leinw. M. 1.25.

34. Myrian, A., Physique astronomique. Tulle, Crauffon. Frs. 3.50.

35. Preston, Thomas, The theory of heat. 2nd ed., revised by J. Rogerson Cotter. London, Macmillan. 18 s.

36. Tildan, W. A., The specific heats of metals and the relation of specific heat to atomic weight. Part 3. London, Dulau. 1 s.

Tafeln, Rechenapparate.

37. Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. J. 1907 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtungen. Hrsg. vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. kart. M. 1.50.

38. Kinkel, Md., Profilrechenstab. Große Ausg. (1 Bl.) 24 × 34 cm. Benrath bei Düsseldorf, Selbstverlag. M. 2.50.
—, dasselbe. Kleine Ausg. (1 Bl.) 15 × 25 cm. Ebd. M. 1.50.

39. Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen. 4. Aufl. Gotha, Thienemann. brosch. M. —.80.

S. auch Nr. 2.

Verschiedenes.

40. Encyklopädie, die, der mathem. Wissenschaften m. Einschluß ihrer Anwendungen. I. Bd. Arithmetik u. Algebra. 8. (Schluß-)Heft. Leipzig, Teubner. M. 3.60.

41. —, dasselbe. II. Bd. Analysis. I. Tl. 5. Heft. Ebd. M. 6.

42. Matriculation Mathematics Papers. Being the examination papers set at London University from January 1891, to June 1904. (University Tutorial Series.) London, Clive. 1 s 6 d.

43. d'Ocagne, Maurice, Les instruments de précision en France. Avec 22 fig. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 2.

44. Poincaré, Henri, Wissenschaft u. Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. u. L. Lindemann. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 4.80.

45. Sylvester, James Joseph, Collected Mathematical Papers. Vol. I (1837—1853). Cambridge, University Press. 18 s.

46. Woolwich Mathematical Papers. For admission into the Royal Military Academy for the years 1894—1903. Edit. by J. E. Brooksmith. London, Macmillan. 6 s.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Bakhuis Roozeboom, H. W.. Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre, 2. Heft, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 21.

Bischoff, C. A., Materialien der Stereochemie, in Form von Jahresberichten. I. Bd., 1894—1898, m. system. Inhaltsverzeichnis für 1894—1902. II. Bd., 1899—1902, m. alphabet. Sachregister für 1894—1902. Braunschweig, Vieweg & Sohn. Zusammen M. 90.

Contributions from the Jefferson Physical Laboratory of Harvard University for the year 1903. Vol. I. Cambridge, Mass., U. S. A.

Davenport, C. B., Statistical methods. s. N. B. 4.

Dorr, R., Mikroskopische Faltungsformen, s. N. B. 25.

Erményi, Nachträgliches über Petzval. (Photogr. Rundschau, 18. Jahrg. Heft 18, 15. Sept. 1904). Halle a. S., Knapp.

Fischer, O.. Der Gang des Menschen, VI, s. N. B. 13.

Frick, I., Physikalische Technik. I 1, s. N. B. 29.

Grassmann, Hermann, Gesammelte mathematische u. physikalische Werke. II. Bd. 1. Tl. Die Abhandlungen zur Geometrie u. Analysis. Leipzig, Teubner. M. 16.

Hohenner, H., Graphisch-mechanische Ausgleichung, s. N. B. 2.

Humbert, G., Cours d'Analyse, professé à l'École Polytechnique. II. Compléments du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 16.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde, I. 5. Aufl. s. N. B. 3.

Kepler, I., Dioptrik, s. N. B. 30.

Kübler, I., Woher kommen die Weltgesetze?, s. N. B. 31.

Lejeune-Dirichlet, G., Vorlesungeu über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, hrsg. v. G. Arendt. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12—; geb. in Leinw. M. 13.

Marti, C. Die Wetterkräfte der strahlenden Planetenatmosphären. Nidau, Buchdruckerei E. Weber.

Nagl, Alfred, Der griechische Abakus. Eine Entgegnung. Sonderabdruck aus der Wiener Numismatischen Zeitschrift, 35. Bd., 1903.

Perry, J., Drehkreisel, s. N. B. 17.

Poincaré, H., Wissenschaft u. Hypothese, s. N. B. 44.

Riefler, S., Projekt einer Uhrenanlage für die Kgl. Belgische Sternwarte in Uccle. München, Ackermann.

Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. 39.

Stephan, P., Technische Mechanik, I, s. N. B. 18.

Schumann, E., Lehrbuch der ebenen Geometrie f. die ersten drei Jahre geometrischen Unterrichts an höheren Schulen. Mit 87 Textfig. Stuttgart u. Berlin, Grub., geb. in Leinw. M. 2.20.

Sturm, C., Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen (1835). Aus dem Französischen übersetzt u. hrsg. v. Alfred Loewy. (Ostwalds Klassiker Nr. 143.) Leipzig, Engelmann. geb. M. 1.20.

Sylvester, J. J., Mathematical papers, I., s. N. B. 45.

Vivanti, G., Leçons élémentaires sur la théorie des Groupes de Transformations, professées à l'université de Messine, traduites par A. Boulanger. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 8.

Wellisch, S., Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme. (Sonderabdruck aus: Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen, 2. Jahrg.) Wien, Della Torre.

Zahm, A. F., Atmospheric friction with special reference to Aeronautics. (Philos. Soc. Washington Bull., vol. 14). Washington.

Abhandlungsregister 1903.

Von Ernst Wölffing.

Abkürzungen.

A.A.E.I. Atti dell' Associazione elettrica italiana 7.
A.A.N.Y. Annals of the Academy of Science, New York 15.
A.A.P.M. Atti dell' Accademia Peloritana, Messina 17.
A.A.S. Aus dem Archiv der deutschen Seewarte, Hamburg 26.
A.A.T. Atti della R. Accademia di Torino 39.
A.A.U. Atti dell' Accademia, Udine 3. serie 10.
A.A.W. Anzeiger der K. K. Akademie, Wien 1903—04.
A.C.P. Annales de Chimie et de Physique, Paris 7. séries 30; 8. séries 1.
A.D.M. Annali di Matematica pura ed applicata, Milano 3. serie 9—10.
A.D.S. Aus der Schule — für die Schule, Leipzig 18.
A.E. American Electrician 17.
A.E.N. Annales de l'École normale supérieure, Paris 3. séries 19—21.
A.F. Association française pour l'Avancement des Sciences, Paris 1903.
A.F.G.P. Archiv für die gesamte Physiologie, Bonn 5.
A.G.C. Atti dell' Accademia Gioënia di Scienze Naturali, Catania 4. serie 15.
A.G.P. Annales de géographie, Paris 13.
A.Gr. Archiv der Math. u. Physik. 3. Reihe 6—7.
A.H. Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 31.
A.I.V. Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia 62.
A.J.C. Astrophysical Journal, Chicago 18—19.
A.J.M. American Journal of Mathematics, Baltimore 26.
A.J.S. American Journal of Science, New Haven 4. series 17.
A.M.A.P. Atti e Memorie delle R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Padova 16.
A.M.T. Archives du Musée Teyler, Haarlem 2. séries 8.
A.N. Archives néerlandaises, Haarlem 2. séries 8—9.
A.N.K. Astronomische Nachrichten, Kiel 164.
A.ofM. Annals of Mathematics, Cambridge Mass. 2. series 5.
A.P.B. Bulletin der K. K. Akademie der Wiss. Petersburg 5. Serie 17—19.
A.P.L. Annalen der Physik, Leipzig 4. Reihe 12—14.
A.P.M. Mémoires der K. K. Akademie der Wiss., Petersburg 8. Série 12.
A.P.T.R. Wissensch. Abhandlungen der Physikal. Techn. Reichsanstalt Berlin 4.
A.S.A. Anales de la Sociedad Cientifica Argentina 56.
A.S.C. K. Videnskabs-Selskabets Forhandlinger, Christiania 1902.
A.S.G. Archives des Sciences physiques et naturelles, Genève 4. séries 16—18.
A.S.M.F. Annales de la Société météorologique de France, Paris 51—52.
A.S.P. Annali della Scuola Normale Superiore, Pisa 9.
A.S.U.J. Annales Scientifiques de l'Université, Jassy 2.
A.U.J. Acta et Commentationes Imp. Universitatis Jurievensis, Jurjew 1903 bis 1904.
A.U.L. Universitets Årskrift, Lund 38.
B.A. Bulletin astronomique, Paris 20—21.
B.A.B. Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux Arts, Bruxelles 1903—04.
B.A.Co. Oversigt der K. Vedenskabs Selskab, Kjöbenhavn 1903.

B.A.I.E. Bulletin de l'Association des Ingénieurs électriciens sortis de l'institut électrotechnique Montefiore, Liège 1901.
B.D.M. Bolletino di Matematica, Bologna 3.
B.F. Boltzmann-Festschrift.
B.G.L. Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissensch. Leipzig 55.
B.I.C. Bulletin international, Krakau 1903.
B.I.T. Boletin del Inst. Cientifico y Literario „Porfirio Diaz", Tocula 6.
B.M. Bibliotheca mathematica, Leipzig 3. Reihe 4.
B.M.B. Der Baumeister, Berlin 1.
B.M.E. Bulletin des Sciences math. et phys. élémentaires, Paris 9.
B.M.N. Mathematische und Naturwissensch. Berichte aus Ungarn, Budapest 19.
B.S.B.A. Bulletin de la Société Belge d'Astronomie, Bruxelles 8.
B.S.C.P. Bulletin de la Société Chimique, Paris 3. séries 31.
B.S.I.E. Bulletin de la Société Internationale des Electriciens, Paris 2. séries 3.
B.S.M.F. Bulletin de la Société Minéralogique de France, Paris 25.
B.S.N.N. Bolletino della Società di Scienze Naturali, Napoli 16—17.
B.S.V. Bulletin de la Société Vaudoise, Lausanne 4. séries 39.
B.U.K. Nachrichten der K. K. Universität, Kiev 1903—04.
C.A.A. Verslagen der zittingen der K. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam 12.
C.A.C. Berichte der K. K. Akademie der Wissenschaften, Krakau 43.
C.B. Chemische Berichte 36.
C.C.S. Colorado College Studies, Colorado Springs 1.
C.C.S.G.P. Communicaçoes de comisão do serviço geologico de Portugal, Lisboa 5.
C.M.G. Zentralblatt für Mineralogie und Geologie, Stuttgart 1903.
C.N. The Chemical News, New York 88.
C.P.L. Communications from the Physical Laboratory at the University, Leiden 90; Suppl. 6—7.
C.R. Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris 137—138.
C.T.L. Czasopismo techniczne, Lemberg 21.
D.A.W. Denkschriften der K. K. Akademie Wien 72.
D.M. Der Mechaniker, Berlin 11—12.
D.U.Z. Deutsche Uhrmacherzeitung, Berlin 27.
D.V.M. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 12 bis 13.
D.V.N. Verhandlungen der Versammlungen Deutscher Naturforscher und Ärzte, Leipzig 75.
D.W.B. Das Weltall, Berlin 3—4.
E.C.I. Electrochemical Industry 1.
E.C.M. The Electrochemist and Metallurgist 3.
E.K.B. Eis- und Kälteindustrie, Berlin 2—3.
E.M. L'enseignement Mathématique, Paris 5—6.
E.P. Električestvo, Petersburg 1903.
E.R. Electrical Review, London 43.
E.T.A. Elektrotechnischer Anzeiger 20.
E.W. The Electrical World, New York 41.
F.T. Mémoires de l'Académie des Sciences, Toulouse 10. séries 3.
G.B. Giornale di Matematiche, Napoli 41.
G.C.I. Gazzetta chimica Italiana 33.
G.J.G. Geographisches Jahrbuch, Gotha 25.
G.L. Gäa, Leipzig 39.
G.M.T. Gasmotorentechnik, Berlin 2—3.
H.B. Helios, Berlin 19.
H.V.C. Handlinger van Vlaamsch Natuur- en Geneeskund. Congres 6.
I.A.M. Illustrierte aëronautische Mitteilungen, Straßburg 7.
J.A.C.S. Journal of the American Chemical Society, Easton 25.
J.C.P. Journal de Chimie et de Physique, Paris 1—2.
J.E.P. Journal de l'École Polytechnique, Paris 2. séries 8.
J.E.S.T. Journal of the Electrical Society, Tokyo 1901.
J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 151; 155—156.
J.H.W.A. Jahrbuch der Hamburgischen Wissenschaftlichen Anstalten, Hamburg 20.
J.M. Journal de Math. pures et appliquées, Paris 5. séries 10.
J.P. Journal de Physique théorique et appliquée, Paris 4. séries 2—3.
J.P.C. The Journal of Physical Chemistry, Ithaca 7—8.
J.R.P.C.G. Journal der Russ. Physikal.-Chem. Gesellschaft, Petersburg 35.
J.S.B.G. Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft Berlin 4.
J.U.T. Journal of the College of Science, Imperial University, Tokyo 19.
J.V.N.S. Jahreshefte des Vereins für vaterländ. Naturkunde, Stuttgart 59.
J.V.O. Jahreshefte des naturwiss. Vereins Osnabrück 15.

J.V.U. Jahreshefte des Vereins für Math. u. Naturwissenschaften, Ulm 11.
K.B. Kraft, Berlin 19.
K.L. Kosmos, Lemberg 8.
K.L.D. Kraft und Licht, Düsseldorf 7.
K.T. Der Kulturtechniker, Breslau 5.
L.E. L'Elettricistà, Roma 12.
L.E.M. L'Elettricistà, Milano 20.
L.G. La Géographie, Paris 8.
L.N. La Nature, Paris 31.
M. Mathesis, Gand 3. séries 4.
M.A. Mathematische Annalen, Leipzig 58.
M.A.Ly. Mémoires de l'Académie des Sciences, Lyon 3. séries 7.
M.A.M. Memorie delle R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Modena 3. serie 4.
M.A.P. Mémoires de l'Academie des Sciences, Paris 46.
M.A.T. Memorie della R. Accademia delle Scienze, Torino 2. serie 53.
M.A.T.P. Mémoires de l'Ac. impér. tchèque, Prag 1902.
M.B. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Mitteilungen, Stuttgart 2. Serie 6.
M.C.K. Memoirs of College of Science and Engineering, Imperial University, Kyoto 1.
M.E. Mechanical Engineer 10.
M.E.P. Messager électrotechnique, Petersburg 1901.
M.F.I. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Berlin 11; 13.
M.F.L. Mitteilung Finsens medizinischem „Lysinstitut" Kjöbenhavn 2.
M.G. Metallographist 6
M.G.S. Mathematical Gazette, Stroud 2.
M.G.W.S. Monatshefte der Gesellsch. der Wissenschaften, Straßburg 37.
M.H. Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien 15.
M.I.B. Memorie della R. Acc. di Scienze dell' Istituto di Bologna 5. serie 10.
M.M. The Messenger of Mathematics, London 2. series 23.
M.M.F. The American Math. Monthly, Springfield 10—11.
M.N.A.S. Monthly Notices of the Astronomical Society, London 63—64.
Mon. Monist, New York 14.
M.P.D.B. Mitteilungen aus der Praxis des Dampfkessel- und Dampfmaschinenbetriebs. Berlin 24—25.
M.P.G.Z. Mitteilungen der physikalischen Gesellschaft, Zürich 5—6.
M.P.L. Mathematikai és physikai lapok, Budapest 11—13.
M.P.M. Natur-en Geneeskundig Congres, Amsterdam 9.
M.P.O. Messager de la physique expérimentale et des mathématiques élémentaires, Odessa 30.
M.R.B. Marine-Rundschau, Berlin 13—14.
M.S.C. Videnskabs-Selskabets-Skrifter, Christiania 1902.
M.S.It. Memorie della Società Italiana (detta dei XL) Roma 3. serie 12.
M.S.P.A.O. Miscell. Scientific papers of the Alleghany Observatory, Alleghany 2. series 13; 15—16.
M.S.S.I. Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani, Catania 33.
M.T.E. Mathematikai és természettudományi Értesitö, Budapest 19; 21.
M.U.O. Denkschriften der K. K. Neuruss. Universität Odessa 89; 95.
M.V.A.P. Mitteilungen des Vereins der Freunde der Astronomie und kosmischen Physik, Berlin 13.
M.W.R. Monthly Weather Review, Washington 31—32.
M.Z. Meteorologische Zeitschrift Wien 19—21.
N. Nature, London 68—69.
N.A. Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris 4. séries 3—4.
N.A.H. Nova Acta der K. K. Leopoldo-Carolinischen Akademie, Halle 81.
N.A.W. Nieuw Archief voor Wiskunde Amsterdam 2. Reeks 6.
N.C.P. Il Nuovo Cimento, Pisa 5. serie 5—7.
N.F.W. Der Naturfreund, Witten 1—2.
N.G.G. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissensch. Göttingen 1903—04.
N.L.M. Memorie dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Roma 17.
N.O. Natur und Offenbarung, Münster 48—49.
N.R. Naturwissenschaftliche Rundschau, Braunschweig 18—19.
N.T.M. Nyt Tidskrift for Mathematik, Kjöbenhavn 14—15.
P. Prometheus, Berlin 14—15.
P.A.B. Veröffentlichungen (Glas) der K. Serb. Akademie, Belgrad 67.
P.A.Bo. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Boston 39.
P.C.F. Proceedings of the California Academy of Science, San Francisco 3. series 1.
P.C.P.S. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge 12.
P.I.F.P. Publicazioni dell' Istituto di Fisica dell' Università, Pisa 6.
P.L.M.S. Proceedings of the London Math. Society, London 2. series 1.
P.M. Philosophical Magazine, London 6. series 6—7.
P.M.B. Photographische Mitteilungen, Berlin 38.

P.M.R. Periodico di Matematica, Livorno 3. serie 1.
Pol.M. Il Politecnico, Milano 1901; 1903.
P.P. Przeglad polski 147.
P.P.S. Proceedings of the American Philosophical Society, Philadelphia 42.
P.P.S.G. Proceedings of the Philosophical Society, Glasgow 34.
P.P.S.L. Proceedings of the Physikal Society, London 18—19.
P.R. The Physical Review, New York 17—18.
P.R.I.A. Procedings of the Royal Irish Academy, Dublin 3. series 8.
P.R.S.L. Proceedings of the Royal Society, London 72.
P.S.D. Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society, Dublin 2. series 10.
P.T.R.S.C. Proceedings and Transactions of the Royal Society of Canada, Montreal 2. series 8.
P.T.W. Przeglad technicki, Warszawa 41.
P.Z. Physikalische Zeitschrift, Göttingen 4—5.
Q.J. Quarterly Journal of Mathematics London 34—35.
Q.J.M.S. Quarterly Journal of the Meteorological Society, London 59.
R.A.G. Revista di artigleria e genio, Roma 1903.
R.A.R.L. Rendiconti della R. Acccad. dei Lincei, Roma 5 serie 12—13.
R.C.L. Revista de Ciencias, Lima 7.
R.C.M.P. Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo 18.
R.F.M. Rivista di fisica, matematica e scienze naturali, Pavia 4—5.
R.G.O. Revue générale des Sciences pures et appliquées, Paris 14.
R.I.L. Rendiconti del R. Ictituto Lombardo delle Scienze e Lettere, Milano 2. serie 36.
R.M.I. Rivista musicale italiana, Roma 10.
R.M.M. Revue de métaphysique et de morale, Paris 11.
R.M.S. Revue de mathématiques spéciales, Paris 13.
R.P.W. Revue de physique, Warschau 2.
R.S. Revue Scientifique, Paris 4. séries 18; 21; 5. séries 1.
R.S.A.A. Reports of the South African Association for the Advancement of Science, Capetown 1.
R.S.B. Revue Scientifique du Bourbonnais, Moulins 14.
R.S.M. Sammelschrift der Sewtschenkogesellschaft, Lemberg 9.
R.T.E.B. Rivista tecnica emiliana, Bologna 1901.
R.T.I. Rivista tecnica italiana, Roma 2.
R.T.M. Revista trimestral de matematica Valencia 3—4.
R.T.T. Rivista tecnica Torino 1.
S. Science, New York 2. series 18—19.
S.A.B. Sitzungsberichte der K. Akademie der Wiss. Berlin 1903—04.
S.A.M. Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der K. Ak. der Wiss., München 1903—04.
S.A.W. Sitzungsberichte der Math. Naturw. Klasse der K. K. Akademie der Wiss. Wien 112—113.
S.G.B. Sitzungsberichte der K. Böhm. Gesellsch. der Wiss. Prag 1903.
S.G.M. Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften, Marburg 1903.
S.I.D. Sitzungsberichte der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis, Dresden 1903.
S.L. Sirius, Leipzig 35—36.
S.L.P. Sitzungsber. des deutschen naturwiss. medizin. Vereins für Böhmen „Lotos", Prag 2. Reihe 23.
S.M. Bulletin de la Société Math. de France, Paris 32.
S.M.B. Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, Berlin 3.
S.M.Ka. Bulletin der Physikomathematischen Gesellschaft, Kasan 2. Serie 13.
S.M.Kh. Mitteilungen der math. Gesellschaft, Charkow 2. Serie 28.
S.N.G.L. Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft, Leipzig 28 bis 29.
S.N.M. Bulletin de la Société impériale des naturalistes, Moskau 1902.
S.P.M. Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society, Manchester 48.
S.U.E. Stahl und Eisen 23.
S.V.N.W. Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwiss. Kenntnisse, Wien 43.
T.A.E.S. Transactions of the American Electrochemical Society 4.
T.M.L. Travaux et Mémoires des facultés des Sciences, Lille (2) series 1.
T.M.W. Terrestrial Magnetism, Washington 8.
T.Q. Technological Quarterly, Boston 14.
T.R.I.A. Transactions of the R. Irish Academy, Dublin 32.
T.R.S.L. Philosophical Transactions of the Royal Society, London 201.
T.S.A. Rad Jugoslavenske Akademie, Agram 154.
T.S.D. Scientific Transactions of the Royal Society Dublin 2. series 8.
T.S.M.Am. Transactions of the American Mathematical Society, New York 4.

T.S.U.R. Travaux Scientifiques de l'Université, Rennes 2.
U.I. Union des ingénieurs, Louvain 1901.
U.M.N. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft, Berlin 10.
V.G.H. Verhandlungen des naturwissenschaftl.-medizinischen Vereins 2. Reihe 7.
V.N.V.B. Verhandlungen des naturhistorischen Vereins, Bonn 60.
V.P.G. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Berlin 5 bis 6.
V.P.G.B. Verhandlungen der polytechnischen Gesellschaft, Berlin 63.
V.P.L. Vierteljahrschrift für Philosophie Leipzig 26.
V.V.F.U.W. Vierteljahrschrift des Vereins zur Förderung des Unterrichts Wien 8—9.
W.M. Wiadomosci matematyczne, Warschau 7.
Z.A.C. Zeitschr. für anorganische Chemie, Hamburg 36.
Z.F.A.C. Zeitschrift für angewandte Chemie 16.
Z.F.M. Zentralblatt für Mineralogie 1903.
Z.F.N. Zeitschr. f. Naturwissenschaften, Stuttgart 76.
Z.G.U. Zeitschrift für gewerblichen Unterricht, Leipzig 15—17.
Z.G.V. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Berlin 4.
Z.H. Zeitschr. für mathemat. und naturwiss. Unterricht, Leipzig 34—35.
Z.H.H. Zeitschrift für Heizungstechnik. Halle 7.
Z.K.I. Zeitschrift für Kohlensäureindustrie, Berlin 9.
Z.K.M. Zeitschr. f. Kristallographie und Mineralogie, Leipzig 38—39.
Z.P. Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Berlin 16—17.
Z.P.K. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Leipzig 118; 120.
Z.P.P. Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Leipzig 33.
Z.R.W.L. Zeitschr. des Rhein.-Westphäl. Landmesservereins, Kassel 23.
Z.S. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 49—50.
Z.W.M. Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie, Leipzig 19.
Z.W.P. Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1.

Angewandte Mathematik im allgemeinen.

1. *C. A. Waldo.* The relation of mathematics to engineering. N. 69. 500.

Philosophie der angewandten Mathematik.

2. **E. Mach.* Space and geometry from the point of view of physical inquiry. Mon. 14. 1.

Siehe auch 331; 1108.

Pädagogik der angewandten Mathematik.

3. *P. Stäckel.* Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. D.V.M. 13. 313.
4. *H. Lorenz.* Der Unterricht in angewandter Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. D.V.M. 12. 565.

Siehe auch 69.

Logikkalkul.

5. *K. Mac Coll.* La logique symbolique. E.M. 5. 415.
6. *P. Poretzky.* Théorie des non-égalités logiques. S.M.Ka. (2) 13. 80.
7. *C. Burali-Forti.* Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri. A.A.T. 39. 256.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

8. **J. Lilienfeld.* Versuch einer strengen Fassung des Begriffes der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Z.P.K. 120. 58.
9. *H. Brömse* u. *E. Grimsehl.* Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre. Z.P.K. 118. 145. — *Marbe.* V.P.L. 26. 339.
10. *P. Mansion.* Sur la portée objective du calcul des probabilités. M. (3) 4 Suppl. B.A.B. 1903. 1235.
11. **W. Voß.* Falsche Wahrscheinkeitsrechnung und Zufall. G.L. 39. 65.
12. **S. H. Burbury.* On certain theorems in probability. B.F. 542.
13. *P. Mansion.* Sur la loi des grands nombres de Poisson. M. (3) 4 Suppl.
14. *C. Cailler.* A propos d'un article sur le calcul des probabilités. E.M. 5. 299.

Siehe auch 26; 112.

Fehlerrechnung.

15. **A. Sommerfeld.* Eine besonders anschauliche Ableitung des Gaußschen Fehlergesetzes. B.F. 848.

16. **Zachariae*. Sur l'erreur moyenne de la mesure relative de pendules avec l'appareil Schneider Nr. 14. B.A.Co. 1903 Nr. 3. 349.

17. **S. S. Hough*. On the determination of the division errors of a graduated circle M.N.A.S. 64. 461.

Siehe auch 103; 601.

Methode der kleinsten Quadrate.

18. **R. d'Emilio*. Illustrazioni geometriche e meccaniche del principio dei minimi quadrati. A.I.V. 62. 363.

Kaufmännische Arithmetik.

19. *S. Johnson*. Middelforfaldstid. N.T.M. 14 A. 106.

Rentenrechnung.

20. *J. F. Steffensen* og *N. P. Bertelsen*. Forelöbig meddelse om bestemmelse af rentefoden i en annuitet. N.T.M. 14. B. 82.

Statistik.

21. *Lexis*. Über die Messung der menschlichen Fruchtbarkeit. Z.G.V. 4. 155.

Biometrie.

22. *F. Ludwig*. Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. Z.S. 50. 163.

Siehe auch 1195.

Sterblichkeit.

23. *Czuber*. Zum Problem der Sterblichkeitsmessung. Z.G.V. 4. 160.

Versicherungsmathematik.

24. *Eggenberger*. Über die Beziehungen zwischen den Fundamentalgrößen in der Invalidenversicherung. Z.G.V. 4. 129. — *Meyer* 131.

25. *Ziegel*. Zur Bewertung der reduzierten Police in der Lebensversicherung. Z.G.V. 4. 241.

Spiel.

26. **F. d'Arçais*. Un problema di calcolo di probabilità. A.M.A.P. 16. 219.

Numerisches Rechnen.

27. *T. Meyer*. Über die zyklometrischen Formeln zur Berechnung von π und über eine abgekürzte Bezeichnung der zyklometrischen Funktionen. Z.H. 35. 1.

28. *H. Schubert*. Elementare Berechnung der Logarithmen. Z.H. 34. 497; 551.

29. **E. Kohlschütter*. 4- oder 5 stellige Logarithmen für nautische Tafeln. M.R.B. 13. 1330; 14. 347. — *Bolte* 14. 219. — *R. Kühne* 350.

Analytische Näherungsmethoden.

30. *S. Pincherle*. Sur l'approximation des fonctions par les irrationnelles quadratiques. C.R. 137. 734.

31. *—. Note sur le calcul du nombre π. R.M.S. 13. 193.

Numerische Gleichungen.

32. *Rabut*. Sur la résolution pratique des équations. C.R. 137. 641.

33. *F. Giudice*. Separazione delle radici reali d'equazione a coefficienti numerici reali. G.B. 41. 190.

34. *E. Eckhardt*. Ableitung der Realitätsbedingungen für die Wurzeln der biquadratischen Gleichungen. A.Gr. (3) 7. 87.

35. **G. H. Hardy*. The asymptotic solution of certain transscendental equations. Q.J. 35. 261.

36. *T. Levi-Civitá*. Sopra l'equazione di Kepler. R.A.L.R. (5) 13. A. 260.

Siehe auch 44.

Interpolation.

37. **G. Zemplén*. Über graphisches Interpolieren. M.P.L. 13. 96.

Harmonische Analyse.

38. **E. Grimschl*. Analyse und Synthese von Schwingungen. V.P.G. 5. 303.

Siehe auch 1046.

Mathematische Tafeln.

39. *J. Schnöckel*. Tafel der Antilogarithmen für die Basis 2. Z.S. 49. 465.

Nomographie.

40. *M. d'Ocagne*. Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie. J.E.P. (4) 8. 97.

41. **M. d'Ocagne*. Coup d'œil sur la théorie la plus générale de la nomographie. A.F. 1903. 180.

42. *M. d'Ocagne*. Sur la résolution nomographique des triangles sphèriques. C.R. 138. 70.

Graphischer Kalkül.

43. *R. Mehmke*. Zur graphischen Kinematik und Dynamik. D.V.M. 12. 561.

44. *A. Padoa*. Esposizione elementare

del metodo di Steiner per la resoluzione grafica delle equazioni di 2. grado. B.D.M. 3. 1.

45. *F. Wittenbauer.* Graphische Dynamik der Getriebe. Z.S. 50. 57.

46. **F. Merl.* Graphische Bestimmung von Grabenprofilen und Rohrweiten. K.T. 5. 20.

Siehe auch 37; 660; 780; 950; 1008.

Geometrische Näherungsmethoden.

47. *K. Bochow.* Das reguläre Achtzehneck als Beispiel für ein Näherungsverfahren zur Konstruktion und Berechnung von regelmäßigen Vielecken und von Winkelfunktionen. U.M.N. 10. 12.

48. *E. Eckhardt.* Neue Ableitung und geometrische Darstellung von Kreisumfang und -Inhalt. Z.H. 34. 233.

49. **Ceretti.* Il π presso i Cinesi. A.A.U. (3) 10.

50. *G. Bonfantini.* Un metodo per calcolare la misure dell' area della superficie piana racchiusa da un' elisse. B.D M. 3. 48.

51. *E. Puller.* Minimumsaufgaben bei zweifachen Korbbögen. Z.R.W.L. 23. 130.

Winkelteilung.

52. *J. D. Everett.* Note on Borgnets method of dividing an angle in an arbitrary ratio. P.M. (6) 7. 75.

53. *B. Carrara.* I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. R.F.M. 5. A. 19; 228; 309.

54. *F. Villareal.* Trisección del ángulo. Refutacion. R.C.L. 7. 29.

55. *O. Schneider.* Planimetrische Ableitung der kubischen Gleichung für die Winkeltrisektion. U.M.N. 10. 17.

Inhalte.

56. **H. Rebenstorff.* Bestimmung des Rauminhalts von Gefäßen. Z.P. 16. 349.

57. **Kober.* Ableitung und Anwendung der Simpsonschen Formel. Z.G.U. 15. 197.

58. **Gräber.* Ausmessung des Pyramidenstumpfes. Z.G.U. 16. 2.

59. **Gräber.* Ausmessung des regelmäßigen Kloster- und Kreuzkappengewölbes. Z.G.U. 16. 77.

Siehe auch 998.

Planimeter.

60. **J. Barvék.* Studie über Polarplanimeter (tschech.). M.A.T.P. 1903 No. 34.

61. **A. Camacho.* Puede applicarse el planimetro en los observatorios meteorologicos a la determinacion de las medias diarias y mensuales. B.I.T. 6. 135.

Rechenapparate.

62. **A. Wolff.* Kann die russische Rechenmaschine ihren alten Platz in der Schule behaupten oder ist ihr der Posner-Langersche Rechenkasten vorzuziehen. A.F.S.P. 5. 488; 506; 527.

63. **F. L. O. Wadsworth.* On convergents and arithmetical series, the ratio of whose terms approximate successively the value of π and on their application to the construction of computing machines. J.F.I. 156. 131.

64. *M.* Auskunft. Z.S. 50. 334.

Rechenschieber.

65. *—. Note sur la règle à calculs. R.M.S. 13. 196.

Geometrischer Kalkul.

66. *B. O. Peirce.* On generalised space differentiation of the second order. P.A.Bo. 39. 377.

Vektorenrechnung.

67. *R. Schimmak.* Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition. N.G.G. 1903. 317.

68. *R. Mehmke.* Vergleich zwischen der Vektorenrechnung amerikanischer Richtung und derjenigen deutsch-italienischer Richtung. D.V.M. 13. 217.

69. *L. Prandtl.* Über eine einheitliche Bezeichnung der Vektorenrechnung im technischen und physikalischen Unterricht. D.V.M. 13. 36.

70. *A. Macfarlane.* The notation and fundamental principles of vector analysis. D.V.M. 13. 228.

71. **J. H. Maclagan-Wedderburn.* On the general scalar function of a vector. P.R.S.E. 24. 409.

72. **C. H. Hinton.* The geometrical meaning of Cayleys formulae of orthogonal transformation. P.R.I.A. (3) 8. 59.

73. **A. Thue.* On en pseudomekanisk methode i geometrien. A.S.C. 1902 No. 4.

Siehe auch 144; 805.

Quaternionen.

74. *C. J. Joly.* A method of establishing the principles of the calculus of quaternions. P.M. (6) 6. 653.

75. *C. J. Joly.* Quaternion arrays. T.R.I.A. 32.

76. **C. J. Joly.* The multilinear quaternion function. P.R.I.A. (3) 8. 47.

77. *C. J. Joly.* The interpretation of a quaternion as a point symbol. T.R.I.A. 32.

78. *H. E. Hawkes.* Enumeration of non-quaternion number systems. M.A. 58. 361.

79. **C. J. Joly.* Integrals depending on a single quaternion variable. P.R.I.A. (3) 8. 6.

80. **P. A. Mac Mahon.* On the application of quaternions to the orthogonal transformation and invariant theory. P.L.M.S. (2) 1. 210.

81. **O. J. Ferguson.* Quaternions in electrical calculations. P.R. 17. 378.

Geometrisches Zeichnen.

82. *O. Schneider.* Teilung einer Strecke ohne Verwendung von Parallelen. U.M.N. 10. 39.

Zeichenwerkzeuge.

83. **E. A. Partridge.* On the mathematical theory of the geometric chuck. G.F.I. 155. 139; 195.

84. *B.* Nuevo útil de dibujo. A.S.A. 56. 92.

85. **A. Baur.* Der Campylograph. N.O. 48. 229.

86. *J. J. Quinn.* A linkage for describing the conic section by continuous motion. M.M.F. 11. 12.

87. *J. R. Cotter.* An instrument for drawing conics. P.M. (6) 7. 274.

88. *K. Pearson.* On a novel instrument for drawing parabolas. P.M. (6) 7. 200.

89. *E. Estanave.* Un hyperpolographe à liquide. R.S. (5) 1. 596.

90. *E. Estanave.* Sur un hyperbolographe à liquide. S.M. 32. 58.

91. *F. Schrader* et *C. Sauerwein.* Sur l'emploi du tachéographe Schrader pour les travaux d'hydrographie. C.R. 137. 781.

Darstellende Geometrie.

92. *C. Heumann.* Zur Thorie der Krümmung nach den Methoden der darstellenden Geometrie. A.Gr. (3) 6. 283.

93. *R. Mehmke.* Konstruktion der Krümmungsachse und des Mittelpunkts der Schmiegungskugel einer durch Grundriß und Aufriß gegebenen Kurve. Z.S. 49. 464.

94. **G. Loria.* Osservazioni sopra un problema di geometria descrittiva. P.M.R. (3) 1. 148.

95. *F. P. Paterno.* Un teorema sulle proiezioni ortogonali di due segmenti rettangolari e la sua applicazione in geometria descrittiva. R.C.M.P. 18. 111.

Projektion.

96. **H. Schmidt.* Stereoskopische Projektion. P.M.B. 38. 265.

Siehe auch 95.

Schattenkonstruktionen.

97. **G. Feldhaus.* Ein kleiner Beitrag zur Lehre von der Schattenkonstruktion. Z.G.U. 16. 101.

98. **G. Feldhaus.* Noch einmal der Schatten in Hohlkugeln. Z.G.U. 16. 185.

99. **H. Hertzer.* Schlagschatten eines Kugelkreises in die Kugel. Z.G.U. 16. 169.

Beleuchtungskunde.

100. **Meisel.* Über die wahre Bedeutung der Kurven gleicher Helligkeit auf krummen Flächen. Z.G.U. 15. 183.

Photogrammetrie.

101. *P. Caubet.* Remarques sur la calcul des coordonnées photographiques. B.A. 21. 81.

102. *S. Finsterwalder.* Eine neue Art die Photogrammetrie bei flüchtigen Aufnahmen zu verwenden. S.A.M. 1904. 103.

103. *S. Finsterwalder.* Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichungsrechnung und solchen der Statik. S.A.M. 1903. 683.

104. *F. Faccin.* I calcoli di riduzione delle fotografie stellari. R.F.M. 5 A 242.

105. *G. Boccardi.* Sulla precisione delle posizioni stellari ottenute col metodo fotografico. R.A.L.R (5) 13 A 392.

Siehe auch 992.

Kristallographie.

106. *A. Chevalier.* Übungen in der Kristallographie (russ). A.U.J. 1903. No 1 u. 2.

107. **E. v. Fedorow.* Allgemeinste Kristallisationsgesetze und die darauf fußende eindeutige Aufstellung der Kristalle. Z.K.M. 38. 321.

108. *A. J. Moses* und *A. F. Rogers.* Nachtrag zu dem Aufsatze: Formeln und graphische Methoden zur Bestimmung von Kristallen. Z.K.M. 38. 506.

109. **G. F. H. Smith.* Über die Vorgänge der gnomonischen Projektionen und über ihre Anwendung beim Kristallzeichnen. Z.K.M. 39. 142

110. **E. Sommerfeld.* Kettenbruchähnliche Entwicklungen in der Kristallographie. C.M.G. 1903. 537.

111. *H. Baumhauer.* Über die Aufeinanderfolge und die gegenseitigen Beziehungen der Kristallformen in flächenreichen Zonen. S.A.B. 1904. 543.

112. **E. Sommerfeld.* Kettenbruchähnliche Entwicklungen zur Beurteilung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens bestimmter Flächenkombinationen an Kristallen. Z.F.M. 1903. 537.

113. **H. Baumhauer.* Untersuchungen über die Entwicklung der Kristallflächen im Zonenverbande. Z.K.M. 38. 628.

114. **F. Haag.* Notiz zu dem Aufsatze von C. Lippitsch, Stereometrie der einfachen isoachsialen Formeln des regulären Systems. Z.K.U. 38. 507.

Modelle.

115. **Gauger.* Ein mechanisches Modell zur Demonstration des Dopplerschen Prinzips. Z.P. 16. 329.

116. **Adami.* Ein Drehstrommodell zur Selbstanfertigung. Z.P. 17. 29.

Siehe auch 722.

Mechanik im allgemeinen.

117. **P. Dahem.* Die Entwicklung der Mechanik (poln). W.M. 7. 113; 244.

118. **Juppont.* Critique de la mécanique classique et essai de mécanique naturelle. F.T. (10) 8. 177.

119. **G. Sorel.* Sur divers aspects de la mécanique. R.M.M. 11. 716.

120. *A. Gouilly.* Sur l'enseignement élémentaire de la mécanique. E.M. 6. 12; R.S. (5) 1. 379.

121. **K. Fuchs.* Kleine Beiträge zur Mechanik. Z.P. 16. 342.

122. *J. Ruiz-Castizo Ariza.* Algunas fórmulas para el empleo de ejes coordenados oblicuos en la mecánica analitica. R.T.M. 3. 75; 120.

Prinzipien der Mechanik.

123. *A. Müller.* Einige Bemerkungen über den Wesensbegriff der Bewegung und sein Verhältnis zum Begriff der absoluten Bewegung. N.O. 48. 233.

124. *C. Neumann.* Über die sogenannte absolute Bewegung. B.F. 252.

125. **E. de Caucas.* Explanation of forces at a distance. R.S. (4) 18. 744.

126. *J. Joly.* On the conservation of mass. T.S.D. (2) 8. 23.

127. **G. Zemplén.* Anwendung der mechanischen Prinzipien auf Bewegungen mit Reibung. M.P.L. 11. 162; 12. 275.

128. *G. Zemplén.* Berichtigungen zur Arbeit: Über die Anwendung der mechanischen Prinzipien auf reibende Bewegungen. (A.P.L. 12. 356). A.P.L. (4) 13. 216.

129. **G. Zemplén.* Über das Prinzip des größten Energieumsatzes. M.P.L. 12. 372.

130. *H. Januschke.* Über den Energieumsatz in der Mechanik. Berichtigung. A.P.L. (4) 12. 1175.

131. *G. Zemplén.* Über den Energieumsatz in der Mechanik. A.P.L. (4) 13. 840.

132. **M. Réthy.* Ostwalds Prinzip über den Energieumsatz (ung). M.T.E. 21. 459; M.P.L. 13. 111.

133. *F. Lindemann.* Über das d'Alembertsche Prinzip. S.A.M. 1904. 77.

134. **J. Larmor.* On the mathematical expression of the principle of Huygens. P.L.M.S. (2) 1. 1.

135. *M. Merriman.* The principle of least work in mechanics and its use in investigations regarding the ether of space. P.P.S. 42. 162.

136. *M. Réthy.* Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört. M.A. 58. 169.

137. **M. Réthy.* Über die Verallgemeinerung des Prinzips der Aktion (ung). M.T.E. 21. 146.

138. *Manno.* Das Prinzip der Gegenwirkung (actio par reactioni) als Grundlage der Krafttheorie. D.V.N. 75. 31.

139. *G. H. Bryan.* Dynamical and granular media. N. 69. 250.

140. **O. Chvolson.* Perpetuum mobile (russ). R.F.W. 2. 105.

Siehe auch 178; 329; 951.

Kinematik.

141. **R. Magini.* Sulle accelerazioni d'ordine superiore. A.I.V. 62. 1063.

142. **Chatelain.* Sur la représentation du mouvement. R.S. (4) 21. 664.

143. **H. Wilda.* Umdrehungszähler und Geschwindigkeitsmesser. K.B. 19. 293.

144. *G. K. Suslov.* Über die Verträglichkeitsbedingungen von Hadamard (russ). B.U.K. 1903. c 6.

145. *J. von der Griend jr.* Rectifieerende Krommen. C.A.A. 12. 414.

146. *J. Ruiz Castizo-Ariza.* Algunas fórmulas para el empleo de ejes coordenados en la mecánica analítica. R.T.M. 4. 20.

147. **F. J. Vaes.* Opmerkingen omtrent bewegingsleer en theorie der oppervlakken. M.P.M. 9. 185.

148. *E. v. Weber.* Die komplexen Bewegungen. B.G.L. 55. 384.

149. *L. E. J. Broower.* Over een splitsing van de continue beweging om een vast punt O van R_4 in twee continue bewegingen om O van R_3's. C.A.A. 12. 819; 941. — *E. Jahnke* 940.

150. **S. L. van Oss.* Beweging in een ruimte van 4 afmetingen. M.P.M. 9. 178.

151. **R. de Saussure.* La répresentation des objets en mouvement. R.S. (4) 21. 257.

152. *J. Gehrke.* Om en anvendelse af ligningen $f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ paa et uforanderligt, plant punktsystems bevaegelse. N.T.M. 15. B. 5.

153. *N. J. Sonin.* Über die aus 3 Elementen bestehenden in bezug auf 1 Achse symmetrischen Parallelogramme (russ). A.P.B. (5) 18. 117.

154. *F. Kraft.* Équivalence du mouvement d'un système invariable à 3 dimensions Σ qui passe d'une manière quelconque d'une position donnée Σ_1 à une autre position donnée Σ_2. E.M. 5. 178.

155. *M. Grübler.* Über die Kriterien der Zwangläufigkeit kinematischer Ketten. S.I.D. 1903. 10.

156. *A. Bienaymé.* Essai sur le déplacement d'un madrier sur 2 rouleaux non parallèles. N.A. (4) 3. 485.

157. **J. J. Browne.* A particular method in centroids. C.C.S. 1. 219.

158. **J. Finger.* Über die einer allbekannten Kapillarerscheinung analogen Resultate eines bestimmten Problems der Kinematik starrer Körper. B.G. 752.

159. *L. Waelsch.* Über Binäranalyse. S.A.W. 113. 645; 1091.

Siehe auch 43.

Kinematische Geometrie.

160. **A. Mannheim.* Note de géométrie cinématique. A.F. 1903. 128.

161. **R. Bérard.* Sur le déplacement d'une figure de forme invariable. B.M.E. 9. 166.

162. *C. E. Wasteels.* Sur le volume engendré par une figure invariable. M. (3) 4. 5; 86.

163. *R. Bricard.* Sur le déplacement d'une figure de grandeur invariable assujettie à 3 conditions. N.A. (4) 3. 448.

164. *O. Mohr.* Beitrag zur Geometrie ebener Getriebe. Z.S. 49. 393.

Mechanismen.

165. *G. Fontené.* Sur un système articulé gauche. N.A. (4) 4. 105.

166. *G. Fontené.* Sur le système articulé de M. Kempe. N.A. (4) 3. 529; 4. 8.

167. *F. J. Vaes.* Een vraagstuk bebetreffende stangenvierhoeken. N.A.W. (2) 6. 178.

168. *E. Emch.* Somes special algebraic transformations realized by linkages. C.C.S. 1. 210.

169. *A. Mesnager.* Sur les articulations à lame flexible. C.R. 137. 908.

170. *F. Ebner.* Die Schubkurbel. U.M.N. 10. 6.

Siehe auch 45; 164.

Zahnräder.

171. * *W. Wolfrom.* Eine falsche Konstruktion der Evolventenverzahnung. Z.G.U. 17. 23. — *P. Köppe* 66.

Schraubenrechnung.

172. **R. S. Ball.* Some extensions of the theory of screws. T.R.I.A. 32. 299.

173. **C. J. Joly.* The quadratic screw system; a study on a family of quadratic complexes. T.R.I.A 32. 155.

174. **C. J. Joly.* Representation of screws by weighted points. T.R.I.A. 32.

175. **R. S. Ball.* On the reflection of screw-systems and allied questions. T.R.I.A. 32. 101.

176. **C. J. Joly.* The geometry of a three system of screws. T.R.I.A. 32. 239.

Statik.

177. **J. Slowikowski.* Sur certains problèmes de mécanique et de géométrie. Le système de zéro. P.T.W. 41. 351. 388.

178. **J. Frischauf.* Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen eines starren Punktsystems aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und aus der Starrheit. B.F. 1

179. *A. Mehmke.* Statische Eigenschaft eines Systems von Punkten, für die eine beliebige Funktion ihrer Lage ein Minimum ist. Z.S. 50. 156.

180. **E. Grimsehl.* Apparat zur Demonstration der Zug- und Druckspannungen in einem festen Körper sowie zur experimentellen Ableitung des Momentensatzes. Z.P. 16. 260.

181. **H. Keferstein.* Über die Ableitung des Hebelgesetzes nach Grimsehl. Z.P. 16. 268.

182. **E. Grimsehl.* Die mechanische Kraftübertragung durch schiefe Ebene, Keil und Schraube. Z.P. 17. 129.

183. **Claussen.* Über die statische Berechnung von Schornsteinen. M.P.D.B. 24. 612.

184. **O. Jäcker.* Schornsteinstabilität. M.P.D.B. 24. 245; 265.

185. * *O. Jäcker.* Mauerwerksfestigkeit und Schornsteinstandsicherheit. M. P.D.B. 25. 896; 914; 935; 956; 974; 992.

186. *A. Schoenflies.* Über Plückers wissenschaftlichen Nachlaß. M.A. 58. 385.

Siehe auch 103; 371; 373.

Graphische Statik.

187. *M. Panetti.* Una risoluzione diretta del problema della sezione reagente. A.A.T. 39. 247.

Zusammensetzung von Kräften.

188. *P. Duhem.* Léonard de Vinci et la composition des forces concurrentes. B.M. (3) 4. 338.

189. * *P. Czermak.* Eine Vorrichtung zur Darstellung des Kräfteparallelogramms. Z.P. 17. 89.

Massengeometrie.

190. *N. N. Schiller.* Über den möglichen Aufbau der Mechanik der Massen ohne Voraussetzung der Hilfsbegriffsbestimmung der Kraft. russ. B.U.K. c 7.

Schwerpunkte.

191. *S. Dautheville.* Sur quelques sommations que l'on rencontre en mécanique. E.M. 5. 437.

192. * *F. Castellano.* Baricentro di un sistema piano di punti con masse imaginarie. P.M.R. (3) 1. 163.

193. *A. Miller.* Konstruktive Bestimmung des Schwerpunktes des Dreiecksumfangs. Z.H. 34. 407.

Momente.

194. * *C. Spelta.* Alcune formole e proprietà relative ai momenti d'inerzia. G. B. 41. 62.

195. * *W. H. Derriman.* On an oscillating table for determining moments of inertia. P.P.S.L. 18. 420.

196. *S. Dautheville.* Sur quelques sommations qu'on rencontre en mécanique. E.M. 5. 437.

197. *E. Rehfeld.* Reduktion der Trägheitsmomente einfacher Körper auf die Trägheitsmomente einzelner Massenpunkte, die auf ihrer Oberfläche liegen. A.Gr. (3) 6. 237.

198. *K. Zindler.* Über die liniengeometrische Darstellung der Trägheitsmomente eines starren Körpers. B.F. 34.

Siehe auch 180; 191; 204; 385; 386.

Kettenlinien.

199. *C. Neumann.* Über die Hervorbringung der Kettenlinie durch Biegung einer Kreislinie. B.G.L. 55. 13.

200. * *A. Goldberg.* Sur les analogies entre l'équilibre d'un fil et le mouvement d'un point. M.S.C. 1902 No. 9.

Dynamik.

Siehe 43; 45

Differentialgleichungen der Dynamik.

201. *G. Hamel.* Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen in der Mechanik. Z. S. 50. 1.

202. * *W. F. Meyer.* Zur Theorie der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. B.F. 386.

203. *G. Morera.* Sulle equazioni dinamiche di Hamilton. A.A.T. 39. 342.

204. * *H. Föttinger.* Effektive Maschinenleistung und effektives Drehmoment und deren experimentelle Bestimmung. J.S.G.B. 4. 441.

Siehe auch 951.

Dynamik des Punktes.

205.* *Orlando.* Trajettoria d'une grave. A.A.P.M. 17.

206. *A. Witting.* Über den Fall im wiederstehenden Mittel. S.I.D. 1903. 11.

207. *F. Schuh.* Over de beweging van een materieel deeltje in een vlak, eenpaarig roteerend Krachtenveld. N.A.W. (2) 6. 123.

208. *R. Mehmke.* Über eine Mechanikaufgabe. M.B. (2) 6. 28.

Siehe auch 152; 200.

Zentralbewegung.

209. *V. Jamet.* Sur le théorie des forces centrales. N.A. (4) 3. 216

210. * *E. Lampe.* Der schiefe Wurf im luftleeren Raume als Zentralbewegung. B.F. 215.

Gezwungene Bewegung.

211. *L. Lecornu.* Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide. S.M. 32. 50.

212. *C. Bourlet.* Sur le mouvement d'un point pesant sur une courbe avec une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. N.A. (4) 3. 175.

213. * *G. Pennachietti.* Sugl' integrali comuni a più problemi del moto d' un punto materiale sopra una superficie. A.G.C. (4) 15 No. 8.

Brachistochronen.

214. *C. Formenti.* Su alcuni classi di linee brachistocrone. R.I.L. (2) 36. 1079.

Pendel.

215. **E. Weiß.* Elementare Entwicklung der Pendelformel für kleine Winkel. Z.P. 17. 87.

216. *A. G. Greenhill.* Le pendule simple sans approximations. N.A. (4) 4. 97.

217. **A. J. Stodólkiewicz.* Einige Bemerkungen betreffend das Pendel (poln.). P.T.W. 41. 510.

218. **R. R. Tatnall.* On the theory of te compound pendulum. P.R. 17. 460; 18. 187.

Siehe auch 16; 1192.

Dynamik des Körpers.

219. *F. Jung.* Bemerkung zur Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen. A.Gr. (3) 6. 206.

220. **P. V. Voronets.* Die Bewegungsgleichungen des Körpers, der auf der invariabeln Ebene ohne zu gleiten rollt (russ.). B.U.K. 1903 b4.

221. *H. Andoyer.* Problème de mécanique rationnelle. N.A. (4) 3. 241.

222. *J. H. M. Falkenhagen.* Die rollende Bewegung eines beliebigen schweren Umdrehungskörpers über eine horizontale Ebene. N.A.W. (2) 6. 104.

223. *A. Hérisson.* Procédé simple permettant d'obtenir sur la paroi d'un cylindre qui tourne de grandes pressions avec de faibles efforts. C.R. 137. 1035.

224. *A. Schoenflies.* Über den wissenschaftlichen Nachlaß Julius Plückers. M.A. 58. 385.

Dynamik des Systems.

225. *M. Contarini.* Sul moto d' un systema olonomo di corpi rigidi. R.A.L.R. (5) 12 B. 609.

226. *G. Hamel.* Über eine Anwendung der Lagrangeschen Transitivitätsgleichungen in der Mechanik. D.V.N. 75. 12; D.V.M. 13. 132.

227. *L. Boltzmann.* Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten. D.V.N. 75. 13; D.V.M. 13. 132.

228. *E. Hasenöhrl.* Über die Anwendbarkeit der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung in der Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen. B.F. 642.

229. *H. C. Pocklington.* On the kinetic theory of matter. P.C.P.S. 12. 283.

Siehe auch 45; 567; 568.

Drehung.

230. *de Sparre.* Remarque au sujet de la question de mécanique posée au concours d'agrégation en 1903. N.A. (4) 4. 38; 82.

231. *H. Padé.* Sur l'herpolhodie. N.A. (4) 3. 289.

232. *E. Cotton.* Application de la géométrie cayleyenne à l'étude géométrique du déplacement d'un solide autour d'un point fixe. A.E.N. (3) 20. 155.

Kreisel.

233. *A. G. Greenhill.* The mathematical theory of the top II. A.of M. (2) 5. 67.

234. *C. Alasia.* Alcune osservazioni sul politropio di Sire e sul giroscopio di Foucault. R.F.M. 4 B. 528.

235. *H. du Bois.* Orientierung polarisierter unsymmetrischer Kreisel. A.P.L. (4) 13. 289.

236. *H. E. J. G. du Bois.* Hysteretische orientatie-verschijnselen. C.A.A. 12. 753.

237. **A. Schmidt.* Eine Dreifingerregel für den Kreisel und den Präzessionsapparat. Z.P. 77. 32.

238. *A. Föppl.* Über einen Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. S.A.M. 1904. 5.

239. *H. Lorenz.* Die Wirkung eines Kreisels auf die Rollbewegung von Schiffen. P.Z. 5. 27.

Schwingungen.

240. *A. Korn.* Le problème mathématique des vibrations universelles. S.M.Kh. (2) 8. 68.

241. **E. Grimsehl.* Analyse und Synthese von Schwingungen. V.P.G. 5. 303.

242. *R. Amberg.* Dämpfung von Schwingungen. Z.P. 17. 32.

243. *W. Elsässer.* Über erzwungene Schwingungen von Stäben. A.P.L. (4) 13. 791.

244. *F. A. Schulze.* Über drehende Schwingungen von dünnen Stäben mit rechteckigem Querschnitt und ihre Verwendung zur Messung der Elastizitätskonstanten. A.P.L. (4) 13. 583.

245. **P. E. Kappert.* Apparat für Transversalschwingungen elastischer Stäbe. Z.P. 16. 318.

246. *C. Chree.* The whirting and

transverse vibrations of rotating shafts. P.M. (6) 7. 504.

247. *S. Guggenheimer.* Über die universellen Schwingungen eines Kreisringes. S.A.M. 1904. 41.

248. *G. Alfani.* Sui movimenti vibratori di una torre. R.F.M. 5 A. 146; 193.

249. **H. J. Oosting.* Elementare Behandlung des Gesetzes von Biot und Savart. Z.P. 17. 27.

250. **A. Korn.* Les vibrations universelles de la matière. Théorie mécanique de la gravitation, du frottement dans les masses continues et des phénomènes électriques. A.E.N. (2) 19. 133.

Siehe auch 88; 766; 981.

Stoß.

251. *T. Schwartze.* Zur Formulierung des Stoßgesetzes. Z.H. 34. 415.

252. *Ringelmann.* Détermination expérimentale de la pression momentanée résultant du choc. C.R. 137. 644.

253. *K. v. Szily.* Der Stoß rauher Körper bei ebener Bewegung. B.M.N. 19. 283.

Siehe auch 956.

Reibung.

254. **E. Daniele.* Sulla teoria meccanica dell' attrito. N.C.P. (5) 7. 109.

255. *A. Sommerfeld.* Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. Z.S. 50. 97.

256. *L. Lecornu.* Sur le frottement de pivotement. C.R. 138. 554.

Siehe auch 127; 128; 250.

Perpetuum mobile.

257. *C. Lagrange.* La machine à mouvement perpétuel et la question du radium. Sur la rotation indéfectible d'un système et la production indéfinie d'un travail utilisable sous la seule action d'un potentiel newtonien fine. B.A.B. 1903. 987.

Siehe auch 140.

Potentialtheorie.

258. *E. Daniele.* Sulla teoria dei potenziali di ordine superiore. R.A.L.R. (5) 12; B. 453.

259. **A. C. Dixon.* On many-valued Newtonian potentials. P.L.M.S. (2) 1. 415.

260. *J. Plemelj.* Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. M. H. 15. 93.

261. *D. Hilbert.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. N.G.G. 1904. 49.

262. **H. du Bois.* Hysteretische Anwendung der Boltzmann-Maxwellschen Verteilungsfunktion. B.F. 809.

263. *L. Féjer.* Über 2 Randwertaufgaben. B.M.N. 19. 329.

264. *A. de St. Germuin.* Généralisation de la propriété fondamentale du potentiel. C.R. 137. 736.

265. **K. Stojanovitch.* Widerstandspotential (serb.). P.A.B. 67. 32.

266. **P. Alibrandi.* Il problema di Dirichlet per un parallelepipedo rettangolo. G.B. 41. 230.

267. *B. O. Peirce.* On the lines ot certain classes of solenoidal or lamellar vectors, symmetrical with respect to an axis. P.A.Bo. 39. 295.

Siehe auch 207; 257.

Attraktion.

268. *G. W. Walker, A. Gray.* Attraction between concentric hemispherical shells. N. 69. 560.

269. *G. Morera.* Sull' attrazione di un ellissoide eterogeneo. A.A.T. 39. 252; 258; 332; 338.

Gravitation.

270. **Peck.* Corpuscular theories of gravitation. P.P.S.G. 34.

271. *A. Korn.* Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. S.A.M. 33. 383; 563.

272. **C. Davis.* A suggestive relation between the gravitational constant and the constants of the ether. S. (2) 19. 928.

273. **J. J. Gilles.* Die Energetik von Ostwald und die Gravitation. G.L. 39. 193.

274. *L. d'Auria.* A relation between the mean speed of stellar motion and the velocity of wave propagation in a universal gaseous medium bearing upon the nature of the ether. J.F.I. 155. 207.

Siehe auch 250; 469; 987; 1030.

Hydrostatik.

275. *P. Duhem.* Sur quelques formules utiles pour discuter la stabilité d'un milieu vitreux. C.R. 38. 737.

276. *P. Duhem.* D'une condition nécessaire pour la stabilité d'un milieu vitreux illimité. C.R. 138. 844.

277. **H. Kuhfahl.* Der hydrostatische Auftrieb. Z.P. 17. 32.

278. **A. Hartwich.* Einfacher Ap-

parat für das hydrostatische Paradoxon. Z.P. 16. 275.

279. **A. Höfer*. Zwei hydrostatische Apparate. Z.P. 16. 257.

Gleichgewicht von Körpern in Flüssigkeit.

280. **R. W. H. T. Hudson*. The surface of flotation. M.M. (2) 23. 50.

Hydrodynamik.

281. *U. Grassi*. Studii d'idrodinamica. A.S.P. 9. No. 3.

282. *W. Wien*. Hydrodynamische Untersuchungen von H. v. Helmholtz. S.A.B. 1904. 716.

283. *E. Maillet*. Sur les lois des montées de Belgrand et les formules du débit d'un cours d'eau. J.E.P.(2) 8. 1.

284. *S. Hondl*. O nul-mjestima gibanja tekućine. (Über die Nullstellen der Geschwindigkeit einer Flüssigkeit.) T.S.A. 154. 132.

285. **L. Matthiessen*. Gibt es unendlich große Geschwindigkeiten? B.F. 141.

286. **M. T. Huber*. Sur les conséquences de l'hydrocinématique théorique qui ont une portée pratique au point de vue des applications, en particulier sur celles qui se rapportent au mouvement de l'eau dans les fleuves et dans les canaux. C.T.L. 21. 47; 61; 73; 84. 99.

287. *J. T. Jackson*. A new method of producing tension in liquids. P.S.D. (2) 10. 104.

288. **S. Zaremba*. Sur un problème d'hydrodynamique lié à un cas de double réfraction accidentelle dans les liquides et sur les considérations théoriques de M. Natanson relatives à ce phénomène. B.I.C. 1903. 403.

Siehe auch 295; 748.

Bewegung der Flüssigkeiten in Kanälen.

Siehe 286.

Ausfluß von Flüssigkeiten.

289. *J. Hermanell*. Theorie des freien Ausflusses von Flüssigkeiten an Mündungen und Überfällen. S.A.W. 112. 879.

290. **Pantanelli*. Efflusso dell' acqua per le sabbie. M.A.M. (3) 4.

291. **A. v. Obermayer*. Über den Ausfluß fester Körper, insbesondere des Eises unter hohem Drucke. A.A.W. 1904. 35.

Siehe auch 968; 1056; 1057.

Wellenlehre.

292. **H. Bateman*. The solution of partial differential equations by means of definite integrals. P.L.M.S. (2) 1. 451.

293. **A. Schuster*. The propagation of waves through dispersive media. B.F. 569.

294. **P. Forchheimer*. Wasserbewegung in Wanderwellen. A.A.W. 1903. 299.

Siehe auch 322; 1036.

Wirbel.

295. *V. Bjerknes*. Über Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrostatischen. Z.S. 50. 422.

296. **B. Brunhes* et *J. Brunhes*. Les analogies des tourbillons athmosphériques et des tourbillons des cours d'eau et la question de la déviation des rivières vers la droite. A.G. 13. 1.

Gleichgewicht rotierender Flüssigkeiten.

297. *F. Insolera*. Figure ellitiche di equilibrio di un velo piano liquido. R.C.M.P. 18. 16.

298. *G. H. Darwin*. The approximate determination of the form of Maclaurin's spheroid. T.S.M.Am. 4. 113.

Reibung von Flüssigkeiten.

299. *A. Pochettino*. Sull' attrito interno dei liquidi isolanti in un campo elettrostatico costante. R.A.L.R. (5) 12 B. 363.

Viskosität.

300. **S. Zaremba*. Remarques sur les travaux de M. Natanson relatifs à la théorie de la viscosité. B.I.C. 1903. 85.

301. **L. Natanson*. Sur l'application des équations de Lagrange dans la théorie de la viscosité. B.I.C. 1903. 268.

302. **L. Natanson*. Sur l'approximation de certaines équations de la théorie de la viscosité. B.I.C. 1903. 283.

303. **S. Zaremba*. Sur une généralisation de la théorie classique de la viscosité. B.I.C. 1903. 380.

304. **S. Zaremba*. Sur une forme perfectionnée de la théorie de la rélaxation. B.I.C. 1903. 594.

305. **S. Zaremba*. Uwagi o pracach profesora Natansona nad teorya tarcia wewnętrznego. (Bemerkungen über die Arbeiten von Prof. Natanson über die Theorie der Viskosität.) C.A.C. 43. 14.

306. * *O. Scarpa.* Sullà viscosità dei miscugli di acqua e fenolo. N.C.P. (5) 6. 277.

Siehe auch 329; 464; 465; 479.

Aerodynamik.

307. * *A. Sadkiewicz.* Über die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung eines Gases (russ.). J.R.P.C.G. 35. 425.

308. * *R. Mewes.* Über Luftwiderstandsversuche und Windmesser. Z.H.H. 7. 38; 150.

309. * *A. F. Zahm.* Measurement of air velocity and pressure. P.R. 17. 410.

310. * *Samuelson.* Luftwiderstand und Flugfrage. I.A.M. 7. 220.

311. * *G. Koch.* Über den heutigen Stand der Flugfrage. V.P.G.B. 63. 25.

312. * *G. Melander.* Über Verdichtung der Gase an der Wand der Gefäße. B.F. 789.

313. *J. Boussinesq.* Rationalité d'une loi expérimentale de M. Parenty pour l'écoulement des gas par les orifices. J.M. (5) 10. 79; C.R. 138. 29.

314. * *A. Frank.* Neuere Ermittelungen über die Widerstände der Lokomotiven und Bahnzüge mit besonderer Berücksichtigung großer Fahrgeschwindigkeiten. M.F.I. 11. 60.

315. * *J. Altmann.* Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit, welche durch eine gegebene Druckdifferenz zweier benachbarter Luftschichten hervorgerufen wird, wenn diese Luftschichten seitlich, d. h. senkrecht zu ihrer Trennungsebene nicht ausweichen können. I.A.M. 7. 173.

316. * *M. Smoluchowski.* Sur les phénomènes aérodynamiques et les effets thermiques qui les accompagnent. B.I.C. 1903. 143.

317. * *R. Börnstein.* Die Abhängigkeit der Auftriebs vom Barometerstand. I.A. M. 7. 120.

Siehe auch 322.

Reibung von Gasen.

318. * *B. Weinstein.* Entropie und innere Reibung. B.F. 510.

Siehe auch 485; 665a.

Äußere Ballistik.

319. * *Garbasso.* Balistica esterna. R. A.G. 1903 Juli—Aug.

320. * *K. Stojanovitch.* Fall der Integrabilität einer ballistischen Gleichung (serb). P.A.B. 67. 190.

321. *E. Oekinghaus.* Das ballistische Problem auf hyperbolisch-lemniskatischer Grundlage. M.H. 15. 11; 139.

322. * *H. Rebenstorff.* Nachweis des Luftwiderstands. Z.P. 16. 287.

323. * *E. Coradin.* Les ondes aériennes. R.G.O. 15. 182.

Siehe auch 210.

Innere Ballistik.

324. *C. Cranz.* Entgegnung auf den Vortrag des Herrn F. Kötter vom 24. VI. 03. S.M.B. 3. 11.

Physiologische Mechanik.

325. *O. Fischer.* Physiologische Mechanik. A.Gr. (3) 7. 110.

326. *O. Fischer.* Über physiologische Mechanik. D.V.M. (3) 173.

327. * *G. Weiss.* Les travaux de W. Braune et O. Fischer sur la mécanique animale. R.G.O. 14. 1205.

Mathematische Physik im allgemeinen.

328. *A. Kneser.* Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der math. Physik. M.A. 58. 81.

Differentialgleichungen der Physik.

329. * *S. Zaremba.* Le principe des mouvements relatifs et les équations de la mécanique physique. B.I.C. 1903. 614.

330. *A. Kneser.* Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der math. Physik. M.A. 58. 81.

Prinzipien der Physik.

331. * *W. Natanson.* Z filosofii nauk przyrodniczych. O teoryach materyi (Über die Philosophie der Naturwissenschaften. Über die Theorie der Materie). P.P. 147. 165.

332. *O. J. Lodge.* Note on the probable occasional unstability of all matter. N. 68. 128.

333. * *P. de Heen.* Idées fondamentales d'un essai de théorie mécanique de l'électricité et de la chaleur. B.F. 43.

334. * *L. C. Wolff.* Neuere Ansichten zum Wesen der Elektrizität. M.P.D.B. 25. 913; 955.

335. * *E. Grimsehl.* Das Dopplersche Prinzip. Z.P. 17. 159.

336. * *J. Larmor.* On the intensity of the natural radiation from moving bodies and its mechanical reaction. B. F. 590.

Siehe auch 115; 134; 434; 759.

Erhaltung der Energie.

337. **Berndt*. Das Gesetz von der Umgestaltung der Energie. D.W.B. 4. 159.

Atomtheorie.

Siehe 353—355.

Äther.

338. **R. de Saussure*. Hypsthèse sur la constitution géométrique de l'éther. A.S.G. (4) 16. 368.

339. *R. de Saussure*. Constitution géométrique de l'éther. A.S.G. (4) 16. 753.

340. **R. de Saussure*. La constitution géométrique de l'éther. R.S. (4) 21. 599.

341. *G. H. Bryan*. On a mechanical theory of the aether. N. 68. 600.

342. **D. J. Mendelejeff*. Versuch einer chemischen Auffassung des Weltäthers. P. 15. 98; 121.

Siehe auch 135; 272; 358; 359; 912; 922; 1107.

Absolutes Maßsystem.

343. **A. F. Ravenshear*. Dimensional analysis of physical quantities and the correlation of units. P.P.S.L. 18. 424.

344. **R. J. Sowter*. Note on dimensions of physical quantities. P.P.S.L. 18. 445.

345. **Canter*. Elektrische Maßeinheiten. H.B. 19. 16.

346. **G. Giorgi*. Dimensioni e formole elettriche. A.A.E.I. 7. 7; 57.

Siehe auch 904.

Spezifisches Gewicht.

347. **G. Mie*. Über eine Methode das spezifische Gewicht sehr verdünnter Lösungen zu bestimmen. B.F. 326.

Siehe auch 511; 670.

Aggregatzustände.

348. *H. Hapel* en *H. Kamerlingh-Onnes*. De voorstelling van de continuiteit van den vloeibaren en gasvormigen toestand eenerzijds en de verschillende vaste aggregaattoestanden anderzijds door het entropievolume-energievlak van Gibbs. C.A.A. 12. 223.

Siehe auch 710; 711; 1111.

Änderung des Aggregatzustandes.

349. **J. C. Philip*. Freezing-point for binary systems. C.N. 88. 196.

Siehe auch 348; 677; 678; 697; 714; 794; 1114; 1131.

Molekularphysik.

350. **F. S. Vella*. Ultime scoperte sulla costituzione molecolare dei solidi. N.L.M. 17. 307.

351. **V. Spring*. Dvižnie častic tverdago tela (Bewegung der Moleküle der festen Körper). R.P.W. 2. 25.

352. **W. Sutherland*. The principle of dynamical similarity in molecular physics. B.F. 373.

353. *E. Rutherford*. The existence of bodies smaller than atoms. P.T.R. S.C. (2) 8. 79.

354. *J. J. Thomson*. On the structure of the atom: an investigation to the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the cirumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic-structure. P.M. (6) 7. 237.

355. **J. Traube*. Über den Raum der Atome und Moleküle. B.F. 430.

356. *J. Bernstein*. Berechnung des Durchmessers der Moleküle aus kapillarelektrischen Versuchen. A.P.L. (4) 14. 172.

357. *A. Pannekoek*. Eenige opmerkingen over de omkeerbaarkeid von molekulaire bewegingen. C.A.A. 12. 63.

358. **F. Hasenöhrl*. Über die Veränderungen der Dimensionen der Materie infolge ihrer Bewegung durch den Äther. A.A.W. 1904. 37.

359. **B. P. Weinberg*. Der wahrscheinlichste Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Störungen im Äther nach den bisherigen Forschungen (russ). M.U.O. 89. 1; 91. 497.

360. **W. Spring*. Sur la diminution de densité qu'éprouvent certains corps à la suite d'une forte compression et sur la raison probable de ce phénomène. J. C.P. 1. 593.

361. **G. T. Beilby*. The hard and soft states in metals. E.C.M. 3. 806.

Siehe auch 474; 575; 707.

Kohäsion.

Siehe 763; 878.

Absorption.

362. **J. M. von Bemmelen*. Die Absorption. VIII. Z.A.C. 36. 380.

363. *G. N. S. Schmidt*. Über den Einfluß der Temperatur und des Druckes auf die Absorption und Diffusion des Wasserstoffes durch Palladium. A.P.L. (4) 13. 747.

364. *H. Rausch von Traubenberg*. Über die Gültigkeit des Daltonschen resp. Hen

rysehen Gesetzes bei der Absorption der Emanation des Freiburger Leitungswassers und der Radiumemanation durch verschiedene Flüssigkeiten. P.Z. 5. 130.

Siehe auch 742; 1240.

Elastizität.

865. **P. Duhem.* Recherches sur l'élasticité. A.E.N. (3) 21. 99.

866. **L. de la Rive.* Sur une propriété de l'ellipsoide d'élasticité relative aux forces élastiques tangentielles. A. S.G. (4) 16. 388.

867. *M. Cantone.* Sull'influenza che può esercitare il mezzo ambiente nei fenomeni elastici. N.C.P. (5) 6. 89.

868. **L. Orlando.* Sopra alcuni problemi di equilibrio elastico. N.C.P. (5) 7. 161.

869. *O. Tedone.* Saggio di un teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elastico per un corpo isotropo. R.D. M. (3) 10. 13.

870. *O. Tedone.* Sul problema dell' equilibrio elastico di un cilindro circolare indefinito. R.A.L.R. (5) 13A 232.

871. *E. Morandi.* Sopra alcuni problemi di statica elastica. A.D.M. (3) 9. 161.

872. *C. Somigliana.* Sull' applicazione del metodo delle imagini alle equazioni dell' elasticità. R.A.L.R. (5) 13A 307.

873. *P. Duhem.* D'une condition nécessaire pour la stabilité initiale d'un milieu élastique quelconque. C.R. 138. 541.

874. **H. Lamb.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. P.R.S.L. 72. 128.

875. *M. Panetti.* Una risoluzione diretta del problema della sezione reagente. A.A.T. 39. 185.

876. **J. Morrow.* On an instrument for measuring the lateral contraction of tie-bars and on the determination of Poisson's ratio. P.P.S.L. 18. 582.

877. **A. E. H. Tutton.* Das Elasmometer, ein neuer Interferenz-Elastizitätsapparat. Z.K.M. 39. 321.

878. *F. A. Schulze.* Über eine einfache Methode zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten. S.G.M. 1903. 80; 94.

879. **H. Bouasse.* Sur les déformations des solides. R.G.O. 15. 115. — *P. Duhem* 217.

880. *L. Maurer.* Über die Deformation gekrümmter elastischer Platten. A.Gr. (3) 6. 260.

881. **F. Foster.* Repetition of stress. M.E. 10. 704; 740.

882. *H. T. Bovey.* On the stresses developed in beams loaded transversely. P.T.R.S.C. (2) 8. 3.

883. *F. Foster.* On phenomena due to repetitions of stress and on a new testing machine. S.P.M. 48. No. 7.

884. *M. T. Huber.* Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. A. P.L. (4) 14. 153.

885. *C. S. Jackson.* A contrivance for shewing bending moment diagrams. M. G.S. 2. 360.

886. *A. E. H. Love.* Note on the relation between the bending moment and the curvature of a beam loaded uniformly. Q.J. 34. 378.

887. *L. N. G. Filon.* On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular crosssection under any system of load. P.R.S.L. 72. 391; T.R. S.L. 201A 63.

888. *F. Purser.* On the application of Bessels function to the elastic equilibrium of a homogeneous isotropic cylinder. T.R.I.A. 32.

889. *L. Prandtl.* Zur Torsion von prismatischen Stäben. P.Z. 4. 758.

890. **K. E. Guthe.* Fibers resembling fused quartz in their elastic properties. P.R. 18. 256.

891. **F. Beaulard.* Sur les propriétés élastiques des fils de soie et le coefficient de Poisson. J.P. (4) 2. 785.

892. **Cantone.* Sul coefficiente di Poisson per il cauciu. N.C.P. (5) 6. 91.

893. **C. E. Guillaume.* Propriétés élastiques des aciers au nickel. J.P. (4) 3. 268.

894. *P. Galy-Ache.* Recherches sur les propiétés mécaniques et physiques du cuivre. A.C.P. (7) 30. 326.

895. *J. Petzval.* Theorie der Störungen der Stützlinien. Z.S. 50. 288; 345.

896. **Landmann.* Ein Beitrag zur Ermittlung der Randspannungen in Fabrikschornsteinen. B.M.B. 1. 131.

Siehe auch 108; 244; 245; 912; 1030; 1154; 1161; 1256; 1259; 1269.

Photoelastizität.

897. **W. König.* Einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen künstlicher Doppelbrechung und Elastizität. B.F. 332.

898. **K. E. Guthe.* Fibers resembling fused quartz in their elastic properties. P.R. 18. 256.

Siehe auch 609; 610.

Thermoelastizität.

899. **A. Wassmuth.* Über die Bestimmung der thermischen Änderungen

der Elastizitätskonstanten isotroper Körper aus den Temperaturänderungen bei der Drillung und der gleichförmigen Biegung. B.F. 555.

400. *A. Wassmuth.* Über die bei der Biegung von Stahlstäben beobachtete Abkühlung. A.P.L. (4) 13. 182.

401. **C. Cario.* Wärmedehnungen in den Kesselwandungen. M.P.D.B. 24. 127. — *G. Leipold* 190. — *E. Fränkel* 502.

Elektroelastizität.

402. *W. Sutherland.* The electric origin of rigidity and consequences. P.M. (6) 7. 417.

403. **G. P. Grimaldi* e *G. Accolla.* Influenza dell' onde elettriche e del magnetismo sull' isteresi elastica del ferro. N.C.P. (5) 7. 204.

Magnetoelastizität.

404. *H. Gerdien.* Über den Einfluß der Torsion auf das magnetische Moment zirkular magnetisierter Ni- und Fe-drähte. A.P.L. (4) 14. 51.

405. **H. Nagaoka.* Mechanische Analogien der Beziehungen zwischen Torsion und Magnetismus. B.F. 916.

406. *C. Chree.* The bending of magnetometer deflexion-bars. P.M. (6) 7. 39.

407. *W. E. Williams.* The influence of stress and of temperature on the magnetic change of resistance in iron, nickel and nickel-steel. P.M. (6) 6. 693.

Siehe auch 403; 906.

Festigkeitslehre.

408. **Diegel.* Der Einfluß von Ungleichmäßigkeiten im Querschnitte des prismatischen Teiles eines Probestabes auf die Ergebnisse der Zugprüfung. M.F.I. 13. 59.

409. **P. Reusch.* Einfluß der Form und Herstellungsweise von gußeisernen Probestäben auf deren Festigkeit. S.U.E. 23. 1185.

410. **K. G. Mehldahl.* Einfluß der Stegdicke auf die Tragfähigkeit eines [-balkens. J.S.G.B. 4. 406.

411. **J. H. Bauer.* Die Festigkeit der Zylinder von Gußgasmotoren. G.M.T. 3. 85; 109.

412. **R. Wagner.* Die Festigkeit der Zylinderköpfe von Großgasmotoren. G.M.T. 3. 2; 34; 45; 57.

413. **F. Wüst* u. *P. Goerens.* Zusammensetzung und Festigkeitseigenschaften des Dampfzylindergusses. S.U.E. 23. 1072.

414. **R. Stribeck.* Der Warmzerreißversuch von langer Dauer. Das Verhalten von Kupfer. M.F.I. 13. 81.

415. **J. L. Hall.* Effect of superheated steam upon the tensile strength of alloys. M.G. 6. 3.

416. **G. Lung.* Zur Festigkeit des Schornsteinmörtels. M.P.D.B. 25. 195; 216; 234; 253; 268; 286; 306; 323; 342.

417. *A. Pourcel.* Sur les propriétés du betton fretté. C.R. 138. 72.

418. — Estudios experimentales sobre el cemento armado. A.S.A. 56. 75.

419. **W. P. Bradley* and *A. W. Bourne.* The resistance of glass tubing to bursting pressure. J.P.C. 8. 37.

420. *A. Pérot* et *H. M. Lévy.* Sur la fragilité des métaux. C.R. 138. 474.

421. *H. Sellentin.* Der Einfluß der Stirnwände eines Kessels auf die Festigkeit der Mantelbleche. Z.S. 49. 450.

422. **Jahr.* Über die statische Berechnung von Fabrikschornsteinen. K.B. 19. 582; 607; 635.

Siehe auch 185.

Kristallbildung.

423. **P. Gaubert.* Contribution de la formation et de l'accroissement des cristaux. B.S.M.F. 25. 223.

Siehe auch 1113.

Kristallstruktur.

424. **R. Wegscheider.* Über die Größe der Kristallmoleküle. B.F. 367.

425. **W. H. Wahl.* The Goldschmidt theory of harmony. J.F.I. 156. 225. — *J. W. Richards* 230.

Siehe auch 897; 898.

Kristalloptik.

426. **E. Kobald.* Über die allgemeinen Differentialgleichungen der Kristalloptik nach der elektromagnetischen Theorie des Lichtes. B.F. 422.

427. *W. Voigt.* Zur Theorie des Lichtes für aktive Kristalle. N.G.G. 1903. 155.

428. *C. Chabrier.* Sur la fonction qui représente le grossissement des objets vus à travers un cône de cristal. C.R. 138. 349.

429. **A. W. Conway.* The propagation of light in a uniaxal crystal P.L.M.S. 35. 220.

430. **E. G. A. ten Siethoff.* Beitrag zur Kristalluntersuchung im konvergenten polarisierten Lichte. Z.F.M. 1903. 657.

431. *W. Voigt.* Über spezifische op-

tische Eigenschaften hemimorpher Kristalle. N.G.G. 1903. 186.

432. *O. Bütschli.* Beobachtungen über eigentümliche Sprungsysteme von großer geometrischer Regelmäßigkeit. V.G.H. (2) 7. 653.

433. * *L. Graetz.* Über die elektrische Dispersion der Kristalle. B.F. 477.

Ätherschwingungen.

434. * *N. N. Siller.* Zametka o zakone Dopplera. (Bemerkung über das Dopplersche Gesetz.) R.P.W. 2. 183.

Ätherwellen.

435. *A. E. H. Love.* The propagation of wave motion in an isotropic elastic solid medium. P.L.M.S. (2) 1. 291.

436. * *A. E. H. Love.* Wave-motions with discontinuities at wave-fronts; P.L.M.S. (2) 1. 37.

Siehe auch 274.

Strahlen.

437. * *R. Blondlot.* Recherches sur les rayons *n*. J.P. (4) 3. 121; 257.

438. * *N. Hesehus.* Thermische Wirkungen der Radiumstrahlen (russ.). J.R.P.C.G. 35. 525.

439. * *F. Sanford.* On an undescribed form of radiation. P.R. 17. 441.

Siehe auch 336; 450.

Röntgenstrahlen.

440. *W. Wien.* Über die Energie der Röntgenstrahlen. P.Z. 5. 128.

441. *P. Hertz.* Über Energie und Impuls der Röntgenstrahlen. P.Z. 4. 848.

442. *C. G. Barkla.* Energy of secondary Roentgen radiation. P.M. (6) 7. 543.

443. *H. Haga, P. G. Tiddens* et *C. H. Wind.* La diffraction des rayons de Roentgen. A.N. (2) 8. 412.

444. * *P. Cardani.* Sulla dispersione elettrica dei raggi X ottenuti mediante le scariche dei condensatori. B.F. 501.

445. * *J. Zeleny.* On electrifications produced by gases that have been exposed to Roentgen rays. P.R. 17. 355.

446. * *A. Righi.* Sulle cariche elettriche generate dai raggi *x* sui metalli nel vuoto. N.C.P. (5) 6. 31; M.I.B. (5) 10. 595.

Siehe auch 447; 901.

Kathodenstrahlen.

447. * *J. Dronke.* Kathoden- und Röntgenstrahlen. N.F.W. 1. 189.

448. * *F. Neesen.* Über die Frage der Beeinflussung von Kathodenstrahlen. V.P.G. 5. 296.

449. * *F. Neesen.* Über die Frage der gegenseitigen Einwirkung von Kathodenstrahlen. B.F. 742.

450. *F. Leininger.* On the relation of the electric charges transported by cathode and canal rays to the exciting current. P.M. (6) 7. 180.

451. * *E. Warburg.* Über den Durchgang der Kathodenstrahlen durch Metalle. V.P.G. 6. 9.

Siehe auch 576; 579.

Becquerelstrahlen.

452. * *A. Korolkow.* Die Ablenkung der Becquerelstrahlen im Magnetfelde (russ.). J.R.P.C.G. 35. 453.

Radioaktivität.

453. * *E. A. Partridge* and *R. H. Bradbury.* Radio-activity. J.F.I. 156. 321.

454. * *P. Curie.* Revue de recherches récentes sur la radioactivité. J.C.P. 1. 408.

455. *P. Curie.* Neuere Untersuchungen über Radioaktivität. P.Z. 5. 281.

456. *S. Curie.* Recherches sur les substances radioactives. A.C.P. (7) 30. 289.

457. *R. J. Strutt.* Energy emitted by radio-active bodies. N. 68. 6.

458. *J. A. Mc Clelland.* On the emanation given off by Radium. P.M. (6) 7. 355.

459. *P. Curie* et *J. Danne.* Sur la disparition de la radioactivité induite par le radium sur les corps solides. C.R. 138. 683.

460. * *H. Becquerel.* Recherches sur une propriété nouvelle de la matière, activité radiante spontanée ou radioactivité de la matière. M.A.P. 46. 1.

461. *J. Elster* u. *H. Geitel.* Über die radioaktive Substanz, deren Emanation in der Bodenluft und der Atmosphäre enthalten ist. P.Z. 5. 11.

462. * *N. Beketow.* Die chemische Energie im Zusammenhange mit den Erscheinungen, welche das Radium darstellt (russ.). J.R.P.C.G. 35. 189.

463. * *H. Benndorf* u. *V. Konrad.* Über Radiumkollektoren. B.F. 693.

Siehe auch 257; 364; 438; 567; 568; 633; 653.

Kapillarität.

464. *K. Schütt.* Über Zähigkeit und Festigkeit in der Oberfläche von Flüssigkeiten und über flüssige Lamellen. A.P.L. (4) 13. 713.

465. **L. Grunmach.* Über den Einfluß der Zähigkeit auf die Kapillaritätskonstanten bei Essigsäure-Wassermischungen. B.F. 460.

466. *B. Kučera.* Beitrag zur Kalibrierung sehr enger Kapillaren und zur Messung der Oberflächenspannung mittels der Tropfenwägung (tchech.). M.A. T.P. 1903 Nr. 40.

467. **H. Devaux.* Sur l'épaisseur critique des solides et des liquides reduits en lames très minces. J.P. (4) 3. 450.

468. **G. J. Parks.* On the thickness of the liquid film formed by condensation at the surface of a solid. P.P.S.L. 18. 410.

469. *A. Ponsot.* Les facteurs de l'équilibre; pression capillaire et pesanteur. C.R. 138. 803.

470. **S. Skinner.* On the occurrence of cavitation in lubrication. P.P.S.L. 19. 73.

471. **L. W. Winkler.* Die Meniskuskorrektionswerte des Hg und des Wassers. Z.F.A.C. 16. 718.

472. **H. W. Hillger.* Eine Studie an Seifenlösungen. J.A.C.S. 25. 524.

473. *E. Varenne* et *L. Godefroy.* Sur les applications du chronostiloscope E. Varenne. C.R. 138. 79.

Siehe auch 158; 1200.

Oberflächenspannung.

474. **I. Homfray* et *P, A. Guye.* Tensions superficielles et complexité moléculaire des corps actifs homologues. J.C.P. 1. 505.

475. **A. Roujou.* De la tension des surfaces chez quelques solides. R.S.B. 14. 45.

476. *G. Guglielmo.* Sulla determinazione della tensione superficiale dei liquidi coi metodi delle goccie cadenti e delle bolle gazose. R.A.L.R. (5) 12B. 462.

477. **D. Pekár.* Oldatok molekuláris felületienergiájáról (Über die Oberflächenenergie der Lösungen). M.T.E. 19. 210.

Siehe auch 466.

Diffusion.

478. *S. Nakamura.* On the diffusion of liquids. J.U.T. 19 Nr. 8.

479. *J. Thovert.* Relation entre la diffusion et la viscosité. C.R. 138. 481.

480. *F. Heimbrodt.* Diffusionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Konzentration, bestimmt mit Hilfe gekrümmter Lichtstrahlen. A.P.L. (4) 13. 1028.

481. **H. G. Morse* and *G. W. Pierce.* Diffusion and supersaturation in gelatine. P.R. 17. 129.

Siehe auch 688.

Osmose.

482. *A. Guillemin.* Sur l'osmose. C.R. 138. 38; 802. — *A. Ponsot* 356.

483. **M. Smoluchowski.* Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs. B.I.C. 1903. 182.

484. **O. E. Schiötz.* Über die Abhängigkeit des osmotischen Druckes und der Dampfspannung von dem Drucke. B.F. 618.

Thermokapillarität.

485. *A. Bestelmeyer.* Die Abhängigkeit der inneren Reibung des Stickstoffs von der Temperatur. A.P.L. (4) 13. 944.

Elektrokapillarität.

486. **J. Billitzer.* Zur Theorie der kapillarelektrischen Erscheinungen. A. A.W. 1903. 301; 1904. 91.

487. *F. Krüger.* Zur Theorie der Elektrokapillarität und der Tropfelektroden. N.G.G. 1904. 33.

488. **G. Vanni.* Sopra un' applicazione dell' elettrometro capillare di Lippmann alla misura della frequenza di una corrente alternata. B.S.N.N 16—17.

Siehe auch 688.

Akustik.

489. **A. G. Webster.* On the mechanical efficiency of the production of sound. B.F. 866.

490. **T. C. Porter.* On a method of mechanically reinforcing sounds P.P. S.L. 19. 31.

491. **G. Zambian.* Le figure di Lissajous nell' estetica dei suoni. R. M.I. 10.

492. **L. U. H. C. Werndly.* Äquisonore Flächen rings um eine ertönende Stimmgabel. A.F.G.P. 1904. 297.

493. **G. Jäger.* Zur Theorie der Exner-Pollakschen Versuche. A.A.W. 1904. 39.

494. **R. v. Sterneck.* Beweis eines in der Akustik verwendbaren Satzes. B.F. 687.

495. *R. Hartmann-Kempf.* Über den Resonanzverlauf erzwungener Schwingungen. A.P.L. (4) 13. 271.

496. **A. H. Taylor.* Resonance in aërial systems. P.R. 18. 230.

497. *C. Krediet.* Sur un cas de propagation de vibrations sonores, infinilment petites. N.A.W. (2) 6. 81.

498. **R. Malagoli.* Composizione parallela del moto vibratorio col moto progressivo applicata all' esame dei corpi sonori. N.C.P. (5) 6. 193.

499. *P. Ostmann.* Über Schwingungszahlen und Schwellenwerte. S. G.M. 1903. 11.

500. **A. Florentino.* Proprietà microfoniche dei getti gassosi. N.C.P. (5) 5. 391.

501. **Q. Majorana.* Su di una proprietà acustica delle fiamme manometriche. N.C.P. (5) 7. 35.

502. **R. Wachsmuth.* Schneidentöne und Labialpfeifen. V.P.G. 5. 299.

503. *R. Hartmann-Kempf.* Über den Einfluß der Amplitude auf die Tonhöhe und das Dekrement von Stimmgabeln und zungenförmigen Stahlfederbändern. A.P.L. (4) 13. 124.

504. *P. Ostmann.* Über die Anwendung des objektiven Hörmaßes. P.Z. 4. 764.

Elektroakustik.

505. **S. Maisel.* Über den singenden Voltabogen (russ.). E.P. 1903. 167.

Magnetoakustik.

506. **S. Meyer.* Über Magnetisierung durch Tonerregung. B.F. 68.

507. **A.* u. *L. Weinhold.* Ein akustisches Analogon zum Zeemannschen Phänomen. Z. P. 17. 92.

Akustische Messungen.

508. *F. A. Schulze.* Über die Schallgeschwindigkeit in engen Röhren. S. G.M. 1903. 89; A.P.L. (4) 13. 1060.

509. **H. Lamb.* On group velocity. P.L.M.S. (2) 1. 473.

510. **W. Altberg.* Über den Druck der Schallwellen und die absolute Messung der Schallstärke (russ.). J.R.P.C.G. 35. 459.

511. **R. Wachsmuth.* Akustische Bestimmung der Dichte von Gasen und Dämpfen. B.F. 923.

Mathematische Musik.

512. **P. Czermak.* Zur Demonstration der Klanganalyse. B.F. 80.

513. **J. W. Richards.* The Goldschmidt theory of harmony. J.F.I. 156. 301.

514. *G. Eneström.* Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli. B.M. (3) 4. 344.

Geometrische Optik.

515. **R. Halben.* Gleichzeitige Demonstration von Totalreflexion und Lichtstrahlenkrümmung. Z.P. 16. 281.

516. **Muirhead.* Divergence in optics. P.P.S.G. 34

517. **A. Gleichen.* Über die optisch bemerkenswerten Punkte der Kugelfläche, insbesondere über die komafreien Punkte. D.M. 12. 85; 98.

518. **L. Matthiessen.* Aplanatische Brechung und Spiegelung in F_2. A.F. G.P. 91. 295.

519. **Patrizi.* Sistemi diottrici e catottrici di projezione. Pol.M. 1903 Mai—Juli.

520. *S. D. Chalmers.* The theory of symmetrical optical objectives. P.R.S.L. 72. 267.

521. **F. Hasenöhrl.* Über die Reziprozität des Strahlenganges in bewegten Körpern. Thermodynamische Ableitung des Fresnelschen Fortführungskoeffizienten. A.A.W. 1904. 135.

Siehe auch 480.

Katoptrik.

522. **C. K. Edmonds.* The metallic reflection of selenium. P.R. 18. 193.

Siehe auch 600; 646; 1211.

Dioptrik.

523. *A. Emch.* The theory of optical squares. M.M.F. 10. 32.

524. *C. Maltézos.* L'équation du prisme optique. E.M. 5. 454.

525. *T. L. Bennett.* Minimum deviation through a prisma. P.M. (6) 6. 697.

526. **A. Whitwell.* On refraction at a cylindrical surface. P.P.S.L. 18. 488.

527. **T. Dokulid.* Die Bestimmung der optischen Konstanten eines zentrierten sphärischen Systems mit dem Präzisionsfokometer. D.M. 12. 37. — *A. Schell* S.A.W. 112. 1057.

528. **N. Jadanza.* Alcuni sistemi diottrici speciali ed una nuova forma di telobbiettivo. M.A.T. (2) 53. 72.

529. *S. Trocevič.* Nekotoryja zamečanija po povodu vyčislenija obektivov i voobšče optičeskich sistem (Einige Bemerkungen über die Grundlage der Berechnung der Objektive und der optischen Systeme überhaupt). M.P.O. 30. 226.

530. **G. W. Walker.* On the theory of refraction in gases. P.R.S.L. 72. 24.

Siehe auch 428; 647; 1208; 1209.

Linsen.

581. **J. D. Everett.* On skew refraction through a lens. P.R.S.L. 71. 509.
582. **T. H. Blakesley.* Exhibition of a lens. P.P.SL. 18. 423.
583. **T. H. Blakesley.* Single piece lenses. P.P.S.L. 18. 591.
584. **C. Féry.* Méthode nouvelle pour la détermination des constantes des lentilles. J.P. (4) 2. 755.
585. **T. R. Dallmeyer.* Über telephotographische Linsen und ein neues System (Adon) zur Erzielung von Vergrößerung ohne Geschwindigkeitsverlust. D.M. 11. 205.
586. **A. Köhler.* Lichtstarkes Sammellinsensystem für Mikroprojektion. Z.W.M. 19. 1417.

Brennlinien.

587. *T. J. I' A. Bromwich.* The caustic by reflexion of a circle. A.J.M. 26. 33.

Physikalische Optik.

538. **F. Becke.* Optische Untersuchungsmethoden. A.A.W. 1903. 268.
539. *P. Drude.* Zur Theorie des Lichtes für aktive Körper. N.G.G. 1904. 1.
540. **W. Wien.* Theorie eines bewegten leuchtenden Punktes. B.F. 174.
541. *F. Pockels.* Zur Frage der „optischen Resonanz" fein zerteilter Metalle. P.Z. 5. 152.
542. **I. I. Kossonogoff.* Optische Resonanz als Ursache der selektiven Reflexion und Absorption des Lichts. B.U.K. 1904b No. 2, 4.
543. *I. I. Kossonogov.* Die optische Resonanz (russ). B.U.K.C. 6.
544. *J. Kossonogoff.* Über mögliche Größe der optischen Resonatoren. B.F. 882.
545. *F. Kirchner.* Über die optischen Eigenschaften entwickelter Lippmannscher Emulsionen. A.P.L. (4) 13. 239.
546. **A. W. Roberts.* A consideration of close binary systemes in relation to light variation. R.S.A.A. 1. 110.
547. *A. Schuster.* A simple explanation of Talbots bands. P.M. (6) 7. 1.

Siehe auch 734.

Lichtwellen.

548. **G. Sagnac.* Lois de la propagation anomale des ondes au voisinage d'un foyer. B.F. 528.
549. **E. Mathy.* Entrainement partiel des ondes lumineuses; termes complémentaires à ajouter aux équations de Hertz pour expliquer ce phénomène. J.P. (4) 3. 316.
550. **H. O. G. Ellinger.* Bestimmung der Wellenlänge des Lichtes. Z.P. 16. 280.
551. **J. Hartmann.* Eine Revision des Rowlandschen Wellenlängensystems. Z.W.P. 1. 215.
552. **J. Hartmann.* A revision of Rowlands system of wave-lengths. A.J.C. 18. 167.
553. **L. Bell.* The Perot-Fabry corrections of Rowlands wave-lengths. A.J.C. 18. 191.
554. *C. Fabry* and *A. Perot.* On the corrections to Rowlands wave-lengths. A.J.C. 19. 119.
555. **R. W. Wood.* The electrical resonance of metal particles for lightwaves. III. P.P.L.S. 18. 515.

Siehe auch 606.

Dispersion.

556. *G. Sagnac.* De la propagation anomale des ondes. J.P. (4) 2. 721.
557. *O. Lummer* u. *E. Pringsheim.* Demonstration der anomalen Dispersion in Gasen. V.P.G. 6. 151.
558. **H. Ebert.* Wirkung der anomalen Dispersion von Metalldämpfen. B.F. 448.
559. *R. W. Wood.* The anomalous dispersion, absorption and surface colour of nitroso-di methyl-aniline. P.A.Bo. 39. 51.

Siehe auch 433; 444; 640; 991; 993; 995; 1214.

Farben.

560. **E. v. Oppolzer.* Grundzüge einer Farbentheorie. Z.P.P. 33. 325.
561. *O. v. u. z. Aufsess.* Die Farbe der Seen. A.P.L. (4) 13. 678.

Siehe auch 559; 650; 651; 1217; 1258.

Spektrum.

562. *R. A. Houstoun.* Some spectroscopic notes. P.M. (6) 7. 456.
563. **A. Fowler* and *H. Shaw.* On formulae for spectrum series. A.J.C. 18. 21.
564. *T. H. Havelock.* On the continnuous spectrum. P.C.P.S. 12. 175.
565. *J. Barnes.* On the analysis of bright spectrum liees. P.M. (6) 7. 485.
566. **J. Fényi.* Michelsons theory of the displacement of spectral lines. A.J.C. 19. 70.
567. *H. Nagaoka.* Kinetics of a system of particles illustrating the line and the

band spectrum and the phenomena of radioactivity. P.M.(6) 7. 445.

568. *H. Nagaoka, G. A. Schott.* On dynamical system illustrating the spectrum lines and the phenomena of radioactivity. N. 69. 392; 487.

569. *H. Deslandres.* Loi générale de distribution des raies dans les spectres de bandes. Vérification précise avec le 2. groupe de bandes de l'azote. C.R. 138. 317.

570. **K. Ångström.* Energy in the visible spectrum of the Hefner standard. P.R. 17. 302.

571. *A. Schuster.* A simple explanation of Talbots bands. P.M. (6) 7. 1.

572. **E. Wiedemann.* Über Verbindungsspectren. B.F. 826.

573. **H. Konen.* Neuere Arbeiten über Funkenspektra. Z.W.P. 1. 237.

Siehe auch 584; 596; 991; 1222.

Ultrarote Strahlen.

574. *M. Iklé.* Über das ultrarote Absorptionsspektrum einiger organischer Flüssigkeiten. P.Z. 5. 271.

Ultraviolette Strahlen.

575. **R. Magini.* Dipendenza degli spettri ultravioletti di assorbimento dalla configurazione moleculare. N.C.P. (5) 6. 62; 343.

Siehe auch 595; 1223.

Absorption des Lichtes.

576. **P. Lenard.* Über die Absorption von Kathodenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit. N.R. 18. 661.

577. *F. Grünbaum.* Absorptionsmessungen an wässrigen Farbstofflösungen. A.P.L. (4) 12. 1004.

Siehe auch 542; 559; 574; 575; 601; 632.

Lumineszenz.

578. **E. L. Nichols* and *E. Merritt.* Studies in luminescence. P.R. 18. 355; 403.

Siehe auch 619; 620.

Phosphoreszenz.

579. **A. Wehnelt.* Über die Phosphoreszenzerzeugung durch langsame Kathodenstrahlen. V.P.G. 5. 423.

Siehe auch 581.

Fluoreszenz.

580. *R. Meyer.* Fluoreszenz und mechanische Konstitution. D.V.N. 75. 78; C.B. 36. 2967; N.R. 19. 171.

581. **W. S. Andrews.* Notes on fluorescence and phosphorescence. S. (2) 19. 435.

Interferenz.

582. *J. Classen.* Fresnelsche Interferenzen an 2 planparallelen Platten als Vorlesungsversuch. D.V.N. 75. 40; V.P.G. 5. 297.

583. *M. Laue.* Über die Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten. A.P.L. (4) 13. 163.

584. **A. Perot* et *C. Fabry.* Sur la séparation des raies spectrales très voisines à propos d'un travail récent de M. M. Lummer et Gehrcke. J.P. (4) 3. 28.

585. *W. Feußner.* Über ein Verfahren zur Dickenbestimmung keilförmiger Schichten durch Interferenzstreifen. S. G.M. 1903. 76.

586. *A. Perot* et *C. Fabry.* Sur la mesure optique de la différence de deux épaisseurs. C.R. 138. 676.

587. *Mesnager.* Sur un procédé pour la comparaison des épaisseurs. C.R. 138. 76.

588. *J. Macé de Lépinary* et *H. Buisson.* Sur une nouvelle méthode de mesure des épaisseurs et des indices. C.R. 137. 1038.

Siehe auch 591; 598.

Diffraktion.

589. **F. Maey.* Die Theorie der Beugungserscheinungen des Lichtes nach Thomas Young, ihre Geschichte und Verwertung zu einer schulgemäßen Behandlung der Lichtbeugung. Z.P. 17. 10.

590. **P. H. Jackson.* On the diffraction of light produced by an opaque prisme of finite angle. P.L.M.S. (2) 1. 393.

591. *M. Laue.* Über eine Beugungserscheinung, welche bei den Interferenzen an planparallelen Platten auftritt. Z. S. 50. 280.

592. **F. Balsamo.* Su i fenomeni di diffrazione di alcuni corpi organizzati in rapporto alle esperienze di Abbe. B.S. N.N. 16—17.

593. **C. Barus.* Periodic colour distributions in relation to the coronas of cloudy condensation with a revision of coronas. B.F. 204.

594. *G. Quincke.* Bildung von Schaumwänden, Beugungsgittern und Perlmutterfarben durch Belichtung von Leimchromat, Kieselsäure, Eiweiß etc. A.P.L. (4) 13. 217.

595. **R. Magini.* Sull' uso del reticolo di diffrazione nello studio del spettro ultravioletto. P.I.F.P. 6. 207.

596. *T. Lyman.* An explanation of the false spectra from diffraction gratings. P.A.Bo. 39. 39.

597. * *A. v. Obermayer.* Über sogenannte Heiligenscheine und andere gleichen Ursachen entspringende Erscheinungen. B.F. 299.

Siehe auch 443.

Polarisation des Lichtes.

598. * *E. Mach.* Objektive Darstellung der Interferenz des polarisierten Lichtes. B.F. 441.

599. * *D. B. Brace.* A half-shade elliptical polarizer and compensator. P. R. 18. 70.

600. *E. Lischner.* Über die elliptische Polarisation des Lichtes bei der Reflexion an Lösungen von Körpern mit Oberflächenfarben. A P.L. (4) 12. 964.

601. *F. J. Bates.* Über Versuchsfehler beim Messen der Rotationspolarisation absorbierender Substanzen. A.P.L. (4) 12. 1080.

602. * *J. Macé de Lépinay* et *H. Buisson.* Sur les changements de phase par réflexion normale dans le quartz sur l'argent. J.P. (4) 2. 881.

Siehe auch 430; 646; 655; 1216.

Drehung der Polarisationsebene.

603. * *A. Panormoff.* Über die Bestimmung der spezifischen Drehung nach der Methode von Kanonnikoff (russ). J. R.P.C.G. 35. 678.

604. *E. Roux.* Sur la polyrotation des sucres. A.C.P. (7) 30. 422; J.P. (4) 2. 903.

Siehe auch 627—630.

Doppelbrechung.

605. * *F. Záviška.* Verifikation der Fresnelschen Gesetze der Doppelbrechung bei zweiachsigen Kristallen. (tschech.) M.A.T.P. 1902 No. 26.

606. * *J. Grünwald.* Über die Ausbreitung der Wellenbewegungen in optisch 2-achsigen elastischen Medien. B.F. 518.

607. *D. B. Brace.* On double refraction in matter moving through the Aether. P. M. (6) 7. 317; B.F. 576.

608. *L. N. G. Filon.* On the variation with the wave-length of the double refraction in strained glass. P.C.P.S. 12. 313.

609. *A. Leick.* Über künstliche Doppelbrechung und Elastizität von Gelatineplatten. A.P.L. (4) 14. 139.

610. * *W. König.* Einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen künstlicher Doppelbrechung und Elastizität. B.F. 832.

Siehe auch 186; 288; 397; 631.

Brechungsindex.

611. *W. Kaiser.* Über die Beziehungen zwischen Druck und Brechungsexponent der Gase bei Drucken unterhalb einer Atmosphäre. A.P.L. (4) 13. 210.

612. *L. Magri.* Relazione fra l'indice di rifrazione et la densità de l'aria. R. A.L.R. (5) 13 A 473; N.C.P. (5) 7. 81.

Siehe auch 1215.

Thermooptik.

Siehe 521; 645.

Elektrooptik.

613. * *I. Borgmann.* Licht und Elektrizität. P. 14. 348; 362.

614. * *J. Dronke.* Licht und Elektrizität. N.F.W. 2. 77; 83.

615. *E. Biša* u. *R. Svinžedau.* Aktinoelektričeski javlenija (Über die aktinoelektrischen Erscheinungen). R.P.W. 2. 293.

616. *H. Rubens.* Die optischen und elektrischen Eigenschaften der Metalle. P.Z. 4. 727.

617. *E. Hagen* and *H. Rubens.* On some relations between the optical and the electrical qualities of metals. P.M. (6) 7. 157.

618. * *A. Bartole.* Su la trasformazione in correnti ellettriche delle radiazioni incidenti sopra una superficie riflettente in movimento. N.C.P. (5) 6. 240.

619. *J. Borgmann.* Ein besonderer Fall des Leuchtens von verdünntem Gase in einem breiten Glasrohr. B.F. 76.

620. * *E. R. Drew.* The luminous efficiency of vacuum tube radiation. P.R. 17. 321.

Siehe auch 433; 444.

Elektrisches Licht.

621. * *C. O. Steinmetz.* The mercury arc. E.W. 41. 316.

622. * *A. Larsen.* Die Abhängigkeit des elektrischen Bogenlichtes von der Stromstärke und der Spannung. M.F.L. 2. 118.

623. * *W. B. v. Czudnochowski.* Über den elektrischen Lichtbogen zwischen Leitern 2. Klasse. P.Z. 5. 99.

624. *W. Hallwachs.* Über die Strahlung des Lichtbogens. A.P.L. (4) 13. 38.

Siehe auch 505.

Magnetoptik.

625. * *C. Gutton.* Action des champs magnétiques sur les sources lumineuses peu intenses. J.P. (4) 3. 341.

626. **J. Mills.* On the velocity of light in a magnetic field. P.R. 18. 65.

627. **A. Borel.* Sur la polarisation rotatoire magnétique du quartz. A.S.G. (4) 16. 24; 157.

628. **L. H. Siertsema.* Magnetische Drehung der Polarisationsebene in verflüssigten Gasen unter athmosphärischem Druck. C.P.L. 90.

629. **L. H. Siertsema.* Magnetische Drehung der Polarisationsebene in verflüssigten Gasen unter atmosphärischem Druck. B.F. 780.

630. **O. M. Corbino.* La rotazione magnetica del piano di polarizzazione nell' interno di una riga d'assorbimento. N. C.P. (5) 6. 55.

631. **A. W. Ewell.* Magnetic double refraction. P.R. 17. 292.

632. **O. M. Corbino.* Sull' ineguale assorbimento delle vibrazioni circolari inverse per il passagio attraverso a un vapore incandescente in un campo magnetico. N.C.P. (5) 6. 58.

633. *C. Runge* u. *J. Precht.* Über die magnetische Zerlegung der Radiumlinien. S.A.B. 1904. 417.

Siehe auch 452.

Zeemansches Phänomen.

634. **G. Jäger.* Über das Zeeman Phänomen. V.V.F.U.W. 8. 154.

635. **P. A. Zilov.* Javlenia Zeemana (Zeemannsches Phänomen). R.P.W. 2. 284.

636. **G. Jäger.* Das Zeemann-Phänomen. S.V.N.W. 43.

Siehe auch 507.

Elektromagnetische Lichttheorie.

637. **P. A. Zilov.* Elektromagnitnaja teorija sveta (Elektromagnetische Lichttheorie). R.P.W. 2. 60.

638. *A. Garbasso.* Teoria elettromagnetica dell' emissione della luce. M.A. T. (2) 53. 127.

639. *H. A. Lorentz.* Elektromagnetische verschijnselen in een stelsel dat zich met willekeurige snelheid kleiner dan die van het licht beweegt. C.A.A. 12. 986.

640. *M. Planck.* Über die Extinktion des Lichtes in einem optisch homogenen Medium von normaler Dispersion. S.A.B. 1904. 740.

Siehe auch 426.

Lichtgeschwindigkeit.

641. **A. Cornu.* Skorost sveta (Über die Lichtgeschwindigkeit). R.P.W. 2. 140.

642. **T. E. Doubt.* The effect of the intensity upon the velocity of light. P. R. 18. 129.

Siehe auch 639; 866.

Photometrie.

643. **C. Camichael.* Sur la spectrophotométrie photographique. J.P. (4) 2. 899.

644. **C. Cesari* e *C. Manicardi.* Ricerche di fotometria fotografica. R.T. E.B. 1901. 69.

645. *E. Rasch.* Die gesetzmäßige Abhängigkeit der photometrischen Gesamthelligkeit von der Temperatur leuchtender Körper. A.P.L. (4) 14. 193.

646. **F. Záviška.* Über die Polarisation von Grenzlinien der Totalreflexion (tschech). M.A.T.P. 1903. No. 15.

Siehe auch 996; 1221—23.

Physiologische Optik.

647. **L. Mathiessen.* Hornhautrefraktion. A.F.G.P. 91. 295.

648. *F. Hillebrand.* Theorie der scheinbaren Größe bei binokularem Sehen. D.A.W. 72. 255.

649. *A. Broca* et *D. Sulzer.* La sensation lumineuse en fonction du temps pour les lumières coloriées. Discussion des résultats. C.R. 137. 1046.

650. **E. v. Oppolzer.* Grundzüge einer Farbentheorie II. Z.P.P. 33. 321.

651. **F. Allen.* The hypotheses of colour vision. P.R. 17. 151.

Siehe auch 1230.

Wärmelehre.

652. *E. Rogovsky.* Sur la différence de la température des corps en contact. C.R. 137. 1244.

653. *E. Rutherford* and *H. T. Barnes.* Heating effect of the radium emanation. P.M. (6) 7. 202.

654. *J. Boussinesq.* Sur l'unicité de la solution simple fondamentale et de l'expression asymptotique des températures dans le problème du refroidissement. C.R. 138. 402.

655. **H. du Bois* u. *H. Rubens.* Über Polarisation langwelliger Wärmestrahlen durch Drahtgitter. V.P.G. 6. 77.

656. **A. Böttcher.* Betrachtungen über den Einfluß der Wandungen auf die Wärmevorgänge in Wärmekraftmaschinen. G.M.T. 2. 1; 36; 58.

657. *J. Perry, J. D. Everett.* A useful empirical formula. N. 69. 102; 151.

Siehe auch 333; 400; 401.

Thermostatik.

658. *Rudzki.* Note sur un théorème de la statique de l'athmosphère. B.A. 21. 92.

Thermodynamik.

659. **N. N. Schiller.* Die Grundgesetze der Thermodynamik (russ.). B.U.K. 1903. c 7.

660. **R. H. Thurston.* Elementary graphics and geometry of thermodynamics. J.F.I. 151. 62; 124.

661. **L. Pfaundler.* Apparate zur Versinnlichung der kinetischen Wärmelehre. B.F. 71.

662. **J. Bing.* Über das Wesen der Wärme. N.F.W. 1. 6.

663. **P. Berkitz.* Zur Prüfung des 2. thermodynamischen Hauptsatzes. G. M.T. 2. 56; 114; 131.

664. **C. Runge.* Die thermodynamischen Beziehungen. B.F. 260.

665. **Gray.* Entropy. P.P.S.G. 34.

665a. **B. Weinstein.* Entropie und innere Reibung. B.F. 510.

666. **G. H. Bryan.* The law of degradation of energy as the fundamental principle of thermodynamics. B.F. 123.

667. **M. Planck.* Über die mechanische Bedeutung der Temperatur und der Entropie. B.F. 113.

668. *H. A. Bumstead.* On the variation of entropy as treated by Prof. Willard Gibbs. P.M. (6) 7. 8.

669. **M. Reinganum.* Über den von Wirkungssphären freien Raum in einer Flüssigkeit und über das Gesetz der relativen Dampfdruckerniedrigung. B.F. 876.

670. *J. D. van der Waals.* Het evenwicht van een vast lichaam met een fluïde phase, voornamelijk in de nabijheid van den kritischen toestand. C.A.A. 12. 439; 606.

671. *J. E. Verschaffelt.* Sur l'allure des isothermes et de la courbe limite en voisinage du point critique. A.N. (2) 9. 125.

672. **P. J. Beveridge.* Latent heats of fusion of metals. C.N. 88. 280.

673. *J. Perry.* Expansion curves 68. 548. — *A. Lodge* 599.

674. *B. A. Behrend, J. Perry.* Expansion curves. N. 69. 56.

675. **J. E. Trevor.* Note on thermodynamic surfaces. J.P.C. 8. 83.

676. **J. D. Everett.* On the comparison of vapour-temperatures at equal pressures. P.P.S.L. 18. 449.

677. *J. J. van Laar.* Over de mogelijke vormen der smeltlijn bij binaire mengsels van isomorphe stoffen. C.A.A. 12. 169; 494.

678. *J. J. van Laar.* De smeltlijnen van legeeringen. C.A.A. 12. 25.

679. **J. Pitsch.* Über den Zusammenhang der spezifischen Volumina einer Flüssigkeit und ihres Dampfes. A.A.W. 1904. 218.

680. **A. Grießmann.* Beitrag zur Frage der Erzeugungswärme des überhitzten Wasserdampfes und sein Verhalten in der Nähe der Kondensationsgrenze. M.F.I. 13. 1.

681. *H. A. Wilson.* On convection of heat. P.C.P.S. 12. 406.

682. **J. H. Jeans.* On the partition of energy in a system of loaded spheres. Q.J. 35. 113.

683. *G. Guglielmo.* Intorno ad un modo per agitare un liquido in un recipiente chiuso e ad una modificazione del termocalimetro. N.C.P. (5) 5. 408.

Siehe auch 316; 611; 612; 1114.

Mechanisches Wärmeäquivalent.

684. **G. Guglielmo.* Intorne ad un nuovo apparechio per la determinazione dell' equivalente meccanico della caloria e ad alcune modificazioni del calorimetro solare, del dilatimetro, del termometro e del psicrometro. N.C.P. (5) 5. 413.

Spezifische Wärme.

685. **J. J. van Laar.* Über die spezifische Wärme in flüssigem Zustande bei niedrigen Temperaturen. B.F. 316.

686. **J. H. van 't Hoff.* Einfluß der Änderung der spezifischen Wärme auf die Umwandlungstemperatur. B.F. 233.

687. **F. Streintz.* Die spezifische Wärme einiger Schwefelmetalle in ihrer Beziehung zum elektrischen Leitvermögen. B.F. 196.

Lösungen.

688. **F. Richarz.* Theorie verdünnter Lösungen ohne Benutzung des osmotischen Druckes. B.F. 706.

689. *J. J. Gatti.* Las soluciones diluídas. A.S.A. 56. 209.

690. *A. Smits.* Het beloop de oplosbaarheidskromme in hed gebied der kritische temperaturen van binaire mengsels. C.A.A. 12. 335; 659.

691. **V. Goldschmidt.* Zur Mechanik des Lösungsprozesses. Z.K.U. 38. 656.

692. **A. Jouniaux.* Sur la loi du déplacement de l'équilibre par des variations de pression. J.C.P. 1. 609.

693. **A. Korn* und *E. Strauß.* Über eine Beziehung zwischen dem Lösungs-

druck und. der Ionisationswärme der Metalle. B.F. 277.

694. **G. Timofejeff.* Über die Anwendbarkeit der Nernstschen Formel für ein Gemisch zweier Lösungsmittel (russ.). J.R.P.C.G. 35. 646.

695. *O. W. Richardson.* The solubility and diffusion in solution of dissociated gases. P.M. (6) 7. 266.

696. *C. Barus.* On the numbers of nuclei produced by shaking different liquids and allied results. A.J.S. (4) 17. 81.

697. *G. Bruni* e *A. Callegari.* Sul congelamento delle soluzioni dimorfi. R.A.L.R. (5) 13A. 481.

Siehe auch 347; 477; 716; 790.

Ausdehnung durch die Wärme.

698. **M. Thiesen.* Untersuchungen über die thermische Ausdehnung von festen und tropfbar flüssigen Körpern VII. A.P.T.R. 4. 1.

699. **K. Scheel.* Untersuchungen über die Wärmeausdehnung von festen und tropfbar flüssigen Körpern. A.P.T.R. 4. 33.

Zustandsgleichung.

700. *P. Kohnstam.* Over de toestandsvergelijking van van der Waals. C.A.A. 12. 948.

701. *H. Kamerlingh Onnes* en *C. Zakrzewski.* Bijdrage tot de kennis van het ψ-vlak van van der Waals. C.A.A. 12. 885.

702. *J.E. Verschaffelt.* Bijdrage tot de kennis van het ψ-vlak van van der Waals. C.A.A. 12. 69.

703. **J. E. Verschaffelt.* Contributions to the knowledge of van der Waals ψ-surface. C.P.L. Suppl. 6—7.

704. **A. Brandt.* Über den Zusammenhang der Formel von Trouton und der Gleichung von van der Waals (russ.). J.R.P.C.G. 35. 417.

705. *P. Kohnstam.* Over de vergelijkingen van Clausius en van der Waals voor de gemiddelde weglengte en het aantal botsingen. C.A.A. 12. 961.

706. *J. D. van der Waals.* L'équilibre d'un solide avec une phase fluide, principalement au voisinage de l'état critique. A.N. (2) 9. 158.

707. **J. D. van der Waals.* De verandering van der grootheid *b* der toestandsvergelijking als quasi-verkleining van het molekuul. B.F. 305.

708. **A. Brandt.* Über den Zusammenhang zwischen den Formeln von Stefan für den inneren Druck von Flüssigkeiten und der Gleichung von van der Waals (russ.). J.R.P.G.C. 35. 409.

709. *H. Happel.* Bemerkungen zum Gesetz der korrespondierenden Zustände und zur Zustandsgleichung. A.P.L. (4) 13. 340.

710. *J. D. van der Waals.* L'état liquide et l'équation d'état. A.N. (2) 9. 1; J.C.P. 2. 7.

711. *J. D. van der Waals.* De vloeistoftoestand en de toestandsvergelijking. C.A.A. 12. 82.

712. *P. Ehrenfest.* Zur Berechnung der Volumkorrektion in der Zustandsgleichung von van der Waals. S.A.W. 113. 1107.

713. **L. Maquenne.* Sur la détermination des points de fusion. B.S.C.P. (3) 31. 471.

714. **J. Siegmund.* Formel der Temperaturfunktion für die Druckkurve bei Verflüssigung von Kohlensäure. Z.K.I. 9. 139.

715. **E. H. Hall.* The van der Waals α in alcohol and in ether. B.F. 899.

Siehe auch 725.

Dampfspannung.

716. *J. I. Michailenko.* Über die Dampfspannung der Lösungen (russ.). B.U.K. 1903. b 7.

717. *F. A. H. Schreinemakers.* Quelques remarques sur les tensions de vapeur des mélanges ternaires. A.N. (2) 8. 395.

718. **K. Scheel.* Über die Spannkraft des Wasserdampfes unter 0°. V.P.G. 5. 287.

Siehe auch 484.

Kinetische Gastheorie.

719. *J. H. Jeans.* On the kinetic theory of gases. P.M. (6) 6. 720.

720. *S. H. Burbury.* Note on Mr. Jeans letter in P.M. (6) 6. P.M. (6) 7. 467. — *J. H. Jeans* 468.

721. **J. H. Jeans.* A general dynamical theorem and its application to the kinetic theory of gases. Q.J. 35. 209.

722. **F. Henrick.* A mechanical model to illustrate the gas laws. J.P.C. 8. 351.

723. *H. Nagaoka.* On two constants A_1 and A_2 in the kinetic theory of gases. N. 69. 79.

724. **N. Schiller.* Einige Bedenken gegen die Theorie der Entropievermehrung durch Diffusion der Gase bei einander gleichen Anfangsspannungen der letzteren. B.F. 350.

725. * *M. Smoluchowski.* Über Unregelmäßigkeiten in der Verteilung von Gasmolekülen und deren Einfluß auf Entropie und Zustandsgleichung. B.F. 626.

726. * *H. A. Lorentz.* Bemerkungen zum Virialtheorem. B.F. 721.

727. * *H. Kayser.* Zur Temperaturbestimmung strahlender Gase. B.F. 38.

Wärmeleitung.

728. * *G. Lauricella.* Sull' integrazione delle equazioni della propagazione del calore. M.S.It. (3) 12. 123.

729. * *E. Rogowski.* Über die Wärmeabgabe von Silberdrähten, welche unter Wasser durch einen elektrischen Strom erhitzt werden (russ.). J.R.P.C.G. 34. 424; 35. 105; 175.

Siehe auch 880.

Wärmestrahlung.

730. *E. Pringsheim.* Über die Strahlungsgesetze. A.Gr. (3) 7. 236.

731. * *E. Buckingham.* Note on the deduction of Stefan's law. P.R. 17. 277.

732. *J. Larmor.* On the intensity of the natural radiation from moving bodies and its mechanical radiation. P.M. (6) 7. 578.

733. * *F. Hasenöhrl.* Zur Theorie der Strahlung bewegter Körper. A.A.W. 1904. 226.

734. * *M. Abraham.* Der Lichtdruck auf einen bewegten Spiegel und das Gesetz der schwarzen Strahlung. B.F. 85.

735. * *G. W. Stewart.* The spectral energy curve of a black body at room temperature. P.R. 17. 476.

736. * *A. L. Day* and *C. E. van Orstrand.* The black body and the measurement of extreme temperature. A.J.C. 19. 1.

737. *D. Pacini.* Paragone fra le radiazioni attinica e termica del sole a Castelfranco V. nell' estate del 1903. R.A.L.R. (5) 12B. 370.

738. *E. Nichols* und *W. W. Coblentz.* Über Methoden zur Messung strahlender Energie. P.Z. 5. 14.

739. * *C. Féry.* L'application des lois de rayonnement à la pyrométrie. R.G.O. 14. 911.

Siehe auch 727; 1255.

Wärmemessung.

740. *H. Alt.* Über kalorimetrische Messungen an flüssigem Sauerstoff und flüssigem Stickstoff. A.P.L. (4) 13. 1010.

741. * *W. Jaeger* und *H. Steinwehr.* Erhöhung der kalorimetrischen Meßgenauigkeit durch Anwendung von Platinthermometern. V.P.G. 5. 353.

742. * —. Pyromètre à absorption. J.P. (4) 3. 32.

Siehe auch 736; 739; 1255.

Elektrizität.

Siehe 81; 250; 333; 334; 345; 346.

Elektrizitätserregung.

743. * *G. Martinelli.* Elettrizzazione di alcuni dielettrici amorfi mediante compressione. N.C.P. (5) 7. 212.

Siehe auch 445; 446.

Elektrostatik.

744. *W. Feußner.* Zwei elektrostatische Sätze. S.G.M. 1903. 65.

745. * *W. Feußner.* Über 2 Sätze der Elektrostatik. B.F. 537.

746. *M. Cantone.* Sulle recenti ricerche di elettrostrizione. R.I.L. (2) 37. 164; N.C.P. (5) 7. 126.

747. * *P. Duhem.* Sur la stabilité électrique d'un milieu homogène et illimité. B.F. 13.

748. * *V. Bjerknes.* Elektrostatische, magnetische und hydrodynamische Grenzflächenbedingungen. B.F. 455.

749. *T. Levi-Cività.* Sopra un problema di elettrostatica che interessa la costruzione dei cavi. R.A.L.R. (5) 13A. 375

750. * *P. H. Thomas.* Static discharges in electric circuits. J.F.I. 156. 433.

751. * *J. A. Fleming* and *W. C. Clinton.* On the measurement of small capacities and inductances. P.P.S.L. 18. 386.

752. *J. A. Fleming.* Note on the measurement of small inductances and capacities and on a standard of small inductance. P.M. (6) 7. 586.

753. *G. F. C. Searle.* On the calculation of capicities in terms of the coefficients of electrostatic induction. P.C.P.S. 12. 378.

754. *H. Gerdien.* Die Messung kleiner Kapazitäten mittels einer meßbar veränderlichen Normalkapazität. P.Z. 5. 294.

755. * *E. W. Barnes.* On the coefficients of capacity of 2 spheres. Q.J. 35. 155.

756. * *G. H. Julius.* Sur l'équilibre entre la self-induction et la capacité électrostatique dans un réseau de cables concentriques. B.A.I.E. 1901. 537.

757. * *H. M. Macdonald.* Electric radiation from conductors. P.L.M.S. (2) 1. 459.

Siehe auch 295; 299; 793; 813; 914; 917.

Konduktoren.

Siehe 823; 886—888.

Elektrischer Funke.

758. * *J. Semenov.* Le mouvement de la matière dans l'étincelle électrique. J. P. (4) 3. 125.

759. *A. Hagenbach.* Über den Dopplereffekt im elektrischen Funken. A.P.L. (4) 13. 362.

Siehe auch 573; 760; 788; 877.

Kondensatoren.

760. *J. Zenneck.* Die Abnahme der Amplitude bei Kondensatorkreisen mit Funkenstrecke. A.P.L. (4) 13. 822.

Siehe auch 444; 810; 832; 882; 883; 1155.

Dielektrizität.

761. *I. I. Kossonogov.* Über die Dielektrika (russ). B.U.K. 1903. b 6.

762. *W. Sutherland.* The Dielectric capacity of atoms. P.M. (6) 7. 402.

763. *E. Bouty.* Cohésion diélectrique de l'argon et de ses mélanges. C.R. 138. 616.

764. *W. Sutherland.* The Crémieu-Pender discovery. P.M. (6) 7. 405.

765. * *F. Maccarone.* Conducibilità e ritardo di polarizzazione dielettrica. P. I.F.P. 6. 157.

766. *W. McF. Orr.* The impossibility of undamped vibration in an unbounded dielectric. P.M. (6) 6. 672.

767. * *J. Kossonogov.* Experimentelle Methoden zur Bestimmung der dielektrischen Koeffizienten. J.R.P.C.G. 35. 331.

Siehe auch 743; 919; 925; 926.

Dielektrizitätskonstante.

768. * *U. Behn* u. *F. Kiebitz.* Bestimmung der Dielektrizitätskonstante von Eis in flüssiger Luft mit schnellen Schwingungen nach Drude. B.F. 610.

769. *H. E. Eggers.* On the dielectric constants of solvents and solutions. J.P.C. 8. 14.

770. * *H. Schlundt.* The dielectric constants of some inorganic solvents. J.P.C. 8. 122.

Elektrodynamik.

771. *A. W. Conway.* A new foundation for electrodynamics. T.S.D. (2) 8. 53.

772. *W. Wien.* Über die Differentialgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. A.P.L. (4) 13. 641. 663. D.V.N. 75. 33.

773. *A. Bartoli.* Su la trasformazione in correnti elettriche delle radiazioni incidenti sopra una superficie riflettente in movimento. R.A.L.R. (5) 12B 346.

774. *V. V. Nikolaev.* Raznovidnosti elektrodinamičeskago ottalkivanija (Die verschiedenen Formen der elektrodynamischen Abstoßung). M.E.P. 1901. 117.

775. * *L. R. Wilberforce.* Note on an elementary treatment of conducting networks. P.P.S.L. 18. 384.

776. * *P. G. Nutting.* The distribution of motion in a conducting gas. P.R. 17. 281.

777. * *J. Stark.* Elektrischer Massentransport in Gasen, Druckerhöhung an der Kathode. B.F. 399.

778. * *H. Pellat.* Du rôle des corpuscules dans la formation du faisceaux anodiques des tubes à gaz rarifié. B.F. 150.

779. *L. Mandelstam.* Zur Theorie des Braunschen Senders. P.Z. 5. 245.

780. * *A. Koenig.* Procédé graphique pour déduire les équations électrométriques. E.T.A. 20. 1837.

Siehe auch 1241.

Elektrisches Potential.

781. *H. T. Barnes.* The fall of potential method as applied to the measurement of the resistance of an electrolyte in action. P.T.R.S.C. (2) 8. 135.

782. * *H. Starke.* Über den Potentialverlauf bei der unselbständigen Elektrizitätsleitung durch Gase für den Fall des Sättigungsstromes. B.F. 667.

783. * *J. Moser.* Wie ist positive Elektrizität mit negativem Potential und negative Elektrizität mit positivem Potential leicht dar- und vorzustellen.? B.F. 745.

784. * *O. Berg.* Einige Versuche über das Elektrodenpotential von Entladungsröhren. B.F. 793.

785. * *S. N. Taylor.* Potential phenomena in vacuum tubes during the production and interruption of electrical discharge. P.R. 18. 321.

786. * *F. Exner* u. *R. Hofmann.* Über die Potentialdifferenzen der Metalle in ionisierten Gasen. B.F. 600.

787. * *A. Schuller.* A fémek potentiálkülömbségéröl (Über die Potentialdifferenz der Metalle). M.T.E. 19. 434.

788. *F. Ritter.* Über das Funkenpotential in Cl, Br und He. A.P.L. (4) 14. 118.

Siehe auch 792; 855; 931; 1093; 1187.

Elektrizitätsleitung.

789. **G. W. Walker.* On some problems in the distribution of a gas. B.F. 242.

790. *R. Hosking.* The electrical conductivity and fluidity of solutions. P.M. (6) 7. 469.

791. **E. Marx.* Über die Elektrizitätsleitung in der Flamme. V.P.G. 6. 121.

792. **H. Starke.* Über den Potentialverlauf bei der Elektrizitätsleitung durch Gase, insbesondere der Flammenleitung. V.P.G. 5. 364.

793. *W. v. Nicolajew.* Über die wichtige Rolle der elektrischen Leitfähigkeit auf dem Gebiete der Elektrostatik. P.Z. 5. 169.

794. **A. Uhrig.* Über einige neue Fälle elektrischen Leitvermögens in Gasen und die Kontinuität derselben für alle Aggregatzustände. N.R. 18. 684.

795. **H. Starke.* Über die Elektrizitätsleitung in der Flamme. V.P.G. 6. 33.

796. **E. Merritt* and *O. M. Stewart.* On the conductivity produced in rarified gases by an incandescent kathode. P. R. 18. 239.

797. **P. E. Robinson.* Some further experiments with the coherer. P.R. 17. 286.

798. *A. F. Fisch.* Recherches sur les contacts imparfaits. J.P. (4) 3. 350.

799. **H. Starke.* Über die unipolare Leitung in Gasen. V.P.G. 5. 377.

800. **O. Lehmann.* Das Vakuum als Isolator. B.F. 287.

801. **A. Campbell.* Measurements of small resistances. P.P.S.L. 18. 480.

802. **E. Hagen* u. *H. Rubens.* Emissionsvermögen und elektrische Leitfähigkeit der Metalllegierungen. V.P.G. 6. 128.

803. **S. Lussana.* Influenza della pressione sulla resistenza elettrica dei metalli. N.C.P. (5) 5. 305.

804. **A. Tanakadate.* Electric resistance of a plane elliptic plate placed in a homogenous medium of infinite extent, the resistance of the plate itself being negligeable compared with that of the medium. J.E.S.T. 1901. 585.

Siehe auch 687; 775; 776; 782; 879—881; 884; 885; 939.

Elektrischer Strom.

805. **E. Jahnke.* Eine einfache Anwendung der Vektorrechnung auf die Theorie der veränderlichen Ströme. B. F. 487.

806. **W. S. Day.* A experiment relating to the application of Lagranges equations of motion to electric currents. A.A.N.Y. 15. 65.

807. *E. Riecke.* Über näherungsweise gesättigte Ströme zwischen planparallelen Platten. N.G.G. 1903. 236.

808. **A. v. Baecklund.* Über elektrische Ströme in zylindrischen Leitern. B.F. 224.

809. *E. Riecke.* Über nahezu gesättigten Strom in einem von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Luftraume. N.G.G. 1903. 149.

810. *G. Mie.* Der elektrische Strom in ionisierter Luft in einem ebenen Kondensator. A.P.L. (4) 13. 857.

811. **Corbino.* Correnti trifasiche. A.A.E.I. 7. No. 4.

Siehe auch 116; 450; 618; 622; 729; 773; 782; 870; 924; 929; 940; 941; 1152; 1183.

Wechselstrom.

812. **E. Gehrcke.* Eine einfache Methode zur Bestimmung des Stromverlaufes hochgespannter Wechselströme. V.P.G. 6. 176.

813. *W. Stroud* and *J. H. Oates.* On the application of alternating currents to the calibration of capacity-boxes and to the comparison of capacities and inductances. P.M. (6) 6. 707.

814. *W. McF. Orr.* Note on the radiation from an alternating circular electric current. P.M. (6) 7. 336.

815. *M. Wien.* Über den Durchgang schneller Wechselströme durch Drahtrollen. A.P.L (4) 14. 1.

816. **R. B. Williamson.* Power measurement on alternating current circuits. E.R. 43. 217.

817. **Iliovici* et *P. Janet.* Measuring of very large alternating currents. B.S I E. 3. 56.

818. **G. Vanni.* Sopra un nuovo metodo di misura della frequenza di una corrente alternata. B.S.N.N. 16—17.

Siehe auch 488; 1150; 1151.

Galvanische Polarisation.

819. **H. Grassi.* Teoria della polarizzazione galvanica. G.C.I. 33. 291.

820. *E. Rothé.* Sur la polarisation des électrodes. A.C.P. (8) 1. 215.

821. *E. Rothe.* Polarisation des électrodes de platine, d'or et de palladium. A.C.P. (8) 1. 289.

822. **A. Borel.* Sur la polarisation rotatoire magnétique du quartz. A.S.G. (4) 16. 24; 157.

Siehe auch 765.

Elektrische Schwingungen.

823. **V. K. Lebedinskij*. O nekotorych sposobach isyčenjia electričeskich kolebanij v provodnikach (Über einige Methoden zur Untersuchung der elektrischen Schwingungen in den Konduktoren). M. E.P. 1901. 116.

824. **A. Battelli* e *A. Magri*. Sulle scariche oscillatorie. P.I.F.P. 6. 3.

825. **A. Battelli* e *L. Magri*. Les décharges oscillatoires. A.S.G. (4) 16. 5; 139.

826. *H. R. Willard* and *L. E. Woodman*. A study of the radiations emitted by a Righi vibrator. P.R. 18. 1.

827. **B. Walter*. Photographische Abbildungen elektrischer Schwingungen. B.F. 647.

828. *R. E. F. Schmidt*. Resonanz elektrischer Schwingungen. A.P.L. (4) 14. 22.

829. **M. Field*. Étude oscillographique des phénomènes de résonance dans les circuits électriques. B.S.I.E. (2) 3. 358.

830. *K. Simons*. Die Dämpfung elektrischer Schwingungen durch eine Funkenstrecke. A.P.L. (4) 13. 1044.

831. *W. McF. Orr*. On the impossibility of undamped vibrations in an unbounded dielectric. P.M. (6) 6. 667.

832. **H. Schuh*. Demonstration der Abhängigkeit oszillatorischer Kondensatorentladungen vom Widerstand. Z.P. 176.

833. *P. Drude*. Demonstration einiger Meßapparate für elektrische Schwingungen. P.Z. 4. 734; V.P.G. 5. 294.

Siehe auch 882; 883; 916.

Elektrische Wellen.

834. *O. Heaviside*. The undistorted cylindrical wave. N. 68. 54.

835. **C. E. Curry*. A peculiar class of waves. B.F. 282.

836. **Lord Rayleigh*. On the bending of waves round a spherical obstacle. P.R.S.L. 72. 40.

837. **A. Trowbridge* e *L. Amaduzzi*. Influenza delle onde elettromagnetiche e reazione del circuito sul getto a mercurio di Lippmann. N.C.P. (5) 5. 322.

838. **E. Drago*. Sulle opposte variazioni di resistenza dei coherer a perossido di piombo per influenza delle onde elettriche. N.C.P. (5) 6. 197.

838a. *L. Hermann*. Über elektrische Wellen in Systemen von hoher Kapazität und Selbstinduktion. A.P.L. (4) 2. 932.

839. *T. R. Lyle*. Preliminary account of a wave-tracer and analyser. P.M. (6) 6. 549.

840. **C. Nordmann*. Le rayonnement hertzien du soleil et l'influence de l'activité solaire sur le magnétisme terrestre. J.P. (4) 3. 97.

841. **G. Abragam*. Maksvellevskoe „V" (Über die Messung der Maxwellschen Geschwindigkeit). R.P.W. 2. 145.

841a. *M. J. Pupin*. Electrical wave transmission. T.A. 14. 89.

Siehe auch 403; 906.

Ionen- und Elektronentheorie.

842. **Allen*. Ions or electrons. P.P.S.G. 34.

843. **G. F. Fitc-Džerald*. Teorija ionov (Ionentheorie). R.P.W. 2. 33.

844. **E. F. Roeber*. Les propriétés théoriques des ions en solution. E.C.I. 1. 490.

845. **E. F. Roeber*. Theoretical properties of free ions in solutions. T.A.E.S. 4. 159.

846. *J. S. Townsend*. The charges of ions. P.M. (6) 7. 276.

847. *A. Schuster*. On the rate at which ions are generated in the atmosphere. S.P.M. 48. Nr. 12.

848. *R. K. Mac Clung*. The relation between the rate of recombination of ions in air and the temperature of the air. P.M. (6) 6. 655.

849. *O. W. Richardson*. The theory of the rate of recombination of ions in gases. P.C.P.S. 12. 144.

850. *J. Stark*. Theoretische Bemerkungen zur Ionisation von Flammen. P.Z. 5. 83.

851. **A. Righi*. Sul moto dei ioni nel campo elettrico. B.F. 730.

852. **H. Mache*. Zur Definition der spezifischen Ionengeschwindigkeit. B.F. 137.

853. **E. R. v. Schweidler*. Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in schlechtleitenden Flüssigkeiten. A.A.W. 1904. 198.

854. **E. Riecke*. Elektrische Strömung in einem ionisierten Luftraume der von 2 konzentrischen Zylinderflächen begrenzt ist. B.F. 168.

855. *J. S. Townsend*. The genesis of ions by the motion of positive ions in a gas and a theory of the sparking potential. P.M. (6) 6. 598.

856. **A. Righi*. Sulla ionizzazione dell' aria prodotta da un punto elettrico. N.C.P. (5) 5. 326.

857. **J. Stark*. Versuch über die Ionisierung durch den Stoß positiver Ionen. V.P.G. 6. 104.

858. *J. Stark.* Ionisierung durch den Stoß negativer Ionen von glühender Kohle. P.Z. 5. 51.

859. * *O. Lodge.* Die Elektronen (russ). E.P. 1903. 113; 144.

860. * *G. Jäger.* Über die Elektronentheorie. V.V.F.U.W. 8. 164.

861. * *Carpini.* Elettroni. C.E.M. 20. Sept.—Okt.

862. *K. Schwarzschild.* Über die Bewegung des Elektrons. N.G.G. 1903. 245.

863. *C. Runge.* Über die elektromagnetische Masse der Elektronen. N.G.G. 1903. 326.

864. * *A. W. Conway.* The field of force due to a moving electron. P.L.M.S. (2) 1. 154.

865. *E. Kohl.* Über das innere Feld der Elektronen. A.P.L. (4) 13. 770.

866. *P. Hertz.* Kann sich ein Elektron mit Lichtgeschwindigkeit bewegen? P.Z. 5. 109.

867. * *H. A. Lorentz.* Bemerkungen zum Virialtheorem II. B.F. 726.

868. *O. Heaviside.* The radiation from an electron describing a circular or elliptic orbit. N. 69. 293; 342.

869. *K. Kaehler.* Über die durch Wasserfälle erzeugte Leitfähigkeit der Luft. A.P.L. (4) 12. 1119.

870. *A. Schuster.* On the number of electrons conveying the conduction currents in metals. P.M. (6) 7. 151.

Siehe auch 693; 786; 810; 881; 931; 1087; 1090.

Thermoelektrizität.

871. *O. Heaviside.* Extension of Kelvins thermoelectric theory. N. 68. 78.

872. *A. Upmark.* Termoelektrisk hysteresis. A.U.L. 38. No. 4.

873. * *R. Mewes.* Die direkte Umwandlung der Verbrennungswärme in Elektrizität. K.L.D. 7. 128; 191.

874. *S. C. Laws.* Experiments on the Thomson effect in alloys of bismuth and tin. P.C.P.S. 12. 179.

875. * *E. G. Bausenwein.* Änderung des Peltiereffektes mit der Temperatur. A.A.W. 1904. 31.

876. *S. C. Laws.* The Thomson effect in alloys of bismuth and tin. P.M. (6) 7. 560.

877. * *A. Maresca.* Fenomeni termici delle scintille nei liquidi isolanti. N.C.P. (5) 5. 315.

878. * *E. Bouty.* Cohésion diélectrique des gaz et température. J.P. (4). 3. 12.

879. *A. A. Noyes* and *W. D. Coolidge.* The electrical conductivity of aqueous solutions at high temperatures. P.A.Bo. 39. 163.

880. * *G. Großmann.* Über die Beziehung zwischen dem thermischen Leitungsvermögen und der elektrischen Leitungsfähigkeit von reinen Metallen und Legierungen. V.P.G.Z. 6. 5.

881. *O. W. Richardson.* Über die einem Vakuum durch erhitzte Leiter erteilte Leitfähigkeit. P.Z. 5. 6.

882. *R. Lindemann.* Über die Wärmewirkungen oszillatorischer Kondensatorentladungen im primären und sekundären Kreise. A.P.L. (4) 12. 1012.

883. * *A. Maresca.* Sulla energia svolta della scarica oscillante di un condensatore nei tubi a vuoto. P.I.F.P. 6. 95.

884. * *A. Barnini.* Sull' influenza della temperatura nella conducibilità elettrica del sodio. N.C.P. (5) 6. 21.

885. * *A. Bersini.* Sull' influenza della temperatura nella conducibilità elettrica del potassio. N.C.P. (5) 6. 289.

886. * *A. Corazzol.* Sulle legge di distribuzione delle temperature di regime stazionario nella sezione circolare di un conduttore cilindrico omogeneo ed isotropo percorso da corrente. L.E.M. 20. 584. — *G. Grassi* 610.

887. * *G. Crivellini.* Ricerca della temperatura d' equilibrio di un conduttore sottomesso all' azione di une corrente elettrica. L.E.M. 20. 389.

888. * *D. Grassi.* Temperature di un conduttore percorso da corrente elettrica. L.E.M. 20. 420

889. *P. J. Kirkby.* The effect of the passage of electricity through a mixture of oxygen and hydrogen at low pressures. P.M. (6) 7. 223.

890. *J. Bernstein* und *A. Tschermak.* Über das thermische Verhalten des elektrischen Organs von Torpedo. S.A.B. 1904. 301.

Siehe auch 685; 729; 791; 795; 1247.

Elektrizitätsmessung.

Siehe 751; 752; 780; 781; 801.

Magnetismus.

891. * *V. Lo Vetere Gallo.* Il magnetismo secondo le teorie moderne. R.T.I. 2. 17.

892. * *A. Schmidt.* Das magnetische Feld. Z.P. 16. 351.

893. *B. Walter.* Über die Stefansche Theorie starker magnetischer Felder A.P.L. (4) 14. 106.

894. *G. W. Walker.* On stresses in a magnetostatic field. P.M. (6) 7. 399.

895. *F. Koláček.* Einfache Herleitung der Formeln für die Deformation eines ferromagnetischen Drahtes im Magnetfelde. A.P.L. (4) 14. 177.

896. *J. J. Thomson.* The magnetic properties of systems of corpuscles describing circular orbits. P.M. (6) 6. 673.

897. *P. Weiß.* La notion du travail appliquée à l'aimantation des cristaux. C.R. 138. 35.

898. **P. Weiß.* Le travail d'aimantation des cristaux. J.P. (4) 3. 194.

899. *J. Zacharias.* Nachweis mechanischer Vorgänge als die Ursache des Magnetismus. D.V.N. 75. 46.

900. **C. G. Knott.* Magnetization and resistance in nickel at high temperatures. B.F. 333.

901. *B. Walter.* Magnetische Ablenkungsversuche mit Röntgenstrahlen. A.P.L. (4) 14. 99.

902. *P. E. Shaw.* The magnetic expansion of some of the less magnetic metals. P.R.S.L. 72. 370.

903. *C. Maurain.* Sur les propriétés magnétiques des poudres de fer et l'aimantation spécifique à saturation. T.S. U.R. 2. 305.

904. **H. Kuhfahl.* Magnetische Messungen nach absolutem Maße. Z.P. 17. 1.

Siehe auch 403; 506; 748.

Hysteresis.

905. **C. Maurain.* Étude et comparaison des procédés de réduction de l'hystéresis magnétique. J.P. (4) 3. 417.

906. **A. Sella.* Sensibilità del ferro alle onde elettriche nell' isteresi magnetoelastica e sul detector magnetoelastico. N.C.P. (5) 6. 83.

Magnetostriktion.

907. *F. Koláček.* Über Magnetostriktion. A.P.L. (4) 13. 1.

908. *R. Gans.* Magnetostriktion ferromagnetischer Körper. A.P.L. (4) 13. 634.

909. *H. Nagaoka* and *K. Honda.* Magnetisation and magnetostriction of nickel steels containing different percentages of nickel. J.U.T. 19 No. 11.

Elektromagnetismus.

910. **W. Pongs.* Elektromagnetismus. A.D.S. 13. 207.

911. **S. P. Thompson.* Ob energii elektromagnitnoj sistemy. ME.P. 1901. 189. — *V. Subbotin* 517.

912. **D. Severini.* L' elasticità dell' etere nei fenomeni elettromagnetici. Pol.M. 1901. 353; 449; 545.

913. *K. H. Weber.* Kraftlinienwanderung als Grundhypothese für die Maxwell-Hertzsche Theorie. V.G.H. (2) 7. 623.

914. **A. Eichenwald.* Über die magnetischen Wirkungen bewegter Körper im elektrostatischen Felde. A.P.L. (4) 13. 919.

915. **E. Kohl.* Über die elektromagnetischen Feldgleichungen innerhalb bewegter elektrischer Massen. B.F. 678.

916. **F. Ehrenhaft.* Die elektromagnetischen Schwingungen des Rotationsellipsoids. A.A.W. 1904. 25.

917. **P. H. Thomas.* Static discharges in electric circuits. J.F.I. 156. 387.

918. *G. Picciati.* Flusso di energia e radiazione nel campo elettromagnetico generato della convezione elettrica. R.A.L.R. (5) 13A. 384.

919. *G. Picciati.* Sull' influenza dei dielettrici solidi sul campo magnetico generato dalla convezione elettrica. R.A. L.R. (5) 13A. 181; 226.

920. **J. F. Meyer.* Electric convection. J.F.I. 156. 453.

921. **V. Cremieu* and *H. Pender.* On the magnetic effect of electric convection. P.R. 17. 385.

922. **P. N. Lebedev.* Skala electromagnitnych voln v ethire (Skala der elektromagnetischen Wellenlängen im Äther). R.P.W. 2. 49; 217.

923. *F. Himstedt.* Quantitative Versuche über den Rowlandeffekt. A.P.L. (4) 13. 100.

924. *P. V. Bevan.* A lecture experiment to illustrate the effect of a straigth current on a magnetic pole. P.C.P.S. 12. 212.

925. *F. Koláček.* Über die ponderomotorischen Kräfte, welchen ein homogenes Dielektrikum in einem veränderlichen elektromagnetischen Felde unterworfen ist. P.Z. 5. 45.

926. *R. Gans.* Die ponderomotorischen Kräfte, welchen ein homogenes Dielektrikum in einem elektromagnetischen Felde unterworfen ist. P.Z. 5. 162.

927. **T. Levi-Cività.* Sul campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito. N.C.P. (5) 6. 141.

928. *G. Bakker.* Die Faraday-Maxwellschen Spannungen. A.P.L. (4) 13. 562.

929. **O. M. Corbino.* Sulla produzione di campi rotanti per mezzo di correnti

di scarica sinusoidali o smorzate. N.C.P. (5) 7. 175.

930. *W. B. v. Czudnochowski.* Das Verhalten beweglicher zylindrischer Eisenkerne in Doppelspulen; ein Beitrag zur Theorie der Differentialbogenlampe. P.Z. 5. 205.

931. **E. T. Whittaker.* On an expression of the electromagnetic field due to electrons by means of two scalar potential functions. P.L.M.S. (2) 1. 367.

932. **A. Banti.* Duddell Circuits. L.E. 12. 1.

933. **G. Granqvist.* Über die Periode und die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung im singenden Flammenbogen. B.F. 299.

934. *G. Barlow.* Über die galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in Antimon und Wismuth. A.P.L. (4) 12. 897.

Siehe auch 822; 863.

Induktion.

935. **W. Pongs.* Eie Induktion. A. D.S. 13. 279; 321; 415; 462.

936. **A. Heydweiller.* Über Selbstinduktions- und Permeabilitätsvergleichungen. B.F. 4.

937. *F. Dolezalek.* Über Präzisionsnormale der Selbstinduktion. A.P.L. (4) 12. 1142.

938. **A. Trowbridge.* A method for the determination of coefficients of mutual induction. P.R. 18. 184.

939. **H. Muraoka* und *T. Tamaru.* Über die Veränderung der elektrischen Leitungsfähigkeit eines Pulvers durch Induktion. M.C.K. 1. 20.

940. *P. Drude.* Über induktive Erregung zweier elektrischer Schwingungskreise mit Anwendung auf Perioden- und Dämpfungsmessung, Teslatransformatoren und drahtlose Telegraphie. A.P.L. (4). 13. 512.

941. **B. Weinberg.* Über den Einfluß des Mediums auf die Induktion von Strömen (russ.). J.R.P.C.G. 35. 483; 665.

942. *C. Somigliana.* Intorno ad un problema d'induzione magnetica. R.I.L. (2) 36. 1114.

943. *T. Boggio.* Induzione prodotta da un campo magnetico qualunque sopra una sfera isotropa. R.I.L. (2) 37. 123.

944. **F. C. Frisby.* The effect of pressure on magnetic induction. P.R. 18. 432.

Siehe auch 753; 756; 1234.

Hallsches Phänomen.

945. *T. C. Mc Kay.* On the relation of the Hall effect to the current density in gold. P.A.Bo. 39. 353.

Thermomagnetismus.

946. **G. Piaggesi.* Magnetizzazione dei liquidi a varie temperature. P.I.F.P. 6. 131.

947. *G. E. Allan.* On the magnetism of basalt and the magnetic behaviour of basaltic bars when heated in air. P.M. (6) 7. 45.

Siehe auch 407; 934.

Theoretische Astronomie.

948. *K. Schwarzschild.* Über Himmelsmechanik. P.Z. 4. 765; D.V.M. 13. 145.

949. *E. W. Brown.* On the variation of the arbitrary and given constants in dynamical equations. T.S.M.Am. 4. 333.

Keplersches Problem.

950. **E. Le Grand Roy.* Résolution graphique de l'équation de Kepler. A. S.G. (4) 16. 328.

Siehe auch 36.

Störungen.

951. *G. Morera.* Sulle equazioni dinamiche di Hamilton. A.A.T. 39. 262.

952. *H. Buchholz.* Klarstellung der von Herrn Backlund A.N.K. No. 3911 gegen mich erhobenen Vorwürfe. A.N.K. 164. 157.

953. *H. v. Zeipel.* Angenäherte Jupiterstörungen für die Hekubagruppe. A.P.M. (8) 12 No. 11.

Siehe auch 986.

Vielkörperproblem.

954. *H. Buchholz.* Die Gyldénsche horistische Integrationsmethode des Problems der 3 Körper und ihre Konvergenz. N.AH. 81 No. 3. 129.

955. *H. Buchholz.* Poincarés Preisarbeit von 1889/90 und Gyldéns Forschung über das Problem der 3 Körper in ihren Ergebnissen für die Astronomie. P.Z. 5. 180.

956. *G. Bisconcini.* Sul problema dei 3 corpi. Condizione d' urto di due di essi. R.A.L.R. (5) 12B. 552.

957. *E. Buchholz.* Untersuchung der Bewegung vom Typus 2/3 im Problem der 3 Körper und der „Hilda-Lücke" im System der kleinen Planeten auf

Grund der Gyldénschen Störungstheorie. D.A.W. 72. 309.

958. *P. Pizzetti.* Casi particolari del problema dei 3 corpi. R.A.L.R. (5) 13A. 17.

959. *L. Picart.* Discussion des surfaces de niveau dans le problème restreint. B.A. 20. 401.

960. **E. O. Lovett.* Periodic solutions of the problem of 4 bodies. Q.J. 35. 116.

Erdbewegung.

961. *F. Folie.* Dernière replique à M. C. Lagrange. B.A.B. 1904. 71.

Erddrehung.

Siehe 238.

Präzession.

962. * *W. Foerster.* La précession des équinoxes d'Hipparque à Ptolémée et à Kepler. R.G.O. 14. 537.

Aberration.

963. **E. Lecher.* Ein elektrischer Aberrationsversuch. B.F. 739.

964. **R. J. Sowter.* On astigmatic aberration. P.P.S.L. 18. 573.

965. **F. C. O. Wadsworth.* On the aberration of the concave grating, when used as an objective spectroscope. M. S.P.A.O. (2) 13.

Bewegung von Körpern unter dem Einfluß der Erddrehung.

966. **E. H. Hall.* Do falling bodies move south? P.R. 17. 179; 245.

967. *E. H. Hall.* Experiments on the deviations of falling bodies. P.A.Bo. 39. 339.

968. **B. Brunhes.* Sur une expérience de Perrot relative à l'influence de la rotation de la terre sur l'écoulement des liquides, et sur une comparaison directe de la rotation terrestre et du champ magnétique terrestre. A.S.M.F. 52. 89.

Siehe auch 1064.

Foucaultscher Pendelversuch.

969. *Sauter.* Der Foucaultsche Pendelversuch. J.V.U. 11. 64.

970. **G. Schilling.* Der Foucaultsche Pendelversuch. V.V.F.U.W. 9. 22.

971. *L. M. de Sparre.* Sur le pendule de Foucault. M.A.Ly. (3) 7. 313.

Polhöhenschwankungen.

972. **S. Kubli.* Polschwankungen — Erdbeben. D.W.B. 4. 338.

973. **W. Förster.* Über die Beobachtung der Bewegungen der Drehungsachse im Erdkörper. M.V.A.P. 13. 51.

974. *H. Kimura.* On the 6 years' cycle of the polar motion during the interval 1891—1902. A.N.K. 164. 341.

Mondbewegung.

975. *E. W. Brown.* On the formation of the derivatives of the lunar coordinates with respect to the elements. T.S.M.Am. 4. 234.

976. *E. F. van de Sande-Bakhuyzen.* Onderzoek omtrent de fouten der maanstafels van Hansen-Newcomb in de jaren 1895—1902. C.A.A. 12. 131; 381; 585.

Siehe auch 949; 1100.

Sternbedeckungen.

977. *A. Pannekoek.* Über die Erscheinungen, welche bei einer Sternbedeckung durch einen Planeten auftreten. A.N.K. 164. 5.

978. *H. Struve.* Über die Bedeckung des Sternes B.D.—6°, 6191 durch Jupiter. A.N.K. 164. 33.

Planetenbewegung.

979. **L. Lecornu.* Sur les mouvements planétaires. A.F. 1903. 115.

980. *T. J. J. See.* On the degree of accuracy attainable in determining the position of Laplaces invariable plane of the planetary system. A.N.K. 164. 161.

981. *J. H. Jeans.* On the vibrations and stability of a gravitating planet. T.R.S.L. 201 A. 157.

Siehe auch 977; 978.

Planetoidenbewegung.

982. **G. Gruß.* Einige Bemerkungen zur Berechnung der Kreisbahn eines Planetoids aus 2 geozentrischen Positionen (tschech.). S.G.B. 1903 No. 47.

Siehe auch 953; 957.

Kometenbewegung.

983. *L. Fabry.* Sur la véritable valeur du grand axe d'une orbite cométaire lorsque l'astre est très éloigné du Soleil et le caractère supposé hyperbolique de la comète 1890 II C.R. 138. 335.

984. **L. Picart.* Sur quelques points de la théorie de la capture des comètes. T.M.L. (2) 1.

Meteoritenbewegung.

985. **H. Chrétien.* L'étude scientifique des étoiles filantes et les travaux de la commission des météores de la société astronomique de France. A.F. 1903. 189.

986. *T. Bredikhine.* Sur le rôle de Jupiter dans la formation des radiants simples. A.P.B. (5) 17. 167.

Doppelsternbewegung.

986a. *A. Prey.* Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse des Systemes 70 Ophiuchi. D.A.W. 72. 177.

986b. *E. Doolittle.* The orbit of the double star Σ 518. P.P.S. 42. 170.

986c. *J. Hartmann.* Untersuchungen über das Spektrum und die Bahn von δ Orionis. S.A.B. 1904. 527.

986d. *H. C. Vogel.* Untersuchungen über das spektroskopische Doppelsternsystem β Aurigae. S.A.B. 1904. 497.

Eigenbewegung der Fixsterne.

Siehe 274.

Sonnenapex.

986e. **S. Wellisch.* Der dynamische Mittelpunkt der Welt. D.W.B. 3. 273.

Astrophysik.

987. **F. Gessert.* Eine Hypothese über die Ersetzung der Gestirnswärme durch die Schwerkraft. D.W.B. 4. 232.

988. **C. Nordma n.* Le rayonnement hertzien du soleil et les aurores boréales. J.P. (4) 3. 281.

989. *C. Fabry.* Sur l'intensité lumineuse des étoiles et lear comparaison avec le soleil. C.R. 137. 1242.

990. **H. Kaiser.* Zur Bestimmung der Temperatur der Sterne. D. W.B. 3. 29<

Siehe auch 593; 1029; 1099

Kosmische Spektralanalyse.

991. **W. H. Julius.* Pecularities and changes of Frauenhofer lines interpreted as consequences of anomalous dispersion of sunlight in the corona. A.J.C. 18. 50.

992. **E. Haschek* u. *K. Kostersitz.* Über einen Versuch der Ausmessung von Sternspektrogrammen nach der objektiven Methode der Wellenlängenbestimmung. B.F. 497.

Siehe auch 986c; 986d.

Sonne.

993. **W. H. Julius.* Die Sonnenphänomene als Folgen anomaler Dispersion des Lichtes betrachtet. S.L. 35. 28.

994. **W. H Julius.* Eine Hypothese über die Natur der Sonnenprotuberanzen. S.L. 36. 53.

995. **W. H. Julius.* Erwiderung auf Bedenken, welche gegen die Anwendung der anomalen Dispersion zur Erklärung der Chromosphäre geäußert worden sind. S.L. 36. 148.

996. *H. Seeliger.* Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn A. Schmidt „Beobachtung der Helligkeitsabnahme durch Brechung." P.Z. 5. 237.

997. *N. Donitch.* Sur l'état des enveloppes du soleil à l'epoque du dernier minimum de son activité. B.A. 21. 5.

Siehe auch 684; 737; 840; 988; 989; 1059; 1069; 1102; 1105; 1223.

Sonnenflecken.

998. **H. Chrétien.* La quadrature mécanique des taches solaires. A.F. 1903. 207.

Siehe auch 1058; 1060; 1104; 1106.

Kometen.

999. *R. Jaegermann.* Einige Bemerkungen über die in den neueren Werken der kosmischen Physik gegebenen Auseinandersetzungen in Bezug auf die Kometenschweife. A.P.B. (5) 18. 175.

Veränderliche Sterne.

1000. *H. Ludendorff.* Untersuchungen über den Lichtwechsel von ε Aurigae A.N.K. 164. 81.

Kosmologie.

1001. *S. Oppenheim.* Das Unendliche in der Astronomie. S.L.P. (2) 23. 283.

Sonnensystem.

Siehe 980.

Kosmogonie.

Siehe 1029.

Beobachtungskunde.

1002. *Salet.* Erreurs dues aux déplacement de l'oeil devant l'oculaire. B.A. 21. 83.

Sphärische Astronomie.

1003. *H. Hilton.* Some simple problems in astronomy. M.G.S. 2. 384.

1004. * *J. J. Taudin-Chabot.* Sonnenuntergang und Sonnenaufgang. D.W.B. 3. 1903.

Zeitbestimmung.

1005. * *E. James.* Einfache Methoden der Zeitbestimmung. D.U.Z. 27. 129.

1006. * *Weidefeld.* Zur Genauigkeit der Zeitbestimmungen am Sonnenlot. D.U.Z. 27. 319.

1007. * *P. Fauth.* Vorschlag zur Verbesserung des Sonnenlotes. M.V.A.P. 13. 133.

1008. *F. Faccin.* Metodo grafico per la determinazione del tempo coll' eliocronometro „Faccin". R.F.M. 4B. 459.

Gnomonik.

1009. * *Weidefeld.* Über die Leistungsfähigkeit von Sonnenuhren. M.V.A.P. 13. 24.

1010. * *A. Müller.* Bibel und Gnomonik. N.O. 48. 257; 340; 405.

Siehe auch 109.

Chronologie.

1011. * *J. Plassmann.* Verwandlung von Zehntelstunden in Hundertel des Tages. M.V.A.P. 13. 142.

1012. * *J. Plassmann* Minuten als aliquote Teile des Tages. M.V.A.P. 13. 124.

1013. * *R. Munzky.* Math. Formel zur rechnerischen Bestimmung des Wochentages beliebiger Daten im alten und neuen Kalender. D.W.B. 4. 63.

Kalender.

1014. *L. F. J. Gardès.* Calendrier perpétuel. A.F. 1903. 214.

Siehe auch 1013.

Niedere Geodäsie.

1015. *W. Grosse.* Über eine praktische Rechnungsaufgabe der Feldmeßkunst. Z.H. 35. 83.

1016. *S. Finsterwalder* und *W. Scheufele.* Das Rückwärtseinschneiden im Raum. S.A.M. 1903. 591.

Messen.

1017. * *R. S. Woodward.* Measurement and calculation. A.A.N.Y. 15. 22.

Tachymetrie.

1018. *A. Sporeni.* Topografía. Taquimetria con el teodolito. A.S.A. 56. 49.

Barometrische Höhenmessung.

1019. * *G. Cicconetti.* Confronto sperimentale fra le principali formole dell' altimetria barometrica. M.S.It. (3) 12. 109.

1020. *L. Maillart.* Note sur la formule barométrique de Laplace. B.S.V. (4) 39. 359.

Topographie.

Siehe 1018.

Kartenprojektionen.

1021. *J. D. Everett.* On a map that will solve problems in the use of the globes. N. 68. 294.

Metrologie.

1022. *J. Bosscha.* Les équations des nouvelles copies du mètre des archives. II. A.N. (2) 9. 108.

1023. * *W. Le Conte Stevens.* The metric system. S. (2) 19. 534.

1024. * *O. Chwolson.* Notiz über die Vergleichung des Meters mit der Wellenlänge des Lichtes. B.F. 28.

1025. * *J. Witkowski.* Les mesures électriques et leur rapport aux mesures anglaises et aux mesures polonaises anciennes. P.T.W. 41. 81.

Höhere Geodäsie.

1026. * *E. Hammer.* Die methodischen Fortschritte der geographischen Landmessung. G.J.G. 25. 343.

Gestalt des Geoids.

1027. * *J. Sollas.* The figure of the Earth. Q.J.G.S. 59. 180.

Siehe auch 1037.

Lotabweichungen.

1028. *O. Fisher.* On deflexions of the plumb-line in India. P.M. (6) 7. 14.

Geophysik.

1029. *R. v. Kövesligethy.* Über die Entwicklung der Himmelskörper und das Alter der Erde. B.M.N. 19. 204.

1030. * *L. de la Rive.* Sur l'ellipsoide d'élasticité dans l'intérieur de la terre et les pressions tangentielles dues à la pesanteur. A.S.G. (4) 16. 457.

Schweremessungen.

1031. * *C. Dufour.* Les variations de la pesanteur. A.S.M.F. 52. 87.

1032. * *A. Prey.* Über die Reduktion

der Schweremessungen auf das Meeresniveau. A.A.W. 1904. 234.

1033. *—. Variation of gravity over the deep sea. M.W.R. 31. 336.

1034. **K. R. Koch*. Relative Schweremessungen in Württemberg. J.V.N.S. 59. 1.

Erdbeben.

1035. **A. Seberg*. Gegenwärtiger Stand und Bestrebungen der Seismologie. D. W.B. 4. 126.

1036. **O. Fisher*. On the transmission of Earthquake waves through the Earth. P.C.P.S. 12. 354.

1037. **C. Lallemand*. Relation des volcans et tremblements de terre avec la figure du globe. A.F. 1903. 157.

1038. **C. Coldridge Farr*. On the interpretation of Milne Seismogram. P. P.S.L. 18. 579.

Siehe auch 972.

Erdwärme.

1039. **A. Flamache*. Un argument nouveau en faveur du feu central. B. S.B.A. 8. 291.

Vulkanismus.

1040. **v. Erdborn*. Le vulcanisme. B.S.B.A. 8. 283.

Siehe auch 1037.

Erdströme.

Siehe 1058.

Erdmagnetismus.

1041. **N. Umow*. Ein Versuch die magnetischen Typen des Erdmagnetismus zu ermitteln. S.N.M. 1902. 1.

1042. **J. Sahulka*. Über die Ursachen des Erdmagnetismus und des Polarlichtes. A.A.W. 1903. 32.

1043. **W. van Bemmelen*. The diurne field of magnetic disturbance. T.M.W. 8. 153.

1044. *A. Pochettino*. Sulla variazione del campo magnetico orizzontale terrestre coll' altezza sul livello del mare. R.A. L.R. (5) 13 A 96.

1045. *E. Mathias*. Sur la loi de la distribution régulière de la force totale du magnétisme terrestre en France au 1 janvier 1896. C.R. 137. 916.

1046. **A. Nippoldt* jun. Die tägliche Variation der magnetischen Deklination, eine Untersuchung über die physikalische Bedeutung der harmonischen Analyse. A.A.S. 26. No. 3.

Siehe auch 840; 968; 1059; 1060; 1257; 1268.

Ozeanographie.

1047. **L. Lalot*. Action de la fusion de la glace sur la circulation océanique. L.G. 8. 333.

1048. *Thoulet*. Méthode physique et chimique de reconnaissance et de mesure des courants sousmarins profonds. C.R. 138. 527.

Ebbe und Flut.

1049. **A. Müller*. Zur Theorie von Ebbe und Flut. N.O. 49. 617.

1050. **F. S. Archenhold*. Ein Apparat zur Erklärung von Ebbe und Flut. D. W.B. 4. 38.

Siehe auch 1101.

Hydrologie.

1051. **E. Maillet*. Sur divers points d'hydraulique souterraine et fluviale. A. S.M.F. 51. 185.

1052. *A. Angele*. Wassermessungen an der Donau am Pegel zu Ulm. J.V. U. 11. 21.

Siehe auch 91.

Quellen.

1053. *J. Boussinesq*. Application de la théorie générale de l'écoulement des nappes aqueuses infiltrées dans le sol aux fortes sources des terrains perméables et en particulier à plusieurs de celles qui alimentent Paris. C.R. 138. 117.

1054. *E. Maillet*. Sur la courbe des débits d'une source. C.R. 137. 676.

1055. *E. Maillet*. Sur la prévision des débits des sources de la Vanne. C.R. 137. 946.

1056. *E. Maillet*. Sur les graphiques des débits des sources. A.S.M.F. 51. 206.

1057. *J. Boussinesq*. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. J.M. (5) 10. 1.

Kosmische Geophysik.

1058. **F. S. Archenhold*. Sonnenflecken, Erdströme und Nordlichter. D.W.B. 4. 71.

1059. **A. L. Cortie*. Solar prominences and terrestrial magnetism. A.J.C. 18. 287.

1060. **W. Maunder*. Suggested connection between sun spot activity and the secular change in magnetic declination. M.N.A.S. 64. 224.

Siehe auch 840.

Mathematische Meteorologie.

1061. *L. Maillart*. Note sur la constitution physique de l'athmosphère. B. S.V. (4) 39. 389.

1062. *V. Bjerknes.* Das Problem der Wettervorhersage betrachtet vom Standpunkt der Mechanik und der Physik. M.Z. 21. 1.

1063. * *Dewar.* Problems of the athmosphere. P.R.I. 17. 223.

1064. * *M. Gorodensky.* Recherches concernant l'influence de la rotation diurne de la terre sur les perturbations athmosphériques. A.S.M.F. 52. 113.

Luftdruck.

1065. * *F. M. Exner.* Über eine Beziehung zwischen Luftdruckverteilung und Bewölkung. A.A.W. 1903. 283.

1066. *W. Trabert.* Die Theorie der täglichen Luftdruckschwankung von Margules und die tägliche Oszillation der Luftmasse. M.Z. 19. 544; 20. 48.

1067. * *M. Margules.* Über die Beziehung zwischen Barometerschwankungen und Kontinuitätsgleichung. B.F. 585.

Siehe auch 309; 317; 1074; 1100.

Luftbewegung.

1068. *L. de Marchi.* Sulla teoria matematica della circolazione atmosferica. R.A.L.R. (5) 13A. 460.

1069. * *F. H. Bigelow.* Studies on the circulation of the athmospheres of the sun and of the carth. M.W.R. 32. 15; 71.

1070. * *A. Woeikof.* Remarks on Bigelows studies on the eirculation of the athmosphere. M.W.R. 32. 118.

1071. * *M. Dechevrens.* The vertical component of the wind. M.W.R. 32. 118.

1072. * *E. Knipping.* Formel zur Umwandlung der Beaufortgrade im Metermaß. M.Z. 21. 196.

1073. *J. Hann.* Über eine doppelte tägliche Periode der Windkomponenten auf den Berggipfeln. M.Z. 20. 501.

1074. * *A. F. Zahm.* Measurement of air velocity and pressure. P.R. 17. 410.

Siehe auch 1064.

Zyklonen.

1075. * *F. J. B. Cordeiro.* The problem of the cyclone. M.W.R. 31. 516.

1076. * *F. H. Bigelow.* The mechanism of countercurents of different temperatures in cyclones and anticyclones. M.W.R. 31. 72.

1077. *W. Meinardus.* Über die absolute Bewegung der Luft in fortschreitenden Zyklonen. M.Z. 19. 529.

1078. *W. N. Shaw.* On curves representing the paths of air in a special type of travelling storm. M.W.R. 31. 318.

Siehe auch 296.

Meteorologische Optik.

1079. * *A. Sieberg.* Über ringförmige Gebilde um Sonne und Mond, sowie verwandte atmosphärisch-optische Erscheinungen. D.W.B. 3. 303.

1080. * *J. W. Krebs.* Atmosphärische Sprungflächen und Spiegelungserscheinungen. D.W.B. 4. 182.

Siehe auch 597.

Refraktion.

1081. *L. de Ball.* Über den Einfluß der Refraktion auf die Distanz zweier Sterne. A.N.K. 164. 373.

1082. * *G. Cicconetti* e *N. Pierpaoli.* Il coefficiente di rifrazione terrestre a Udine. M.S.It. (3) 12. 251.

1083. *R. T. Crawford.* Determination of the constant of refraction from observations made with the Repsold meridian circle of the Lick observatory. P.C.F. (3) 1. No. 8.

1084. *P. Kohlschütter.* Folgerungen aus den Koßschen Kimmtiefenbeobachtungen zu Verudella. A.H. 31. 533.

Lufttemperatur.

1085. * *Dechevrens.* Les variations de la température selon la verticale. A.S.M.F. 52. 67.

1086. * *R. Merecki.* Nicokresown zmienność temperatury prowietrza (Über die nichtperiodische Temperaturänderung der Luft). K.L. 8. 484.

1087. *R. K. Mc Clung.* The relation between the rate of recombination of ions in air and the temperature of the air. P.M. (6) 6. 655.

1088. * *A. Bemporad.* La teoria della estinzione atmosferica nella ipotesi di un decresimento uniforme della temperatura dell' aria coll' altezza. M.S.S.I. 33. 31.

Siehe auch 316; 848; 1104.

Thermostatik der Atmosphäre.

Siehe 658.

Bewölkung.

Siehe 1065.

Niederschläge.

1089. * *J. R. Plumandon.* La neige selon l'altitude. L.N. 31. 92.

Luftelektrizität.

1090. **H. Ebert.* Die atmosphärische Elektrizität auf Grund der Elektronentheorie. G.L. 39. 650.

1091. *B. Zölß.* Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XIII. S.A.W. 112. 1117.

1092. **A. Gockel.* Sur la variation diurne de la déperdition de l'électricité dans l'athmosphère. A.S.G. (4) 18. 1.

1093. **K. Noack.* Versuch über Potentialänderung mit der Höhe. Z.P. 16. 350.

Siehe auch 847; 848; 869; 1087.

Gewitter.

1094. *C. Negro.* Fulmine. R.F.M. 5I. 323.

1095. *B. Walter.* Über die Entstehungsweise des Blitzes. J.H.W.A. 20. 3.

Polarlichter.

Siehe 988; 1042; 1058; 1105; 1106.

Kosmische Meteorologie.

1096. **F. H. Bigelow.* The new cosmical meteorology. S. (2) 19. 31.

1097. *A. V. Klossovskij.* Predskazanie pogody v sovremennoj meteorologii i rol N. A. Demčinskago v etom voprose (Wetterprophezeihungen in der Meteorologie und Stellung des Herrn Demčinskij zu dieser Frage). M.P.O. 30. 193; 217; 242; 265.

1098. **A. W. Klossovsky.* Prüfung der Wettervorhersagungsmethode des Herrn Demtschinsky (russ.). M.U.O. 95. 63.

1099. **C. Marti.* Die Wetterkräfte der Planetenatmosphären. J.V.O. 15. 19.

1100. **T. F. Grigull.* Barometerstand und Monddeklination. J.V.O. 15. 15.

1101. **W. Krebs.* Die Gezeitenbewegung der Atmosphäre. D.W.B. 4. 91.

1102. **F. H. Bigelow.* Studies on the circulation of the athmospheres of the sun and of the earth. M.W.R. 31. 459.

1103. *M. Möller.* Zur täglichen Drehung des Windes und über Trägheitsperioden. M.Z. 21. 28.

1104. **C. Nordman.* The periodicity of sun spots and the variations of the mean annual temperatures of the athmosphere. M.W.R. 31. 371.

1105. **C. Nordman.* Le rayonnement du soleil et les aurores boréales. J.P. (4) 3. 281.

1106. **H. H. Clayton.* The 27-day period in auroras and its connection with sun spots. S. (2) 18. 632.

Praktische Meteorologie.

Siehe 1062; 1097; 1098.

Mathematische Chemie.

1107. *P. Köthner.* Versuch einer chemischen Auffassung des Weltäthers. Z.F.N. 76. 370.

1108. **W. G. Alexeieff.* Über die Entwicklung des Begriffes der höheren arithmetischen Gesetzmäßigkeit in Natur- und Geisteswissenschaften (russ.). A.U.J. 1904 No. 2.

1109. *E. Ariès.* Sur les lois du déplacement de l'équilibre chimique. C.R. 137. 738.

1110. *E. Ariès.* Sur l'extension de la formule de Clapeyron à tous les états indifférents. C.R. 137. 123.

1111. **G. G. Longinescu.* Sur la polymérisation des corps anorganiques à l'état solide. J.P.C. 7. 391; A.S.U.J. 2. 288.

1112. *H. O. Jones* and *O. W. Richardson.* Irreversible simultaneous linear reactions. P.C.P.S. 12. 215.

Physikalische Chemie.

1113. **P. Duhem.* Les points d'eutexie et de transition pour les mélanges binaires qui peuvent donner des cristaux mixtes. J.C.P. 1. 97.

1114. **W. Kurbataw.* Über das Troutonsche Gesetz und andere Konstanten, die man bei der Siedetemperatur beobachtet (russ.). J.R.P.C.G. 35. 319.

1115. **J. E. Trevor.* The expansion-work of a dissociation gas. B.F. 493.

1116. **H. C. Jones.* The effect of one associated solvent on the association of another associated solvent. B.F. 105.

1117. **G. Jäger.* Über die Verteilung einer nichtdissoziierenden Substanz zwischen zwei Lösungsmitteln. B.F. 313.

1118. *V. Henri.* Étude théorique de la dissociation de l'oxyhémoglobine. Actions de la concentration et de la température. C.R. 138. 572.

1119. *E. Charabot* et *J. Rocherolles.* Recherches expérimentales sur la distillation. C.R. 138. 497.

Siehe auch 342; 462.

Phasenlehre.

1120. *C. Raveau.* Démonstration élémentaire de la règle des phases. C.R. 138. 621.

1121. *C. H. Wind.* Nouvelle démonstration de la règle des phases. R.S. (5) 1. 345.

1122. *A. Ponsot.* Démonstrations simples de la règle des phases. C.R. 138. 690.

1123. *R. Hollmann.* Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische I. A.P.L. (4) 13. 325.

1124. *S. Scharbe.* Einige Bemerkungen zur Abhandlung des Herrn Hollmann: Über die Volumenänderung beim Phasenwechsel binärer Gemische. A.P.L. (4) 13. 1076.

1125. *J. Hirnjak.* Rolja staloï, plinnoï i gazovoï fazi v chemitschnij rivnovazi (Die Bedeutung der festen, flüssigen und gasartigen Phase im chemischen Gleichgewicht). R.S.M. 9 No. 2.

1126. **P. Saurel.* On the stability of the equilibrium of a homogeneous phase. J.P.C. 8. 325.

1127. *E. Ariès.* Sur les conditions de l'état indifférent. C.R. 138. 416.

1128. *E. Ariès.* Sur les propriétés des courbes figuratives des états indifférents. C.R. 138. 806.

1129. *V. Volterra.* Sul numero dei componenti indipendenti di un sistema. R.A.L.R. (5) 12B. 417.

1130. *J. J. van Laar.* Sur les allures possibles de la courbe de fusion de mélanges binaires de substances isomorphes. A.M.T. (2) 8. 517.

1131. *J. J. van Laar.* Over de gedaante van smeltlijnen bij binaire mengsels, wanneer de mengwarmte in de beide phasen zeer gering = 0 is. C.A.A. 12. 716.

Photochemie.

1132. **G. Ciamician* e *P. Silber.* Azioni chimiche della luce. G.C.I. 33. 354; M.IB. (5) 10.

1133. **E. L. Nichols* and *E. Merritt.* The influence of low temperatures upon certain color indicators. B.F. 890.

1134. **J. H. Smith.* Die Anwendung der Photometrie in der Photographie. M.P.G.Z. 5. 27.

Siehe auch 580; 1142.

Thermochemie.

1135. **J. W. Richards.* The thermochemistry of the theory of electrolytic dissociations. T.A.E.S. 4. 137.

1136. **W. Nernst.* Chemisches Gleichgewicht und Temperaturgefälle. B.F. 904.

1137. **H. Crompton.* The atomic latent heats of fusion of the metals considered from the kinetic standpoint. C.N. 88. 237.

1138. *C. Puschl.* Über das Gesetz von Dulong und Petit. S.A.W. 112. 1230.

1139. *P. Lemoult.* Les chaleurs de combustion des composés organiques, considérées comme propriétés additives. C.R. 137. 515.

1140. *P. Lemoult.* Sur une nouvelle méthode pour le calcul des chaleurs de combustion et sur quelques-unes de ses conséquences. C.R. 137. 979.

1141. *P. Lemoult.* Sur le calcul de la chaleur de combustion des compositions organiques azotés. C.R. 138. 900.

1142. *P. V. Bevan.* The temperature effect in the combination of Hydrogen and Chlorine under the influence of light. P.C.P.S. 12. 398.

Siehe auch 1133.

Elektrochemie.

1143. **W. Mitkiewicz.* Zur Frage nach dem Mechanismus der Voltasäule (russ.). J.R.P.C.G. 35. 507.

1144. **C. J. Reed.* Berthelot's law relative to the electromotive forces of cells based on the reciprocal action of saline solutions and soluble electrolytes. T.A.E.S. 4. 151.

1145. *A. Ponsot.* Sur une loi expérimentale du transport électrique des sels dissous. C.R. 138. 192.

1146. *P. J. Kirkby.* The effect of the passage of electricity through a mixture of *O* and *H* at low pressures. P.M. (6) 7. 223.

1147. *A. W. Gray* Über die Ozonisierung des Sauerstoffs bei der stillen elektrischen Entladung. A.P.L. (4) 13. 477.

Elektrolyse.

1148. **P. G. Salom.* A new type of electrolytic cell. T.A.E.S. 4. 101.

1149. **W. D. Bancroft.* Present status of the electrolytic dissociation theory. T.A.E.S. 4. 175.

1150. *A. Brochet* et *J. Petit.* Sur l'emploi du courant alternatif en électrolyse. C.R. 138. 359.

1151. **A. Brochet* et *J. Petit.* Sur l'électrolyse par courant alternatif. B.S.C. (3) 31. 359.

1152. *E. van der Ven.* Sur le transport des liquides par le courant électrique. A.M.T. (2) 8. 489.

1153. **E. S. Shepherd.* An apparatus for the electrolytic determination of metals using a rotating cathode. J.P.C. 7. 568.

Siehe auch 1135.

Mathematische Physiologie.

1154. *Ferrus* et *Machart*. Augmentation du travail utile des attelages par l'emploi des appareils élastiques à traction. C.R. 138. 165. — *Marey* 167.

1155. *Cluzet*. Sur l'excitation des nerfs par décharges de condensateurs. C.R. 138. 173.

Siehe auch 890.

Mathematische Biologie.

1156. *J. Deschamps*. Étude analytique du phénomène de la vie oscillante. C.R. 138. 235.

Mathematische Zoologie.

1157. **E. Mancini*. L'arithmétique des animaux. R.S. (5) 1. 129.

Mathematische Botanik.

1158. *Berthelot*. Recherches sur l'émission de la vapeur d'eau par les plantes et sur leur désiccation spontanée. C.R. 138. 16.

1159. *W. R. Köhler*. Über die plastischen und anatomischen Veränderungen bei Keimwurzeln und Luftwurzeln, hervorgerufen durch partielle mechanische Hemmungen. S.N.G.L. 28—29. 59.

Technische Mechanik.

1160. *A. Sommerfeld*. Über technische Mechanik. D.V.M. 13. 156.

Stäbe.

1161. *L. Prandtl*. Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben. D.V.M. 13. 31.

Siehe auch 243—245; 389; 408; 409; 1169.

Balken.

Siehe 410.

Bogenträger.

1162. *A. Ludin*. Der dreifach statisch unbestimmte Bogenträger unter der Einwirkung beliebig gerichteter Kräfte. Z.S. 49. 460.

1163. **G. Ramisch*. Elementare Untersuchung des Bogenfachwerkträgers. Z. G.U. 15. 189.

1164. **J. Solín*. Neue Konstruktion der Kämpferdrucklinie eines vollwandigen Bogenträgers mit 2 Gelenken (tschech.). M.A.T.P. 1903 No. 3.

Gewölbe.

Siehe 59.

Erddruck.

1165. *J. Vandone*. Sulle fondazioni tubulari trivellate. R.F.M. 4B. 393.

Siehe auch 46.

Brücken.

1166. *H. Müller-Breslau*. Zur Theorie der Windverbände eiserner Brücken. S.A.B. 1903. 948.

Eisenbahnwesen.

1167. *C. Renard*. Sur un nouveau système de train routier dit à propulsion continue. C.R. 137. 1234.

Siehe auch 314.

Maschinenlehre.

1168. **P. Razous*. Détermination de la puissance des moteurs d'automobiles. R.S (4) 21. 207.

1169. **C. Schmitz*. Die Umrechnung der kalorischen Leistung einer Kühlmaschine. E.K.B. 2. 121.

1170. **C. Schmitz*. Berechnung einer Ammoniak-Kompressions-Kühlmaschine. E.K.B. 3. 50.

1171. **J. F. Hey*. Les moteurs à gaz. M.G.W.G. 37. 69.

Siehe auch 204; 856.

Dampfmaschinen.

1172. *V. Grazioli*. Delle macchine a vapore Compound. R.F.M. 5I. 213.

Regulatoren.

1173. *W. Hort*. Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenreglung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Reglungsvorgänge. Z.S. 50. 233.

Siehe auch 1176.

Hydraulik.

1174. **E. Fontaneau*. Préliminaires d'hydraulique. A.F. 1903. 32.

1175. **M. Schmidt*. Untersuchungen über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. M.F.I. 11. 1.

1176. *J. Meunier*. Sur un appareil destiné à régulariser le fonctionnement des trompes à vide. C.R. 138. 693.

1177. *C. Anthony*. Un nuevo turbidimetro. A.S.A. 56. 71.

Siehe auch 46.

Schiffsbewegung.

1178. *J. A. Normand.* Sur la détermination du déplacement d'un bâtiment de combat. C.R. 138. 331.

1179. **J. Schütte.* Einfluß der Schlingerkiele auf den Widerstand und die Rollbewegung der Schiffe in ruhigem Wasser. J.S.G.B. 4. 341.

1180. *J. A. Normand.* De l'influence de la surimmersion sur la vitesse. C.R. 137. 1223.

Luftschiffahrt.

1181. *C. Renard.* Sur la possibilité de soutenir en l'air un appareil volant du genre helicoptère en employant les moteurs à explosion dans leur état actuel de légèreté. C.R. 137. 843.

1182. **C. F. Marvin.* Note upon economical shapes for cutting envelopes of balloons. M.W.R. 31. 314.

Photographie.

Siehe 1134.

Spektralanalyse.

1183. **A. Garbasso.* Su la teoria dell' analisi spettrale. B.F. 469.

Siehe auch 565.

Elektrotechnik.

1184. **D. Negrotti.* Calcolo delle lunghe linee di trasmissione di energia mediante correnti monofasi. R.T.T. 1. 542; 740.

1185. *W. Duane* and *C. A. Lory.* On the differential telephone. P.R. 18. 275.

Siehe auch 1238.

Telephon.

Siehe 1185; 1186.

Telegraphenwesen.

1186. **E. Brunè* e *C. Turchi.* Nuovo sistema di telegrafia e telefonia simultanea. N.C.P. (5) 6. 221.

Drahtlose Telegraphie.

1187. *C. A. Chant.* Variation of potential along the transmitting antenna in wireless telegraphy. A.J.S. (4) 17. 1.

1188. *M. Abraham.* Zur drahtlosen Telegraphie. P.Z. 5. 174.

1189. *F. Braun.* Methoden zur Vergrößerung der Sonderenergie für drahtlose Telegraphie (sog. Energieschaltung). P.Z. 5. 193.

1190. *N. Vasilescu-Karpen.* Nouveau récepteur pour la télégraphie sans fil. C.R. 138. 499.

Siehe auch 940.

Instrumentenkunde.

1191. **P. Vaudrey.* Sur les appareils indicateurs et enrégistreurs dans les applications aux sciences et à l'industrie. A.F. 1903. 220.

1192. **Guglielmo.* Intorno a due modi per determinare il raggio di curvatura della superficie dello spigolo nei coltelli delle bilancie e dei pendoli. N.C.P. (5) 5. 402.

1193. *J. Richard.* Sur un cinémomètre différentiel enregistreur. C.R. 138. 140.

1194. **F. Florio.* Nouvelles machines pneumatiques à mercure. J.P. (4) 3. 38.

1195. *C. E. Wasteels.* Een variatiemeter. H.V.C. 6.

Siehe auch 17; 143; 180; 189; 337.

Physikalische Instrumente.

1196. **A. Pfeiffer.* Gergk-Luftpumpen. Z.P. 17. 61.

1197. **G. P. Grimaldi* e *A. Accolla.* Sopra un apparechio per la misura di piccoli allungamenti. N.C.P. (5) 7. 202.

1198. *G. Guglielmo.* Intorno ad alcune modificazioni de volumenometro e del modo d'usarlo ed intorno ad un volumenometro a peso. R.A.L.R. (5) 12B. 617.

1199. *M. A. Mesnager.* Sur un appareil enregistreur permettant de mesurer à travers une paroi solide, supportant des pressions relativement élevées, des différences de pression aussi faibles que l'on veut. C.R. 138. 75.

1200. *E. Tassilly* et *A. Chamberland.* Sur un capillarimètre. C.R. 137. 645.

1201. *J. Thovert.* Diffusiomètre. C.R. 137. 1249.

1202. **E. Timmensch.* Les pyromètres et leurs applications à l'industrie. U.I. 1901. 101.

Siehe auch 245; 376; 377; 473; 683; 684.

Wagen.

1203. *V. Crémieu.* Balance azimutale quadrifilaire. C.R. 138. 893.

1204. *H. Poincaré.* Théorie de la balance azimutale quadrifilaire. C.R. 138. 869.

Siehe auch 1192; 1271.

Wellenmaschinen.

1205. **K. Mack*. Zur Konstruktion der Machschen Wellenmaschinen. Z.P. 16. 265.

1206. **P. v. Rostowzew*. Zwei neue Wellenmaschinen. Z.P. 16. 274.

Akustische Instrumente.

1207. **A. Lampa*. Aus der Statistik der Prüfungsstelle für Normalstimmgabeln in Wien. B.F. 146.

Optische Instrumente.

1208. *G. Sagnac*. Lois de la propagation anomales de la lumière dans les instruments d'optique. C.R. 138. 479.

1209. *G. Sagnac*. Vérfications expérimentales des lois de la propagation anomale de la lumière le long de l'axe d'un instrument d'optique. C.R. 138. 619.

1210. *C. Chabrié*. Sur le principe de la construction d'un appareil d'optique destiné à obtenir de très forts grossissements. C.R. 138. 265.

1211. **G. W. Ritchey*. On methods of testing optical mirrors during construction. A.J.C. 19. 58.

1212. *C. Chabrié*. Sur les applications du diastoloscope à l'étude des déplacements des objets lumineux. C.R. 138. 799.

1213. *C. Chabrié*. Sur le diastoloscope et les résultats qu'il a permis d'obtenir. C.R. 138. 560.

1214. **O. Lummer* u. *E. Gehrcke*. Theorie und Leistungsfähigkeit der Dispersionsapparate hoher Auflösungskraft. A.P.T.R. 4. 61.

1215. **T. Vautier*. Sur un réfractomètre à réflexions. J.P. (4) 2. 888. C.R. 137. 615.

1216. *J. Joly*. An improved polarizing vertical illuminator. P.S.D. (2) 10. 1.

1217. **A. E. Conrady*. On the chromatic correction of object glasses. M.N.A.S. 64. 458.

1218. **A. Larsen*. Das Aktinoskop. M.F.L. 2. 108.

1219. **E. Wandersleb*. Die von M. v. Rohr gegebene Theorie des Veranten, eines Apparats zur richtigen Betrachtung von Photographien. V.P.G. 6. 44.

1220. *L. Heine*. Ein neues Epidiaskop. D.V.N. 75. 310.

1221. **A. Larsen*. Ein Photometer. M.F.L. 2. 112.

1221 a. **J. Simmance*. Das Simmance-Abadysche Flickerphotometer. D.M. 12. 16.

1222. *F. F. Martens* u. *F. Grünbaum*. Über eine Neukonstruktion des Königschen Spektralphotometers. A.P.L. (4) 12. 984.

1223. *J. Elster* u. *H. Geitel*. Über eine verbesserte Form des Zinkkegelphotometers zur Bestimmung der ultravioletten Sonnenstrahlung. P.Z. 5. 238.

Siehe auch 527; 528; 599.

Stereoskop.

1224. *A. Schell*. Das Universalstereoskop. S.A.W. 113. 949.

1225. *E. Deville*. On the use of Wheatstone stereoscope in photographing surveying. P.T.R.S.C. (2) 8. 63.

1226. *G. Jäger*. Das Strobostereoskop. S.A.W. 112. 985.

1227. **A. Schell*. Konstruktion und Betrachtung stereoskopischer Halbbilder. A.A.W. 1903. 279.

Siehe auch 96.

Mikroskop.

1228. **R. T. Glazebrook*. Theories of resolving powers in a microscope. P.P. S.L. 19 Suppl. 18.

1229. —. Theories of resolving power of a microscope. N. 69. 497.

1230. **A. Gleichen*. Die Vergrößerung des Mikroskopes unter Berücksichtigung der Refraktion und Akkomodation des Auges. D.M. 12. 135.

1231. *V. de Souza-Brandão*. O novo microscopio da commissao do serviço geologico. C.C.S.G.P. 5. 118.

Spektroskop.

1232. **T. H. Blakesley*. Direct vision spectroskope of one kind of glass. P. P.S.L. 18. 507.

1233. **F. L. O. Wadsworth*. On the measurements of wave-length with the concave grating objective spectroscope. M.S.P.A.O. (2) 15.

Siehe auch 562; 965.

Thermometer.

Siehe 684; 741; 1202.

Elektrische Instrumente.

1234. **W. Lebedinski*. Untersuchung der Erscheinungen an einer Induktionsrolle mittelst einer Braunschen Röhre (russ). J.R.P.C.G. 35. 531.

1235. *G. W. Pierce*. On the Cooper-Hewith mercury interruptor. P.A.Bo. 39. 389.

1236. **C. F. Jenkins*. Current interruptor. E.W. 41. 395.

1237. *L. Birkeland. On a new electric current breaker. M.S.C. 1902. No. 11.

1238. d'Arsonval et Gaiffe. Dispositifs de protection pour sources électriques alimentant des générateurs de haute fréquence. C.R. 138. 325.

1239. d'Arsonval. Nouveau dispositif électrique permettant de souffler l'arc de haute fréquence. C.R. 138. 323.

Siehe auch 779; 797; 838; 839; 930.

Elektrisiermaschinen.

1240. V. Schaffers. Nouvelle théorie des machines à influence. C. R. 138. 354.

Voltasche Säule.

Siehe 1143.

Galvanische Elemente.

1241. *C. J. Reed. Das Berthelotsche Gesetz der elektromotorischen Kräfte von galvanischen Batterien. E.C.I. 1. 492.

1242. A. Denizot. Zur Theorie der umkehrbaren galvanischen Elemente. A. P.L. (4) 13. 193.

Siehe auch 1144.

Transformatoren.

1243. *C. Hewitt. Ein neuer Stromumformer. A.E. 17. 208.

1244. G. Grassi. Effetti della dispersione e della reattanza nel funziamento dei trasformatori. Metodi di misura ed applicazioni. M.A.T. (2) 53. 47.

Siehe auch 940.

Akkumulatoren.

1245. *O. Schmidt. Über alkalische Akkumulatoren. M.P.G.Z. 5. 35.

Elektrische Meßapparate.

1246. T. Bruger. Über einige elektrodynamische Meßinstrumente der Firma Hartmann und Braun. P.Z. 4. 876.

1247. *R. Threlfall. On a new form of sensitive hot-wire voltmeter. P.P.S.L. 19. 58.

1248. V. Crémieu. Stato-voltmètre. Appareil mesurant 2 à 40000 volts en équilibre stable. C.R. 138. 503.

1249. *G. W. Walker. On the theory of the quadrant electrometer. P.P.S.L. 18. 453.

1250. *S. W. J. Smith. A portable capillary electrometer. P.P.S.L. 18. 377.

1251. *W. P. White. A convenient galvanometer. P.R. 17. 484.

1252. W. Einthoven. Ein neues Galvanometer. A.P.L. (4) 12. 1059.

1253. *C. G. Abbot. The construction of a sensitive galvanometer for spectrobolometric purposes. A.J.C. 18. 1.

1254. W. Einthoven. Sur le galvanomètre a corde. II. A.N. (2) 9. 186.

1255. V. Ijurin. O sposobe pozvoljajuščem značitelno provysit čuvstvitelnost galvanoskopov (Über eine Methode die Empfindlichkeit der Galvanoskope beträchtlich zu vermehren). M. E.P. 1901. 31.

Siehe auch 488; 833.

Magnetische Instrumente.

1256. *C. Chree. The bending of magnetometer deflexion-bars. P.P.S.L. 19. 20; F.M. (6) 7. 39.

1257. *P. Curie et C. Cheneveau. Sur un apparail pour la détermination des constantes magnétiques. JP. (4) 2. 796.

Siehe auch 406.

Fernrohre.

1258. *A. E. Conrady. On the chromatic correction of object glasses. M. N.A.S. 64. 182.

1259. F. Boquet. Sur la flexion des lunettes. B.A. 21. 28.

1260. *F. L. O. Wadsworth. On the construction of telescopes whose relative or absolute focal length shall be invariable at all temperatures. M.S.P.A.O. (2) 16; M.N.A.S. 63. 573.

Siehe auch 1002.

Uhrmacherkunst.

1261. J. Andrade. La théorie de la synchronisation des horloges. A.S.G. (4) 17. 139.

1262. *L. Defosser. Die Reibungsarbeit bei Uhren. D.U.Z. 27. 186; 202; 217; 242.

1263. *R. Yrk. Außerordentliche Eingriffe bei Uhrwerken. D.U.Z. 27. 294.

Chronometer.

1264. *J. Andrade. Chronométrie: les régimes limites et la stabilité de la synchronisation. B.F. 51.

1265. R. L. Mond et M. Wildermann. Nouveau type perfectionné de chronographe. C.R. 138. 494.

Siehe auch 1008.

Geodätische Instrumente.

1266. Schönemann. Die Verwendung der einfachen Kamera zur Ermittlung

von Höhen und Entfernungen. V.N.V.B. 60. 101.

1267. *A. A. Vassilief.* Darlegung und Nachweis einiger systematischer Fehler in Jädevins Basisapparat (russ). A.P.B. (5) 19. No. 3. 95.

Siehe auch 1018.

Geophysikalische Instrumente.

1268. * *M. T. Edelmann.* Vertikalvariometer für erdmagnetische Messungen im Luftballon. B.F. 815.

Siehe auch 1050.

Barometer.

1269. *E. Rosenthal.* Über die elastische Nachwirkung bei Aneroidbarographen. A.P.B. (5) 19. No. 3. 115.

Hygrometer.

1270. *G. Guglielmo.* Intorno ad un completo igrometro ad assorbimento. R. A.L.R. (5) 12B 557.

1271. * *G. Guglielmo.* Intorno ad un igrometro-bilancia ad indicazioni assolute e continue. B.F. 341.

Siehe auch 684.

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN,
C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

51. BAND. 3. HEFT.

MIT 3 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 31. Dezember 1904.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Hanssenstraße 4, Sendungen für die Redaktion an.

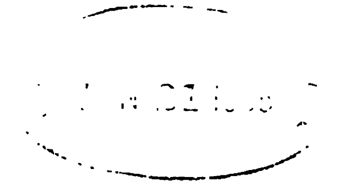
☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Biske, A. Börsch, K. Doehlemann, V. Fischer, A. Grünwald, G. Hamel, G. Herglotz, K. Heun, J. Horn, A. V. Leon, F. Ludwig, K. Mack, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, R. v. Mises, † J. Petzval, R. Rothe, C. Runge, L. Schleiermacher, K. Schwarzschild, A. Sommerfeld, P. Stäckel, S. Wellisch, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, R. Wölffing.



Zur Torsionsfestigkeit.

Von L. HENNEBERG in Darmstadt.

§ 1.

Die Achse des auf Torsion zu berechnenden Stabes sei in die z-Achse des Koordinatensystemes gelegt.

Die Berechnung des Stabes auf Torsion, bezw. die Bestimmung der Komponenten τ_x und τ_y der tangentialen Spannung[1]) in einem zur z-Achse senkrechten Querschnitte erfolgt dann in den technischen Lehrbüchern auf Grund der Formeln:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\int \tau_x df = 0, \tag{2}$$

$$\int \tau_y df = 0, \tag{3}$$

$$M_t + \int (\tau_x \cdot x - \tau_y \cdot y) df = 0, \tag{4}$$

wobei M_t das Torsionsmoment bedeutet, und wo die Integrale in den Gleichungen (2) bis (4) über den ganzen Querschnitt auszudehnen sind.

Die Gleichung (1) ist hergeleitet aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizität, die Gleichungen (2) bis (4) aus der Bedingung, daß die äußeren Kräfte mit den Spannungskräften im Gleichgewicht stehn.

Zu den Gleichungen (1) bis (4) tritt dann noch eine Grenzbedingung hinzu:

Es muß am Rande des Querschnittes die resultierende tangentiale Spannung

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}, \tag{5}$$

1) Es sind hier die Bezeichnungen eingehalten, die sich in der Festigkeitslehre von Grashof finden. τ_x ist somit die Komponente der Spannung in der Richtung der y-Achse, τ_y diejenige in der Richtung der x-Achse. Nach den Bezeichnungen der analytischen Mechanik von Kirchhoff würde sein $\tau_x = Y_z$, $\tau_y = X_z$.

welche mit der x-Achse den durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_x}{\tau_y} \tag{6}$$

bestimmten Winkel α einschließt, in die Tangente der Randkurve des Querschnittes fallen.

Die Bestimmung von τ_x und τ_y erfolgt in der Weise, daß versuchsweise τ_x und τ_y als möglichst einfache Funktionen von x und y angenommen werden, die derartig zu wählen sind, daß durch dieselben für spezielle und zu bestimmende Werte der Konstanten sämtlichen Gleichungen (1) bis (4), sowie der Grenzbedingung genügt werden kann. Diese Forderung, daß τ_x und τ_y möglichst einfache Funktionen sein sollen, ist genauer dahin zu präzisieren: Es sollen für den allein in Betracht kommenden Fall einer Begrenzung des Querschnittes durch algebraische Kurven τ_x und τ_y ganze Funktionen von x und y sein von möglichst niedrigem Grade und einer möglichst geringen Zahl von Konstanten.

Sind in dieser Weise τ_x und τ_y durch Probieren ermittelt, so ist die größte im Querschnitt auftretende tangentiale Spannung zu finden. Aus derselben ergibt sich dann die Gleichung für die Dimensionenberechnung durch die Bedingung, daß die zulässige tangentiale Spannung nicht überschritten werden darf.

Die hier geschilderte Methode, die sich in den technischen Lehrbüchern findet, und die wesentlich auf Grashof zurückzuführen ist[1]), soll im folgenden, im Gegensatz zu der Methode von St. Venant, als die technische Methode bezeichnet werden.

---

1) Siehe F. Grashof, Festigkeitslehre, Berlin 1866, S. 165 u. folg. Später (S. 208 u. folg.) sucht allerdings Grashof die Methode auf das St. Venantsche Problem zurückzuführen. Wenn jedoch Grashof die Funktion B_0 (nach Grashof Q_0), auf welche das St. Venantsche Problem führt, sich in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen der Koordinaten entwickelt denkt und nur die ersten Glieder berücksichtigt, so kommt dieses für nicht unendlich dünne Stäbe einem Verzicht auf die St. Venantsche Lösung gleich und einer Bestimmung von τ_x und τ_y aus den Gleichungen (1) bis (4) und der Grenzbedingung, wobei für τ_x und τ_y möglichst einfache Funktionen zu nehmen sind. A. Föppl ist viel vorsichtiger als Grashof, indem er es unentschieden läßt, ob die technische Methode auch bei anderen Querschnitten als Ellipse und Rechteck zu brauchbaren Ergebnissen führt. A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, 3. Bd., Festigkeitslehre, Leipzig 1897, S. 327 u. folg. — Siehe ferner F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 134, sowie S. 238 u. folg. Auch A. Castigliano empfiehlt ein Verfahren nach der technischen Methode A. Castigliano, Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme, Deutsche Ausgabe, Wien 1886, S. 92.

Der Zweck der folgenden Untersuchungen ist ein doppelter:

1) Es soll dieses von Grashof vorgesehene Probieren beseitigt werden durch Angabe einer ganz bestimmten Regel, die es ermöglicht, die gesuchten einfachsten Werte von τ_x und τ_y, welche den Gleichungen (1) bis (4) und der Grenzbedingung genügen, sofort anzuschreiben.

2) Es soll die technische Methode kritisiert werden durch Vergleichung mit der Methode von St. Venant.

§ 2.

Infolge der Gleichungen (1) stellt Herr L. Prandtl[1]) die Spannungskomponenten τ_x und τ_y dar durch die Ableitungen einer Funktion U:

$$\left\{\begin{aligned}\tau_x &= \frac{\partial U}{\partial x}\\ \tau_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Dann sind die Kurven

$$U = \text{const.}$$

die *Spannungslinien* des Querschnittes, d. h. die Linien, deren Tangente in jedem Punkte die Richtung der resultierenden Spannung angibt.

Die resultierende Spannung selbst hat, wie Herr L. Prandtl gezeigt hat, die Größe

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = \frac{\partial U}{\partial n}, \tag{8}$$

wenn $\frac{\partial U}{\partial n}$ die Ableitung der Funktion nach der Normale der durch den betreffenden Punkt des Querschnittes gehenden Spannungslinie bedeutet.

Außerdem wird infolge der Grenzbedingung für die Spannungskomponenten τ_x und τ_y die *Randkurve des Querschnittes eine Spannungslinie sein.*

Da es infolge der Gleichungen (7) nur auf die Ableitungen von U ankommt, so kann in U über eine additive Konstante verfügt werden.

1) L. Prandtl, „Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt." Jahresber. d. deutschen Math.-Ver., 13. Bd., 1904, S. 31. Erst durch diese Arbeit des Herrn Prandtl bin ich, da ich die Naturforscher-Versammlung 1903 nicht besucht habe, zur Kenntnis seiner neuen Darstellung der Torsionsspannungen gelangt. Auf dieselbe Darstellung war ich vollkommen unbeeinflußt von Herrn Prandtl gekommen. Als die Arbeit des Herrn Prandtl erschien, war die vorliegende Abhandlung wie die nachfolgende „Über einige Folgerungen, die sich aus dem Satze von Green für die Torsion von Stäben ergeben" schon druckfertig hergestellt.

Es ist also gleichgültig, welchen konstanten Wert die Funktion U am Rande annimmt. Daher ist es gestattet festzusetzen, wie dieses im folgenden geschieht, *daß die Funktion am Rande den Wert Null haben soll.*[1])

§ 3.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß durch die Gleichungen (7), wo U eine Funktion ist, die am Rande des Querschnittes Null sein soll, die Gleichungen (2) und (3) von selbst befriedigt werden, während die Gleichung (4) nur auf die Bestimmung einer multiplikativen Konstanten führt.

Bei Einsetzung der Werte von (7) in die Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$(9) \qquad \begin{cases} \int \frac{\partial U}{\partial x} df = 0, \\ \int \frac{\partial U}{\partial y} df = 0. \end{cases}$$

Die hier auftretenden Flächenintegrale lassen sich sofort in Randintegrale verwandeln. Es ist

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} df = -\int U \cos(nx) \cdot ds,$$
$$\int \frac{\partial U}{\partial y} df = -\int U \cos(ny) \cdot ds.$$

Da aber die Funktion U am Rande Null ist, so ist

$$\int U \cos(nx) \cdot ds = 0,$$
$$\int U \cos(ny) \cdot ds = 0.$$

Die Gleichungen (9) und daher die Gleichungen (2) und (3) werden durch die gemachte Annahme befriedigt.

Bei Einsetzung der Werte von (7) in die Gleichung (4) ergibt sich

$$(10) \qquad M_t + \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y \right) df = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot x = \frac{\partial (Ux)}{\partial x} - U,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} \cdot y = \frac{\partial (Uy)}{\partial y} - U,$$

---

1) Durch diese Festsetzung, daß U am Rande Null sein soll, die von Herrn L. Prandtl noch nicht gemacht wird, ergibt sich eine Vereinfachung.

daher

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot x df = \int \frac{\partial (Ux)}{\partial x} df - \int U df,$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y df = \int \frac{\partial (Uy)}{\partial y} \cdot df - \int U df.$$

Die beiden rechts zuerst stehenden Integrale lassen sich in Randintegrale verwandeln

$$\int \frac{\partial (Ux)}{\delta x} \cdot df = -\int Ux \cdot \cos(nx) ds,$$

$$\int \frac{\partial (Uy)}{\partial y} \cdot df = -\int Uy \cdot \cos(ny) ds,$$

welche beide gleich Null sind, da die unter dem Integrale stehende Funktion U am Rande den Wert Null besitzt.

Es ist daher

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} \cdot x df = -\int U df,$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y df = -\int U df$$

und aus der Gleichung (10) bezw. (4) folgt

$$M_t = 2\int U df. \tag{11}$$

Diese Gleichung (11) führt nur auf die Bestimmung einer multiplikativen Konstanten A. Wird nämlich gesetzt

$$U = AV, \tag{12}$$

wo V irgend eine Funktion ist, welche wie U am Rande des Querschnittes Null ist, so folgt aus Gleichung (11):

$$A = \frac{M_t}{2\int V df}. \tag{13}$$ [1]

§ 4.

Die ganze Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, eine Funktion U zu finden, welche am Rande des Querschnittes den Wert Null annimmt. Daß im übrigen diese Funktion U nebst ihren ersten Ableitungen im Innern des Querschnittes endlich, stetig und eindeutig sein muß, ist selbstverständlich.

---

1) Die Formeln (11) und (13) sind schon in der Arbeit des Herrn Prandtl enthalten.

Ist

$$F(x, y) = 0$$

die Gleichung der Randkurve, so wird der Bedingung, daß U am Rande Null sein soll, genügt, wenn gesetzt wird

(14) $$U = AF(x, y) \cdot \Psi(x, y),$$

wobei $\Psi(x, y)$ eine willkürliche Funktion ist, welche am Rande jedenfalls nicht unendlich groß sein darf.

Die technische Methode fordert nun, daß τ_x und τ_y möglichst einfache Funktionen sind, bezw. für eine algebraische Begrenzungskurve ganze Funktionen sind von möglichst niedrigem Grade. Dieser Forderung wird genügt, wenn gesetzt wird:

$$\Psi(x, y) = 1,$$

so daß

(15) $$U = A \cdot F(x, y).$$

Dann ist

(16) $$\begin{cases} \tau_x = A \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \\ \tau_y = -A \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}, \end{cases}$$

wobei infolge der Gleichung (13)

(17) $$A = \frac{M_t}{2\int F(x, y)\,df}.$$ [1]

Ist die Randkurve eine algebraische Kurve vom $n$ten Grade, so sind bei Zugrundelegung des Gesetzes (15), auf welches die technische Methode führt, die Spannungslinien

(18) $$F(x, y) = \text{const.}$$

auch vom $n$ten Grade und die Komponenten τ_x und τ_y der Spannung ganze Funktionen vom Grade $n - 1$. Ist insbesondere die Randkurve symmetrisch in bezug auf die Koordinatenachsen, so ist

τ_x eine ungerade Funktion in bezug auf x und eine grade Funktion in bezug auf y,

τ_y eine grade Funktion in bezug auf x und eine ungerade in bezug auf y.

---

[1] Es möge hier bemerkt werden, daß der Fall

$$\int F(x, y)\,df = 0,$$

wodurch A unendlich groß würde, jedenfalls dann nicht auftreten kann, wenn die Kurve

$$F(x, y) = 0$$

einen einzigen geschlossenen Bereich vollständig abgrenzt, da im Innern dieses Bereiches die Funktion $F(x, y)$ überall dasselbe Vorzeichen haben muß.

Hierdurch werden die Forderungen, die sich aus der Symmetrie des Querschnittes für die Spannungen ergeben, von selbst befriedigt.

Im folgenden sollen unter Zugrundelegung des Gesetzes (15) die Rechnungen für einige spezielle Querschnitte durchgeführt werden.

§ 5.

Der Querschnitt sei eine Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Es ist daher zu setzen:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Die Gleichung der Spannungslinien wird

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \text{const.}$$

Die Spannungslinien sind somit eine Schar von ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen.

Es ist nun

$$\int^{*} F(x, y)\,df = \int^{*} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) df = -\tfrac{1}{2}\pi a b.$$

Die Gleichung (17) ergibt für die Konstante A:

$$A = -\frac{M_t}{\pi a b},$$

und die Funktion U wird

$$U = -\frac{M_t}{\pi a b} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \tag{19}$$

Daher folgt für die Komponenten der Spannung:

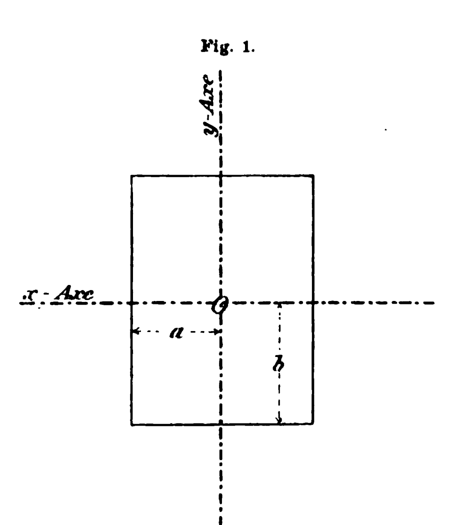
$$\begin{cases} \tau_x = -\dfrac{2 M_t}{\pi a^3 b} \cdot x, \\ \tau_y = +\dfrac{2 M_t}{\pi a b^3} \cdot y. \end{cases} \tag{20}$$

Dies sind aber bekannte Gleichungen. Die Aufgabe braucht nicht weiter durchgeführt zu werden.

Der Querschnitt sei ein Rechteck.

Die Seiten des Rechteckes sollen die Längen $2a$ und $2b$ haben. Die Begrenzung ist durch die vier Geraden gebildet:

Fig. 1.



$$x - a = 0,$$
$$x + a = 0,$$
$$y - b = 0,$$
$$y + b = 0.$$

Die Gleichung der Begrenzungskurve ist somit:

$$(x-a)(x+a)(y-b)(y+b) = 0$$

oder

$$(x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) = 0.$$

Es ist daher zu setzen

$$F(x, y) = (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2).$$

Die Spannungslinien

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = \text{const.}$$

sind Kurven vierten Grades (siehe Fig. 2, auf welcher die Spannungslinien gezeichnet sind[1])).

Nun ist:

$$\int F(x, y)\,df = 4\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}(x^2 - a^2)(y - b^2)\,dx\,dy = \tfrac{16}{9}a^3b^3$$

und daher

$$A = \frac{9}{32}\frac{M_t}{a^3b^3}.$$

Die Funktion U wird somit

$$U = \frac{9}{32}\frac{M_t}{a^3b^3}(x^2 - a^2)(y^2 - b^2), \tag{21}$$

und die Komponenten der Spannung werden:

$$\begin{cases} \tau_x = \dfrac{9}{16}\dfrac{M_t}{a^3b^3} \cdot x \cdot (y^2 - b^2), \\ \tau_y = -\dfrac{9}{16}\dfrac{M_t}{a^3b^3} \cdot y \cdot (x^2 - a^2). \end{cases} \tag{22}$$

---

1) Die Figuren 2 und 4 hat Herr W. Schlink die Freundlichkeit gehabt anzufertigen.

Die resultierende Spannung ist

$$(23) \qquad \tau = \frac{9}{16}\frac{M_t}{a^3 b^3}\sqrt{x^2(y^2-b^2)^2 + y^2(x^2-a^2)^2},$$

und die Kurven gleicher Spannung sind

$$x^2(y^2-b^2)^2 + y^2(x^2-a^2)^2 = \text{const.}$$

Die maximale Spannung tritt auf in der Mitte der längeren Rechtecksseiten und ist:

$$\tau_{\max} = \frac{9}{16}\frac{M_t}{a^2 b}, \text{ wenn } a \leqq b.$$

Im übrigen nimmt am Rande die Spannung von den Mitten der Seiten aus nach den Ecken zu ab. In den Eckpunkten ist die Spannung Null.

Fig. 2.

Diese Ergebnisse befriedigen insofern, als sie im wesentlichen übereinstimmen mit der Vorstellung, die man sich über den physikalischen Vorgang machen wird.

Es haben sich auch hier wieder bekannte Resultate ergeben.[1])

Der Querschnitt sei ein Kreuz.

Die Arme des Kreuzes seien gleich lang und gleich breit vorausgesetzt. Die Randkurve wird durch die Geraden gebildet (siehe Fig. 3):

$$\begin{aligned} x-a&=0, & y-a&=0,\\ x+a&=0, & y+a&=0,\\ x-b&=0, & y-b&=0,\\ x+b&=0, & y+b&=0. \end{aligned}$$

1) Siehe Grashof, Festigkeitslehre, Berlin 1886. S. 169.

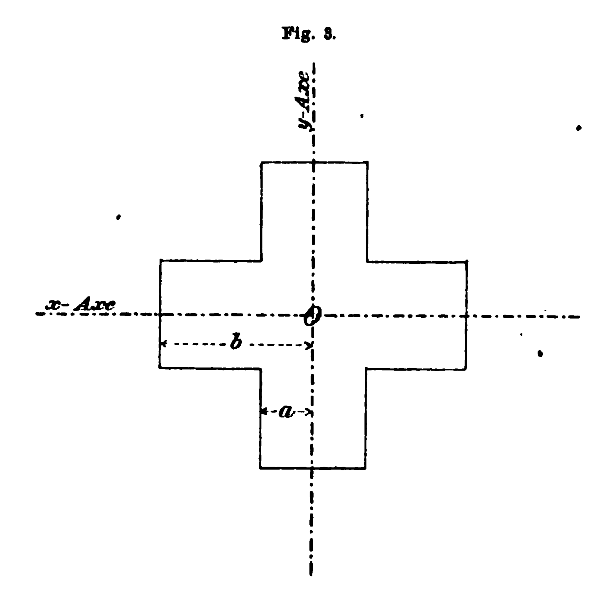
Die Gleichung der Randkurve ist

$$(x-a)(x+a)(x-b)(x+b)(y-a)(y+a)(y-b)(y+b)=0$$

oder

$$(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2)=0.$$

Fig. 3.



Es ist somit zu setzen

$$F(x,y)=(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2).$$

Die Spannungslinien

$$(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2)=\text{const.}$$

sind Kurven achten Grades (siehe Fig. 4).

Nun wird

$$\int F(x,y)\,df=\int(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2)\,df$$
$$=\tfrac{16}{225}a^3(5b^2-a^2)[2b^3(5a^2-b^2)-a^3(5b^2-a^2)]$$

und daher

$$A=\frac{225\,M_t}{32\,a^3(5b^2-a^2)[2b^3(5a^2-b^2)-a^3(5b^2-a^2)]}.$$

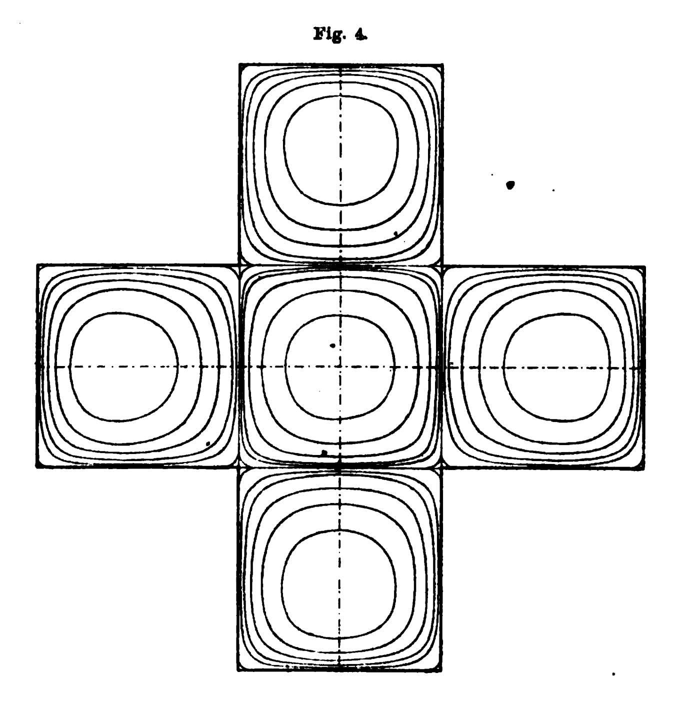
Somit ist

$$U=\frac{225\,M_t(x^2-a^2)(x^2-b^2)(y^2-a^2)(y^2-b^2)}{32\,a^3(5b^2-a^2)[2b^3(5a^2-b^2)-a^3(5b^2-a^2)]}. \tag{24}$$

und die Komponenten τ_x und τ_y der tangentialen Spannung werden

$$(25)\qquad \begin{cases} \tau_x = \dfrac{225\, M_t \cdot x(2x^2 - (a^2 + b^2))(y^2 - a^2)(y^2 - b^2)}{16 a^3 (5b^2 - a^2)[2b^3(5a^2 - b^2) - a^3(5b^2 - a^2)]}, \\ \tau_y = -\dfrac{225\, M_t \cdot y(2y^2 - (a^2 + b^2))(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}{16 a^3 (5b^2 - a^2)[2b^3(5a^2 - b^2) - a^3(5b^2 - a^2)]}. \end{cases}$$

Fig. 4.



Die größte Spannung am Rande tritt auf in den Schnittpunkten der Begrenzung mit den Koordinatenachsen und zwar ist dieselbe

$$(26)\qquad \tau_{\max} = \frac{225\, M_t a^2 b^3 (b^2 - a^2)}{16 a^3 (5b^2 - a^2)[2b^3(5a^2 - b^2) - a^3(5b^2 - a^2)]}.$$

Die hier für das Kreuz erhaltenen Ergebnisse befriedigen insofern weniger, als die Spannungslinien bei physikalischer Überlegung des Vorganges sicherlich nicht die Form haben werden, die sich hier durch die Rechnung ergeben hat.

§ 5.

In den vorstehend behandelten Beispielen sind jedesmal die einfachsten ganzen Funktionen für τ_x und τ_y bestimmt, welche den Gleichungen (1) bis (4) und der Grenzbedingung genügen. Die gefundenen Ergebnisse sind demgemäß die richtigen auf Grund der

technischen Methode. Nun muß doch verlangt werden, daß sich beim Kreuz wie beim Rechteck richtige Resultate ergeben, wie auch das Verhältnis der Abmessungen a und b gewählt wird. Man kann aber vom Kreuz, wie vom Rechteck aus zu einem Quadrate mit der Seite $2a$ übergehen, indem man $a = b$ setzt. Es müßten daher in beiden Fällen sich die nämlichen Resultate ergeben. Es soll geprüft werden, ob dieses der Fall ist.

Setzt man in der Formel (21) des Rechteckes $a = b$, so wird:

$$U = \frac{9}{32} \frac{M_t}{a^6} (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$$

und die Spannungslinien werden

$$(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) = \text{const.}$$

Setzt man in der Formel (24), die sich für das Kreuz ergeben hat, $a = b$, so folgt

$$U = \frac{225}{512} \frac{M_t}{a^{10}} [(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)]^2$$

und die Spannungslinien werden

$$(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) = \text{const.}$$

Die Spannungslinien stimmen somit tatsächlich in beiden Fällen überein.

Anders dagegen ist es mit den Komponenten τ_x und τ_y der Spannung und infolge davon auch mit der resultierenden Spannung.

Setzt man in den für das Rechteck erhaltenen Formeln (22) $a = b$, so wird:

$$(27) \qquad \begin{cases} \tau_x = \frac{9}{16} \frac{M_t}{a^6} \cdot x(y^2 - a^2), \\ \tau_y = -\frac{9}{16} \frac{M_t}{a^6} \cdot y(x^2 - a^2). \end{cases}$$

Man sieht, daß hier eine Lösung für das Quadrat vorliegt, bei welcher am Rande des Quadrates Spannungen auftreten. Insbesondere ist die größte Spannung in den Mitten der Seiten und hat den Wert

$$\tau_{\max} = \frac{9}{16} \frac{M_t}{a^6}.$$

Setzt man dagegen $a = b$ in den für das Kreuz erhaltenen Formeln (25), so folgt

$$(28) \qquad \begin{cases} \tau_x = \frac{225}{128} \frac{M_t}{a^{10}} \cdot x \cdot (x^2 - a^2)(y^2 - a^2)^2, \\ \tau_y = -\frac{225}{128} \frac{M_t}{a^{10}} \cdot y \cdot (x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - a^2). \end{cases}$$

Hier hat man für das Quadrat eine Lösung erhalten, bei welcher der Rand vollkommen spannungslos ist. Eine solche Lösung möchte auf Grund von physikalischen Überlegungen als eine durchaus unmögliche Lösung zu bezeichnen sein, und doch hat sie sich aus der Methode durch richtige Überlegungen ergeben.

Man erkennt überhaupt, daß die Gleichungen (27) und (28) zwei vollkommen verschiedene Lösungen für das Quadrat darstellen.

Da man aber das Quadrat nicht allein aus dem Rechteck und Kreuz, sondern aus allen möglichen Figuren durch einen Grenzübergang erhalten kann, und sich jedesmal andere Werte für τ_x und τ_y ergeben werden, so folgt, daß selbst die Forderung, daß τ_x und τ_y ganze Funktionen von möglichst niedrigem Grade sein sollen, nicht auf eine einzige Lösung, sondern auf unendlich viele, ganz verschiedene, Lösungen für das Quadrat führt.

Was aber hier von dem Quadrat gezeigt ist, läßt sich in gleicher Weise für jede andere Querschnittsform nachweisen. Es ergibt sich daher der allgemeine Satz:

Die technische Methode mit der Forderung, daß τ_x und τ_y ganze Funktionen sein sollen von möglichst niedrigem Grade, liefert nur dann eine einzige Lösung für den gegebenen Querschnitt, wenn die Formeln direkt für diesen Querschnitt hergeleitet werden. Dagegen führt sie auf unendlich viele, ganz von einander verschiedene, Lösungen, sobald man sich die Formeln für den gegebenen Querschnitt durch einen Grenzübergang aus denen für einen komplizierteren Querschnitt herleitet.[1])

Da aber ein solcher Grenzübergang gestattet sein muß, so entsteht die Frage, ist der technischen Methode überhaupt irgend ein Wert beizumessen? Es kann doch sicherlich kein richtiges Verfahren sein, wenn man sich unter den unendlich vielen Lösungen, auf welche die technische Methode führt, einfach diejenige aussucht, welche für die weiteren Rechnungen am bequemsten ist.

Es sollen die Gründe untersucht werden, welche die unendliche Vieldeutigkeit der Lösung bei der technischen Methode hervorrufen.

---

1) Nebenbei möge bemerkt sein, das man leicht für jeden Querschnitt Spannungszustände angeben kann, und sogar unendlich viele, die den Gleichungen (1) bis (4) und der Grenzbedingung entsprechen und bei denen der ganze Rand vollkommen spannungsfrei ist. Ist

$$F(x, y) = 0$$

die Gleichung der Randkurve, so braucht man nur zu setzen:

$$U = A[F(x, y)]^n, \text{ wo } n > 1.$$

§ 6.

Vergleicht man die vorstehenden Ergebnisse mit den Resultaten von St. Venant, so fällt zunächst ins Auge, daß sich hier unendlich viele Lösungen ergeben haben, während das Problem von St. Venant für jeden Querschnitt nur eine einzige, ganz bestimmte Lösung liefert. Es ist dieses die Folge davon, daß Voraussetzungen, die bei dem St. Venantschen Probleme gemacht werden, bei der technischen Methode fallen gelassen sind.

Die aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizität

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

hergeleitete Gleichung (1), in welcher τ_x und τ_y unabhängig sein sollen von z, ist schon erfüllt, wenn

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$

während das St. Venantsche Problem für den Fall der Torsion voraussetzt:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_z = 0.$$

Die Voraussetzungen, welche der technischen Methode zugrunde liegen, sind demgemäß viel allgemeiner, als die bei St. Venant. Daher kommen bei der technischen Methode die unendlich vielen Lösungen.

Es sollen die Bedingungen untersucht werden, welche für die Funktion U, die τ_x und τ_y bestimmt, bestehen, damit sich die Lösung von St. Venant ergibt.

Bei St. Venant ergibt sich für τ_x und τ_y[1]):

$$(29) \qquad \begin{cases} \tau_x = -\dfrac{Eb_0}{2(1+\mu)}\left(x - \dfrac{\partial B_0}{\partial y}\right), \\[2ex] \tau_y = \dfrac{Eb_0}{2(1+\mu)}\left(y + \dfrac{\partial B_0}{\partial x}\right), \end{cases}$$

1) Siehe die mustergültige Darstellung des Problemes von St. Venant in A. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig 1862. S. 91.

wo B_0 eine Funktion von x und y ist, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2} = 0 \tag{30}$$

und der Grenzbedingung

$$\frac{\partial B_0}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial B_0}{\partial y} \cos(ny) = x \cos(ny) - y \cos(nx)$$

genügt.

Sollen nun die Gleichungen (7) auf die Lösung von St. Venant führen, so muß sein

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \cdot \left(x - \frac{\partial B_0}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \cdot \left(y + \frac{\partial B_0}{\partial x}\right)$$

oder

$$\frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \frac{\partial B_0}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \cdot y$$
$$\frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \frac{\partial B_0}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \cdot x$$

Werden die aus diesen Gleichungen folgenden Werte der Ableitungen $\frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 B_0}{\partial y^2}$ in Gleichung (30) eingesetzt, so ergibt sich eine Identität. Dagegen folgt durch Differentiation der ersten Gleichung nach y und der zweiten Gleichung nach x:

$$\frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \frac{\partial^2 B_0}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{Eb_0}{2(1+\mu)},$$
$$\frac{Eb_0}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\partial^2 B_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{Eb_0}{2(1+\mu)},$$

und daraus für U die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{Eb_0}{1+\mu} = 0,\text{[1]} \tag{31}$$

welche erfüllt sein muß, wenn die Funktion U die St. Venantsche Lösung ergeben soll.

Um die Gleichung (31) für U weiter zu vereinfachen, sei gesetzt

$$U = \frac{Eb_0}{1+\mu} \cdot \left(W - \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2)\right). \tag{32}$$

Dann ergibt sich für W die Differentialgleichung[1])

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \tag{33}$$

---

1) Diese Gleichung (31) findet sich schon in anderer Weise hergeleitet in der Arbeit des Herrn L. Prandtl.

und, da an dem Rande $U = 0$ sein soll, die Grenzbedingung

$$W = \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2).\text{[1]} \tag{33a}$$

Durch die Differentialgleichung für W, welche besagt, daß W wie B_0 der reelle Teil einer Funktion komplexen Argumentes ist, und durch die Grenzbedingung, die sich für W ergeben hat, ist W in gleicher Weise wie die Funktion B_0 für jeden Querschnitt nach dem Prinzipe von Dirichlet eindeutig bestimmt. Diese sich so ergebende Funktion W muß die St. Venantsche Lösung liefern. Ob nun bei der Auffindung der Lösung von St. Venant die Funktion B_0 oder die Funktion W mit Hilfe der Methoden der Funktionentheorie bestimmt wird, ist gleichgültig. Man könnte vielleicht die Bestimmung von W für zweckmäßiger halten, da die Funktion W in unmittelbarerer Weise auf die wichtigen Spannungslinien führt.

Die Verallgemeinerung in den Voraussetzungen bei der technischen Methode gegenüber der Methode von St. Venant hat zur Folge, daß die Differentialgleichung (31) für U fallen gelassen ist, welche bewirken würde, daß man die St. Venantsche Lösung erhält.

Prüft man bei den verschiedenen durchgerechneten Beispielen die Funktion U darauf hin, ob sie der Gleichung (31) genügt, so findet man, *daß dieses nur bei der Ellipse der Fall ist.* Die für das Rechteck schon von Grashof gegebenen Formeln (22), sowie die hier für das Kreuz entwickelten Formeln (25) liefern keine Lösung, die dem St. Venantschen Probleme entspricht.[2])

Die Gründe, die den Techniker veranlaßt haben, abgesehen von dem Falle der Ellipse auf die St. Venantsche Lösung zu verzichten, waren selbstverständlich die folgenden:

Die Bestimmung der Funktion B_0 ist eine so schwierige, daß deren Auffindung für jeden einzelnen Querschnitt ein Problem für sich bildet.

---

1) Vergl. A. E. H. Love, A Treatise of the mathematical theory of elasticity. Vol. I. Cambridge 1892. p. 160.

2) Daß die für das Rechteck erhaltenen Gleichungen (22) eine Annäherung an die dem St. Venantschen Probleme sind, folgt schon aus der Ähnlichkeit der Spannungslinien, die sich in den beiden Fällen ergeben. Vergl. die Tafel mit der von L. Prandtl für das Rechteck gegebenen Zeichnung der Spannungslinien. Dagegen bedarf die Frage, innerhalb welcher Grenzen für das Verhältnis $\frac{a}{b}$ die Formel (23) eine für technische Zwecke genügende Annäherung an die aus dem St. Venantschen Problem folgende Formel liefert, einer besonderen Untersuchung, die hier nicht geführt werden soll.

Dazu kommt, daß, abgesehen von dem Falle der Ellipse, in den wenigen bislang behandelten Fällen diese Funktion so kompliziert ist, daß der Techniker sie für seine weiteren Rechnungen nicht zu verwenden imstande ist.

§ 7.

Es frägt sich nun, was soll der Techniker tun, wenn er einen stabförmigen Körper hat, auf den in Ebenen senkrecht zur Achse Kräftepaare wirken?

Die Berechnung des Körpers nach dem St. Venantschen Probleme, so schön dasselbe ist, verbietet sich schon von selbst durch die Schwierigkeit der Untersuchung und die Kompliziertheit der Formeln.[1]) Dazu kommt ein physikalisches Bedenken: die Annahme des St. Venantschen Problemes

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_z = 0,$$

also die Annahme, daß sogen. *reine Torsion* vorliegt, ist eine willkürliche und in keiner Weise in allen Fällen durch Versuche als bewiesen zu betrachten.

Was die Berechnung nach der technischen Methode betrifft, so kann man allerdings, wie dieses gezeigt ist, leicht eine einfache Lösung herleiten, mit der man zu rechnen imstande ist. Aber schon die Forderung, daß τ_x und τ_y ganze Funktionen sind von möglichst niedrigem Grade, führt in ihren Konsequenzen auf unendlich viele, ganz voneinander verschiedene Lösungen. Wie wird dieses erst der Fall sein, wenn man die durchaus willkürliche Forderung, daß τ_x und τ_y und damit U ganze Funktionen von möglichst niedrigem Grade sind, fallen läßt und für U jede ganze Funktion und vielleicht auch noch transzendente Funktionen zuläßt? Man hat gar keine Gewähr dafür, daß diejenige Lösung, die man aus irgend einem rechnerischen Grunde herausgreift, eine Annäherung an die tatsächlichen Spannungsverhältnisse liefert.

Nur in einem einzigen, ganz speziellen Falle kann vielleicht von vornherein behauptet werden, daß die technische Methode eine Annäherung an den tatsächlichen Spannungszustand liefert, nämlich in dem Falle eines sehr dünnen Stabes, in dem die höheren Potenzen der Koordinaten x und y der Punkte des Querschnittes vernachlässigt werden dürfen. Bildet man sich in diesem Falle bei einer Begrenzung durch eine algebraische Kurve $n$ten Grades die Funktion U nach der

1) Daß man für jeden Querschnitt bei Torsionsinanspruchnahme die St. Venantsche Lösung durch ein Experiment vermittels Seifenblasen finden kann, hat L. Prandtl in der schon zitierten Arbeit gezeigt.

Gleichung (15), wobei jedoch nicht ein Übergang von einem komplizierteren Querschnitt zum gegebenen vorgenommen werden darf, so erhält man eine angenäherte Lösung für die Spannungskomponenten τ_x und τ_y, wie sie sich ergibt, wenn alle Potenzen der Koordinaten von der $n$ten oder einer höheren Ordnung vernachlässigt werden.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt, daß die technische Methode, auch wenn die Formeln noch so bequem sind, bei der Dimensionenberechnung nur mit der größten Vorsicht angewendet werden darf. *Man muß es sich zur Regel machen, keine Formel, die sich durch die technische Methode ergeben hat, bei seinen Berechnungen zu verwenden, von der nicht durch Versuche nachgewiesen ist, daß sie eine genügende Annäherung an die tatsächlichen Spannungsverhältnisse liefert.*

Hier ist dem kontrollierenden Experiment ein weiter Spielraum gegeben.

Darmstadt, im Februar 1904.

Über einige Folgerungen, die sich aus dem Satz von Green für die Torsion von Stäben ergeben.

Von L. Henneberg in Darmstadt.

§. 1.

In einer Arbeit von Herrn L. Prandtl[1]) sind die Spannungen, die in einem auf Torsion beanspruchten Stabe auftreten, in folgender Weise dargestellt:

Ist die z-Achse des Koordinatensystemes in die Achse des Stabes gelegt, so sind die Spannungskomponenten τ_x und τ_y in einem zur z-Achse senkrechten Querschnitte darstellbar in der Form

$$(1)\qquad \begin{cases} \tau_x = \quad A\dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ \tau_y = -A\dfrac{\partial V}{\partial y}, \end{cases}$$

wo V eine für alle Punkte des Querschnittes endliche, stetige und eindeutige Funktion der Koordinaten x und y ist, *die am ganzen Rande*

1) Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt. Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 13. Bd. 1904 S. 31.

des Querschnittes den Wert Null annimmt[1]), während sich für die Konstante A der Wert ergibt

(2) $$A = \frac{M_t}{2\int V\,df},$$

falls M_t das Torsionsmoment bedeutet, welches in der vorliegenden Arbeit positiv eingeführt werden soll.

Ist die Funktion V gefunden, so stellen die Kurven

$$V = \text{const.}$$

die *Spannungslinien* des Querschnittes dar, d. h. diejenigen Linien, deren Tangente die Richtung der resultierenden Spannung liefert. Die resultierende Spannung selbst wird

(3) $$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = A\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} = \pm A\frac{\partial V}{\partial \nu},$$

wenn $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ die Ableitung von V nach der Normale der Spannungslinie bedeutet.[2])

Die *orthogonalen Trajektorien*[3]) der Spannungslinien, die auch definiert werden können als die Kurven, für welche

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

wo hier $\frac{\partial V}{\partial n}$ die Ableitung nach der Normale der Trajektorie bedeutet, haben die Eigenschaft, daß in jedem Punkte die resultierende Spannung in die Normale der Trajektorie fällt.

Soll die Funktion V die St. Venantsche Lösung des auf Torsion beanspruchten Querschnittes ergeben, so muß dieselbe der Differentialgleichung

(4) $$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -1$$

genügen. Durch diese Differentialgleichung und die Grenzbedingung ist die Funktion V für jeden Querschnitt bestimmt und läßt sich, wie

1) Durch diese von L. Prandtl nicht gemachte Festsetzung tritt eine Vereinfachung ein, siehe die vorhergehende Abhandlung des Verfassers „Zur Torsionsfestigkeit", S. 225 dieses Heftes.

2) Es ist hier stets mit ν die Normale der durch den betreffenden Punkt gehenden Spannungslinie bezeichnet; mit n dagegen die Normale einer anderen Kurve.

3) Die orthogonalen Trajektorien sind von Herrn Prandtl noch nicht eingeführt.

die von St. Venant eingeführte Funktion B_0 nach bekannten Methoden ermitteln.

Der Zweck der folgenden Untersuchungen ist, durch die Anwendung des Satzes von Green Sätze über die Spannungsverteilung im Querschnitt für die St. Venantsche Lösung eines auf Torsion beanspruchten Stabes zu erhalten. Die wichtigsten der Sätze von § 4 sind schon in der Arbeit des Herrn Prandtl erhalten, allerdings in anderer Weise hergeleitet, während die übrigen Paragraphen neue Sätze liefern. Die Beweisführung ist durchweg eine andere, als bei Herrn Prandtl.

§ 2.

Sind U und V zwei Funktionen, die im Innern eines vollständig begrenzten Bereiches endlich, stetig und eindeutig sind, so ist nach Green:

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)df=-\int U\Delta V df-\int U\frac{\partial U}{\partial n}ds,$$

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)df=-\int V\Delta U df-\int V\frac{\partial U}{\partial n}ds,$$

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dy = \int(V\Delta U-U\Delta V)df,$$

wo df das Flächenelement des Bereiches und n die nach dem Innern gerichtete Normale bedeutet.

Ist in diesen Gleichungen V diejenige Funktion, auf welche die St. Venantsche Lösung führt, so ergibt sich infolge der Gleichungen (4):

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)df= \int U df-\int U\frac{\partial V}{\partial n}ds, \tag{5a}$$

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\right)df=-\int V\Delta U df-\int V\frac{\partial U}{\partial n}ds, \tag{5b}$$

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds= \int(V\Delta U+U)df. \tag{5c}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich in derselben Weise, wie dieses in der Potentialtheorie und Hydrodynamik geschieht, nämlich durch Verfügung über die Funktion U und durch Wahl des Bereiches, auf welchen die Integration erstreckt werden soll, Sätze bezüglich der Spannungsverteilung im Querschnitte herleiten.

§ 3.

In der Gleichung (5a) sei zunächst $U = V$ gesetzt und das Integral über den ganzen Querschnitt erstreckt. Dann folgt in Berücksichtigung der Grenzbedingung der Funktion V:

$$\int\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right) df = \int V df$$

und daraus nach Gleichung (2) und (3):

$$\int \tau^2 df = \tfrac{1}{2} A \cdot M_t. \tag{6}$$

Daher ist die Konstante A, wie das über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Integral

$$\int V df$$

notwendig *positiv*. Die Funktion V ist somit im ganzen Innern des Querschnittes positiv, falls sie überhaupt im ganzen Innern dasselbe Vorzeichen hat.

§ 4.

Es sei die Funktion U gleich einer Konstanten gesetzt. Dann ergibt die Gleichung (5a)

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = F, \tag{7}$$

wenn F den Inhalt des Bereiches darstellt, über dessen Begrenzung das Integral auf der linken Seite erstreckt wird.

Es sei die Gleichung (7) auf einen von einer Spannungslinie begrenzten Bereich von dem Inhalte F_1 angewandt. Dann ist, wie Herr Prandtl gefunden hat

$$\int \frac{\partial V}{\partial \nu} ds = F_1. \tag{8}$$

Da aber die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ längs einer Spannungslinie dasselbe Vorzeichen haben muß, so folgt, daß auf jeder Spannungslinie die Ableitung von V nach der nach innen gerichteten Normale positiv ist. Durchläuft man daher eine Trajektorie von ihrem Endpunkte in der Randkurve des Querschnittes aus, so muß die Funktion V fortwährend wachsen, so lange man nicht eine Spannungslinie zum zweiten Male überschreitet. Daraus folgt, daß die Funktion V, die am Rande des Querschnittes Null ist, im ganzen Innern *positiv* sein muß und stets nach dem Innern zu wächst.

Infolge der Gleichung (3) ergibt sich für den absoluten Wert der Spannung τ in einem Punkte P des Querschnittes

$$\tau = A\frac{\partial V}{\partial \nu}, \tag{9}$$

wo $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ die Ableitung von V nach der nach innen gerichteten Normale der durch P gehenden Spannungslinie bedeutet. Da aber

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(\nu x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(\nu y),$$

so ist nach (1):

$$\tau = \tau_x \cos(\nu x) - \tau_y \cos(\nu y).$$

Da τ positiv ist, so bestimmt diese Gleichung bei gegebenen Spannungslinien den Richtungssinn der in die Tangente derselben fallenden Spannung, *und zwar muß die Spannung so gerichtet sein, daß das Drehmoment derselben von einem Punkte der nach dem Inneren gerichteten Normale als Drehpunkt negativ, bezw. dem Torsionsmoment entgegengesetzt ist.*

Es seien die Spannungen wie Massen behandelt und demgemäß das über die Spannungslinie erstreckte Integral

$$\int \tau\, ds = A\int \frac{\partial V}{\partial \nu}\, ds = m_1$$

als die Spannungsmasse der Spannungslinie bezeichnet. Dann besagt Gleichung (8):

$$m_1 = AF_1, \tag{10}$$

d. h. *die Spannungsmasse einer Spannungslinie ist gleich dem Produkte der Konstanten A und dem Inhalte des von der Spannungslinie eingeschlossenen Flächenstückes.*

Werden zwei Spannungslinien betrachtet, welche die Flächenstücke F_1 und F_2 einschließen, so ergibt sich für deren Massen

$$m_1 - m_2 = A(F_1 - F_2).$$

Es folgt hieraus, daß die äußerste Spannungslinie, somit die Randkurve des Querschnittes, die größte Spannungsmasse hat, und daß die Spannungsmassen nach dem Innern des Querschnittes zu abnehmen.

Die ins Auge gefaßte Spannungslinie möge eine Länge s_1 haben. Dann ergibt die Gleichung (10) für die mittlere Spannung τ_1 auf dieser Spannungslinie

$$\tau_1 = \frac{m_1}{s_1} = \frac{AF_1}{s_1}$$

und somit für die Differenz der mittleren Spannungen zweier Spannungslinien

$$\tau_1 - \tau_2 = A\left(\frac{F_1}{s_1} - \frac{F_2}{s_2}\right).$$

Da aber, wenn man nach dem Innern des Querschnittes geht, die Inhalte der von den Spannungslinien eingeschlossenen Flächen stärker abnehmen als deren Längen, so wird die größte mittlere Spannung in der Randkurve sein und die mittleren Spannungen werden, wenn man nach dem Innern des Querschnittes zu geht, fortwährend abnehmen, bis schließlich die mittlere Spannung und damit die Spannung überhaupt Null wird, was an der Stelle des Querschnittes eintritt, wo die Spannungslinie eine unendlich kleine Länge bekommt, also in einen Punkt übergeht.

Es sei die Gleichung (7) auf ein unendlich schmales Flächenstück dF angewandt, welches durch zwei unendlich benachbarte Trajektorien und durch die kleinen Linienelemente ds_1 und ds_2 zweier Spannungslinien begrenzt ist. Dann ergibt sich, da längs der Trajektorie $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ ist:

$$\tau_1 ds_1 - \tau_2 ds_2 = A dF,$$

wenn τ_1 und τ_2 die Spannungen in den Linienelementen ds_1 und ds_2 bedeuten. Mit Hilfe dieser Gleichung ist man imstande, die Spannungen in dem ganzen von zwei benachbarten Trajektorien begrenzten Flächenstreifen anzugeben, falls die Spannung an einer einzigen Stelle des Streifens gegeben ist.

Wie die Gleichung (8), gestattet auch die allgemeinere Gleichung (7), bei welcher die Begrenzungskurve keine Spannungskurve zu sein braucht, eine mechanische Deutung:

Es ist

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos ny$$

und daher

$$A\frac{\partial V}{\partial n} = \tau_x \cos(nx) - \tau_y \cos(ny).$$

Wird mit α der Richtungswinkel der Tangente der Begrenzungskurve bezeichnet, sodaß

$$\cos(nx) = \sin\alpha, \quad \cos(ny) = -\cos\alpha$$

und ferner mit φ der Richtungswinkel der resultierenden Spannung, sodaß

$$\tau_x = \tau \sin\varphi,$$
$$\tau_y = \tau \cos\varphi,$$

so wird

$$A \frac{\partial V}{\partial n} = \tau (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = \tau \cos \vartheta,$$

wenn ϑ der Winkel ist, den die resultierende Spannung mit der Tangente der Begrenzungskurve bildet.

Aus Gleichung (7) folgt somit für eine beliebige Begrenzungskurve

$$\int \tau \cos \vartheta \, ds = AF. \tag{11}$$

Wird daher unter

$$\int q \, ds,$$

wo $q = \tau \cos \vartheta$ die Projektion der resultierenden Spannung auf die Tangente der Begrenzungskurve des Bereiches ist, die Spannungsmasse dieser Kurve verstanden, so gilt der zuerst von L. Prandtl gefundene Satz, nach welchem die Spannungsmasse einer Spannungslinie gleich dem Produkte der Konstanten A und der von der Spannungslinie eingeschlossenen Fläche ist, nicht allein für eine Spannungslinie, sondern auch für jede beliebige geschlossene Kurve.

Mit Hilfe der vorstehenden Sätze ist es leicht, sich ein Bild von der ganzen Spannungsverteilung im Querschnitt zu verschaffen, wenn das System der Spannungslinien gegeben ist.

§ 5.

Wird in den Gleichungen (5a) und (5b) einerseits $U = x$, andererseits $U = y$ gesetzt, so folgt, falls die Integrationsgrenze eine Spannungslinie ist, auf welcher die Funktion V den Wert V_0 hat:

$$\int \frac{\partial V}{\partial x} df = \int x \, df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} x \, ds = - V_0 \int \cos(\nu x) \, ds,$$
$$\int \frac{\partial V}{\partial y} df = \int y \, df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} y \, ds = - V_0 \int \cos(\nu y) \, ds,$$

und daraus, in Berücksichtigung, daß die Integrale

$$\int \cos(nx) \, ds, \quad \int \cos(ny) \, ds$$

über eine geschlossene Kurve erstreckt beide den Wert Null haben:

$$\int \frac{\partial V}{\partial x} df = \int x \, df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} x \, ds = 0,$$
$$\int \frac{\partial V}{\partial y} df = \int y \, df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} y \, ds = 0.$$

Die Gleichungen (9) und (1) ergeben somit:

$$(12)\qquad \begin{cases} \int \tau_x df = 0, \\ \int \tau_y df = 0, \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} A\int x df = \int \tau x ds, \\ A\int y df = \int \tau y ds, \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) sagen aus, *daß sämtliche Spannungskräfte, welche auf die von einer Spannungslinie begrenzte Fläche wirken, bei der Zusammensetzung sich zu einem Kräftepaare vereinigen.* Das Gleiche gilt von jeder Fläche, die durch zwei Spannungslinien begrenzt ist.

Die Gleichungen (13) lassen sich infolge von (10) schreiben:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\int x df}{F_1} = \dfrac{\int \tau x ds}{m_1}, \\ \dfrac{\int y df}{F_1} = \dfrac{\int \tau y df}{m_1}. \end{cases}$$

Nun sind aber

$$x_s = \frac{\int x df}{F_1}, \quad y_s = \frac{\int y df}{F_1}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes der von der betreffenden Spannungslinie begrenzten Fläche F_1 und

$$\xi_s = \frac{\int \tau x ds}{m_1}, \quad \eta_s = \frac{\int \tau y ds}{m_1}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes der Spannungsmasse der die Fläche F_1 begrenzenden Spannungslinie. Aus den Gleichungen (14) folgt daher:

$$x_s = \xi_s$$
$$y_s = \eta_s$$

d. h. *der Schwerpunkt der Spannungsmasse einer Spannungslinie fällt zusammen mit dem Schwerpunkt der von der Spannungslinie begrenzten Fläche.*

Insbesondere fällt der Schwerpunkt der Spannungsmasse der Randkurve des Querschnittes in den Schwerpunkt des Querschnittes.

Es ist leicht ersichtlich, daß in dem Falle eines in bezug auf die Koordinatenachsen symmetrischen Querschnittes alle diese Schwerpunkte in den Schwerpunkt des Querschnittes fallen.

§ 6.

Sätze, die sich auf die Trägheitsellipse der Spannungsmasse einer Spannungslinie beziehen, ergeben sich, wenn $U = xy$, $U = x^2$, $U = y^2$ gesetzt wird.

Es sei zunächst

$$U = xy$$

angenommen und als Integrationsgrenze eine Spannungslinie gewählt, auf welcher die Funktion V einen Wert V_0 haben möge. Dann wird aus Gleichung (5c):

$$\int \frac{\partial V}{\partial \nu} xy\,ds - V_0 \int \frac{\partial (xy)}{\partial \nu}\,ds = \int xy\,df. \tag{15}$$

Nun ist

$$\frac{\partial (xy)}{\partial \nu} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} \cos \nu x + \frac{\partial (xy)}{\partial y} \cos (\nu y)$$
$$= y \cos (\nu x) + x \cos (\nu y)$$

und daher

$$\int \frac{\partial (xy)}{\partial \nu}\,ds = \int y \cos (\nu x)\,ds + \int x \cos (\nu y)\,ds.$$

Da aber die beiden Integrale auf der rechten Seite Null sind, wie man sich leicht bei der Verwandlung derselben in Flächenintegrale überzeugen kann, so ist

$$\int \frac{\partial (xy)}{\partial \nu}\,ds = 0$$

und somit

$$\int \frac{\partial V}{\partial \nu} xy\,ds = \int xy\,df$$

oder

$$\int \tau xy\,ds = A \int xy\,df. \tag{16}$$

Ist demgemäß

$$\int xy\,df = 0,$$

so ist auch

$$\int \tau xy\,ds = 0,$$

d. h. *Die Hauptträgheitsachsen der Spannungsmasse einer Spannungslinie fallen zusammen mit den Hauptträgheitsachsen der von der Spannungslinie begrenzten Fläche.*

Da bislang überhaupt kein Gebrauch davon gemacht ist, daß der Nullpunkt des Koordinatensystemes in den Schwerpunkt des Querschnittes fällt, so gilt dieser Satz allgemein für jeden beliebig gewählten Punkt als Mittelpunkt der Trägheitsellipse.

Es sei gesetzt

$$U = x^2 \quad \text{bezw.} \quad U = y^2$$

und als Integrationsgrenze eine Spannungslinie gewählt, auf welcher die Funktion V einen Wert V_0 hat, und welche eine Fläche F_1 begrenzt. Dann ergeben die Gleichungen (5a) und (5b)

$$2\int \frac{\partial V}{\partial x} x\,df = \int x^2 df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} x^2 ds = -2\int V df - V_0 \int \frac{\partial x^2}{\partial \nu} ds,$$

$$2\int \frac{\partial V}{\partial y} y\,df = \int y^2 df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} y^2 ds = -2\int V df - V_0 \int \frac{\partial y^2}{\partial \nu} ds.$$

Nun ist

$$\int \frac{\partial x^2}{\partial \nu} ds = 2\int x \cos(\nu x) ds = -2F_1,$$

$$\int \frac{\partial y^2}{\partial \nu} ds = 2\int y \cos(\nu y) ds = -2F_1$$

und daher

$$2\int \frac{\partial V}{\partial x} x\,df = \int x^2\,df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} x^2 ds = -2\int V df + 2F_1 V_0,$$

$$2\int \frac{\partial V}{\partial y} y\,df = \int y^2\,df - \int \frac{\partial V}{\partial \nu} y^2 ds = -2\int V df + 2F_1 V_0$$

und in Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (9)

$$(17) \begin{cases} 2\int \tau_x x\,df = A\int x^2 df - \int \tau x^2 ds = -2A\int V df + 2AF_1 V_0, \\ -2\int \tau_y y\,df = A\int y^2 df - \int \tau y^2 ds = -2A\int V df + 2AF_1 V_0. \end{cases}$$

Es seien die Trägheitsmomente der Fläche F_1 für die Koordinatenachsen mit J_x und J_y, diejenigen der Spannungsmasse der die Fläche F_1 begrenzenden Spannungslinie mit Θ_x und Θ_y bezeichnet. Dann ist

$$J_x = \int y^2 df, \quad J_y = \int x^2 df,$$

$$\Theta_x = \int \tau y^2 ds, \quad \Theta_y = \int \tau x^2 ds$$

und

$$(18) \qquad \begin{cases} 2\int \tau_x x\,df = AJ_y - \Theta_y = k, \\ -2\int \tau_y y\,df = AJ_x - \Theta_x = k, \end{cases}$$

wo

$$k = -2A\int V df + 2AF_1 V_0$$

gesetzt ist.

Für die Trägheitsmomente Θ_x und Θ_y folgt

$$(19) \qquad \begin{cases} \Theta_x = AJ_x - k, \\ \Theta_y = AJ_y - k, \end{cases}$$

und die Gleichung der Trägheitsellipse der Spannungsmasse der Spannungslinie wird

$$\Theta_x x^2 + \Theta_y y^2 = 1,$$

bezw.

$$(20) \qquad (AJ_x - k)x^2 + (AJ_y - k)y^2 = 1,$$

falls die Koordinatenachsen in die Hauptträgheitsachsen gelegt sind.

Da in der ganzen Rechnung keine Voraussetzung über die Lage des Nullpunktes gemacht ist, so gelten die Gleichungen (19) und (20) für jede Lage desselben; sie liefern daher nach Bestimmung von A und k das Trägheitsmoment der Spannungsmasse für jede beliebige Achse und die Trägheitsellipse der Spannungsmasse für jeden beliebigen Mittelpunkt derselben.

Durch Addition der Gleichungen (18) folgt

$$(21) \qquad 2\int (\tau_x x - \tau_y y)\,df = AJ_p - \Theta_p = 2k,$$

wenn J_p und Θ_p die polaren Trägheitsmomente bedeuten. Nun ist aber

$$M = \int (\tau_x x - \tau_y y)\,df$$

das Drehmoment des Kräftepaares, zu welchem sich alle Spannungskräfte, die auf die von einer Spannungslinie begrenzten Fläche F_1 wirken, zusammensetzen. Es ist somit für dieses Drehmoment

$$(22) \qquad M = \tfrac{1}{2}(AJ_p - \Theta_p)$$

bezw.

$$M = k = -2A\int V df + 2AF_1 V_0$$

§ 7.

Um den Wert von V für einen beliebigen Punkt a, b, c des Querschnittes aus den Spannungen einer Spannungslinie zu finden, werde, wie bei den Untersuchungen C. Neumanns über das logarithmische Potential[1]), gesetzt

$$U = \log\text{nat}\, r, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Dann ergibt Gleichung (5c);

$$(23) \qquad \int \left(\frac{\partial V}{\partial n} \lg\text{nat}\, r - V \frac{\partial \lg\text{nat}\, r}{\partial n}\right) ds = \int \lg\text{nat}\, r \cdot df,$$

da

$$\Delta \lg\text{nat}\, r = 0.$$

Hierbei darf jedoch der Bereich, über welchen die Integrationen erstreckt sind, den Punkt a, b, c nicht enthalten, da für den Punkt $a\,b\,c$ die Funktion $U = \lg\text{nat}\, r$ unendlich wird.

Es sei die Gleichung (23) angewandt auf einen Bereich, der von einer Spannungslinie begrenzt ist, welche den Punkt $a\,b\,c$ umgibt, und außerdem von einem kleinen Kreise mit dem Radius R, der um den Punkt $a\,b\,c$ als Mittelpunkt geschlagen ist. Dann folgt aus (23), nachdem für das Linienelement des Kreises $R d\varphi$ gesetzt ist:

$$\int \frac{\partial V}{\partial \nu} \lg\text{nat}\, r ds - V_0 \int \frac{\partial \lg\text{nat}\, r}{\partial \nu} ds + R \lg\text{nat}\, R \int \frac{\partial V}{\partial r} df - \int V d\varphi$$
$$= \int \lg\text{nat}\, r df.$$

wobei ds das Linienelement der Spannungslinie und V_0 den Wert von V auf der Spannungslinie bedeutet.

Wird nun zur Grenze $R = 0$ übergegangen, so fällt das dritte Integral links weg, da

$$\lim_{R=0} R \lg\text{nat}\, R = 0,$$

das vierte wird $2\pi V$, wo V der Wert der Funktion V im Punkte abc ist, während das Integral rechts über das ganze Innere der Kreisfläche mit ausgedehnt werden darf. Es ergibt sich daher

$$(24) \qquad 2\pi V = \int \frac{\partial V}{\partial \nu} \lg\text{nat}\, r ds - V_0 \int \frac{\partial \lg\text{nat}\, r}{\partial \nu} ds - \int \lg\text{nat}\, r df$$

oder

$$2\pi V = \frac{1}{A} \int \tau \lg\text{nat}\, r ds - V_0 \int \frac{\partial \lg\text{nat}\, r}{\partial \nu} ds - \int \lg\text{nat}\, r df.$$

---

1) C. Neumann. Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential. Leipzig 1877.

Durch diese Formel ist V für jeden Punkt im Innern der betreffenden Spannungslinie bestimmt, wenn V_0 gegeben ist und die Spannung τ in jedem Punkt dieser Spannungslinie.

Ist insbesondere die Spannung τ auf der Randkurve des Querschnittes gegeben, so wird:

$$2\pi V = \frac{1}{A}\int \tau \lg \operatorname{nat} r ds - \int \lg \operatorname{nat} r df,$$

wobei das erste Integral rechts über die ganze Randkurve des Querschnittes, das zweite über die Fläche des Querschnittes auszudehnen ist.

Darmstadt, im Februar 1904.

Über die Formänderung eines zylindrischen Wasserbehälters durch den Wasserdruck.

Von C. Runge in Hannover.

Von meinem Kollegen Herrn Barkhausen wurde mir vor kurzem die Frage vorgelegt, wie man die Formänderung der zylindrischen Wand eines im senkrechten Querschnitte rechteckigen Wasserbeckens sowie das Biegungsmoment und die Querkraft im Zusammenhang mit der Ausweichung und Richtungsänderung am Boden berechnen könnte. Aus diesem Anlaß ist die folgende Arbeit entstanden.

Die Formänderung, die ein zylindrisches Gefäß, das mit Wasser gefüllt wird, durch den Wasserdruck erleidet, läßt sich in bekannter Weise berechnen, wenn man die Wandstärke überall gleich voraussetzt. Das Profil genügt einer linearen Differentialgleichung, deren Lösung sich durch die Exponentialfunktion ausdrücken läßt. Eine gleichmäßige Wandstärke würde aber im Falle eines großen Behälters unwirtschaftlich sein, weil der obere Teil der Wand viel weniger zu halten hat als der untere. In dem Folgenden soll gezeigt werden, wie man die Rechnung auch für ungleichmäßige Wandstärken durchführen kann.

Man denke sich einen senkrechten Streifen von geringer Breite aus der Zylinderwand herausgeschnitten und stelle die Gleichungen auf, die aussprechen, daß die durch die Formänderung hervorgerufenen elastischen Kräfte dem Wasserdruck das Gleichgewicht halten. Sei y die Vergrößerung des Radius des in der Höhe x unter dem oberen Rande befindlichen Querschnittes. Wir können annehmen, daß y klein

gegen den Radius sei und daß jeder Querschnitt seine Höhe x bei der Formänderung des Gefäßes nicht ändere. Der Umfang des Querschnittes ändert sich im Verhältnis y/R, wenn R den Radius des Querschnittes bezeichnet. Die horizontale Spannung wird daher gleich Ey/R, unter E den Elastizitätsmodul verstanden. Sie ruft einen rechtwinkelig zur Wand nach innen gerichteten Druck hervor, der auf die Flächeneinheit berechnet gleich der Dicke der Wandung multipliziert mit dem Verhältnis der Spannung zum Radius ist. Die Wandstärke werde mit δ bezeichnet; dann ist dieser Druck gleich $\frac{Ey\delta}{R^2}$. Er ist horizontal, da die kleinsten Ringbestandteile der Wand auch nach der Verbiegung horizontal bleiben. Dieser durch die Formänderung hervorgerufene elastische Druck wirkt dem Wasserdruck entgegen. Die Differenz

$$\gamma x - \frac{Ey\delta}{R^2} \quad (\gamma = \text{Gewicht der Volumeinheit Wasser})$$

gibt mit der Breite des senkrechten Streifens und mit dx multipliziert den Ausdruck für die horizontale Kraft, die an dieser Stelle an ihm angreift. Diese Kraft werde mit dQ bezeichnet und die Breite des Streifens werde der Einfachheit wegen gleich 1 gesetzt, so daß also

$$dQ = \left(\gamma x - \frac{Ey\delta}{R^2}\right) dx.$$

Die Summe aller dQ vom oberen Rande bis zum Querschnitt in der Höhe x und vermehrt um die horizontale Kraft, die am oberen Rande an dem Streifen angreift, die Querkraft der bezeichneten Stelle, werde mit Q bezeichnet. Dann ist die Änderung, die das Biegungsmoment M des Streifens in dem Stückchen dx erfährt gleich Qdx:

$$dM = Qdx.$$

Endlich ist, wenn mit J das Trägheitsmoment des Streifenquerschnitts bezeichnet wird

$$M = E \cdot J \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dabei ist die Krümmung des Streifens gleich d^2y/dx^2 gesetzt, was bei der geringen Abweichung von der Vertikalen unbedenklich ist.

Statt der drei Gleichungen

$$\frac{dQ}{dx} = \gamma x - \frac{Ey\delta}{R^2}, \quad \frac{dM}{dx} = Q, \quad M = EJ\frac{d^2y}{dx^2}$$

kann man auch die eine schreiben:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \gamma x - \frac{Ey\delta}{R^2}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Wandstärke δ und damit auch das Trägheitsmoment $J = \frac{\delta^3}{12}$ von x unabhängig ist, läßt sich die allgemeine Lösung angeben:

$$(1)\quad y = \frac{\gamma R^2}{E\delta} x + c_1 e^{\frac{x}{n}} \cos\frac{x}{n} + c_2 e^{\frac{x}{n}} \sin\frac{x}{n} + c_3 e^{-\frac{x}{n}} \cos\frac{x}{n} + c_4 e^{-\frac{x}{n}} \sin\frac{x}{n}.$$

Dabei ist $n = \sqrt[4]{\frac{4JR^2}{\delta}}$, und c_1, c_2, c_3, c_4 bedeuten von x unabhängige Werte, die durch die näheren Bedingungen des Problems zu bestimmen sind. Man kann zum Beispiel vorschreiben, daß der obere und untere Rand in Richtung und Lage ungeändert bleiben sollen. Dann müssen oben und unten y und dy/dx verschwinden. Das gibt vier Gleichungen für $c_1 c_2 c_3 c_4$. Oder man kann verlangen, daß der obere Rand allein in Richtung und Lage ungeändert bleiben soll und kann zugleich vorschreiben, welche Werte M und Q am Boden haben sollen. In vielen Fällen werden aus der Durchbildung des Bodens am unteren Ende Bedingungen für die Bodenwerte von y und dy/dx zu gewinnen sein, indem man die Formänderungen des Bodens und seiner Unterstützung in den noch unbekannten Bodenwerten von M und Q ausdrückt. Das gibt wieder vier lineare Gleichungen für die vier Konstanten $c_1 c_2 c_3 c_4$, die infolge dessen als lineare Funktionen der Bodenwerte von M und Q ausgedrückt werden können. Oder man kann, statt den Wert von M vorzuschreiben, verlangen, daß die Richtung der Wand am Boden senkrecht sein soll. Dann werden die Konstanten $c_1 c_2 c_3 c_4$ als lineare Funktionen des Bodenwertes von Q ausgedrückt werden können. Q ist die Summe der horizontalen Kräfte, die an dem Streifen angreifen, gerechnet von dem oberen Rande bis zu einer beliebigen Höhe x unter dem oberen Rande, also die Querkraft der Stelle x. Der Bodenwert von Q ist also gleich der Summe aller horizontalen Kräfte mit Ausnahme der Kraft, die am untersten Rande des Streifens angebracht werden muß, um das Gleichgewicht herzustellen. Das Gleichgewicht verlangt, daß die Gesamtsumme der horizontalen Kräfte Null ist. Folglich muß der Bodenwert von Q der äußeren am unteren Rande angreifenden Kraft entgegengesetzt sein. Statt den Bodenwert von Q vorzuschreiben, kann man auch einführen, daß der Boden des Gefäßes elastisch sei. Das liefert eine lineare Relation zwischen den Bodenwerten von y und Q, und da y schon infolge der drei ersten Bedingungen als lineare Funktion von Q darstellbar ist, so erhält man auf diese Weise eine lineare Gleichung für Q selbst.

Wenn die Wandstärke mit x veränderlich ist, so springt sie stets stufenweise. Innerhalb jeder Stufe gilt die allgemeine Lösung (1),

wobei aber δ und damit n für verschiedene Stufen verschiedene Werte annehmen. Es handelt sich nun darum zu berechnen, wie sich die Konstanten von Stufe zu Stufe ändern. Zunächst dürfen y und dy/dx beim Übergang von einer Stufe zur andern keinen Sprung erleiden. Allerdings würde ja der Querschnitt an der Stelle, wo eine Platte an die andere genietet ist, sich sprungweise ändern; aber dieser Sprung ist ja schon in dem undeformierten Gefäß vorhanden. Wenn wir also unter y nur die Veränderung des Profils verstehn, so wird y keinen Sprung erfahren. Der Differentialquotient dQ/dx wird dagegen bei dem Übergang von einer Platte zur andern sich sprungweise ändern müssen, weil $\gamma x - \frac{Ey\delta}{R^2}$ unstetig ist. Da aber der Differentialquotient endlich bleibt, so muß Q selbst beim Übergang stetig bleiben und folglich bleibt auch M (das Integral über Q) beim Übergang stetig. Im ganzen haben wir also anzusetzen, daß die Werte von y, dy/dx, M, Q an der Übergangsstelle die gleichen Werte haben. Das gibt vier Gleichungen zwischen den acht Konstanten zweier aufeinanderfolgender Platten. Damit lassen sich die vier Konstanten der einen Platte durch die vier Konstanten der benachbarten Platte ausdrücken. Soll am oberen Rande y und dy/dx Null sein, so können die vier Konstanten der obersten Platte durch die beiden Werte von M und Q am oberen Rande ausgedrückt werden. Damit kann man dann die Konstanten aller folgenden Platten und schließlich die Bodenwerte von y, dy/dx, M, Q durch die Werte von M und Q am oberen Rande ausdrücken, oder man kann auch durch irgend zwei von den vier Bodenwerten die übrigen Werte ausdrücken.

Es empfiehlt sich statt y und x zwei andere Veränderliche z und t einzuführen:

$$z = \frac{E\delta}{n\gamma R^2} y, \quad t = x/n.$$

Dann ist z innerhalb einer Platte mit t durch die Gleichung verknüpft:

$$z = t + C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t + C_3 e^{-t} \cos t + C_4 e^{-t} \sin t.$$

t nimmt an der Übergangsstelle zweier Platten zwei verschiedene Werte an. Die Übergangsbedingungen bestehen darin, daß

$$\frac{z}{m}, \quad \frac{1}{mn}\frac{dz}{dt}, \quad \frac{\delta^3}{mn^2}\frac{d^2z}{dt^2}, \quad \frac{\delta^3}{mn^3}\frac{d^3z}{dt^3} \qquad \left(m = \frac{E\delta}{n\gamma R^2}\right)$$

an der Übergangsstelle dieselben Werte behalten. Da m und n beide proportional $\sqrt{\delta}$ sind, so kann man auch sagen, daß

$$\frac{z}{\sqrt{\delta}}, \quad \frac{1}{\delta}\frac{dz}{dt}, \quad \delta\sqrt{\delta}\frac{d^2z}{dt^2}, \quad \delta\frac{d^3z}{dt^3}$$

an der Übergangsstelle dieselben Werte haben sollen.

Die Rechnung besteht nun aus einer Wiederholung der folgenden beiden Operationen. Es seien die Werte von z, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^3z}{dt^3}$ an dem einen Ende einer Platte gefunden, so werden durch die erste Operation die Werte derselben Ausdrücke an dem andern Ende berechnet. Durch die zweite Operation werden dann vermittels der Übergangsbedingungen die Werte an dem angrenzenden Ende der nächsten Platte gefunden. Die zweite Operation besteht nur darin, daß z im Verhältnis der Quadratwurzeln aus den Wandstärken geändert wird, dz/dt im Verhältnis der Wandstärken selbst, $\frac{d^3z}{dt^3}$ im umgekehrten Verhältnis der Wandstärken und $\frac{d^2z}{dt^2}$ im umgekehrten Verhältnis der $\delta^{3/2}$. Um die erste Operation zweckmäßig auszuführen, führe ich die folgenden Bezeichnungen ein:

$$p = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t, \qquad r = C_3 e^{-t} \cos t + C_4 e^{-t} \sin t$$
$$q = -C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t, \quad s = -C_3 e^{-t} \sin t + C_4 e^{-t} \cos t.$$

Dann ist:

$$p + qi = (C_1 + C_2 i) e^{(1-i)t}, \quad r + si = (C_3 + C_4 i) e^{(-1-i)t}.$$

Bei der Differentiation nach t tritt der Faktor $1 - i$ oder $-1 - i$ hinzu:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} i = (1 - i)(p + qi), \qquad \frac{dr}{dt} + \frac{ds}{dt} i = (-1 - i)(r + si)$$
$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{d^2q}{dt^2} i = -2i(p + qi), \qquad \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d^2s}{dt^2} i = +2i(r + si)$$
$$\frac{d^3p}{dt^3} + \frac{d^3q}{dt^3} i = (-2 - 2i)(p + qi), \qquad \frac{d^3r}{dt^3} + \frac{d^3s}{dt^3} i = (+2 - 2i)(r + si).$$

Also ist:

$$\frac{dp}{dt} = p + q \qquad \frac{dr}{dt} = -r + s$$
$$\frac{1}{2}\frac{d^2p}{dt^2} = q \qquad \frac{1}{2}\frac{d^2r}{dt^2} = -s$$
$$\frac{1}{2}\frac{d^3p}{dt^3} = -p + q \qquad \frac{1}{2}\frac{d^3r}{dt^3} = r + s.$$

Mithin haben wir

$$z - t = p + r, \quad \frac{dz}{dt} - 1 = p + q - r + s, \quad \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} = q - s,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3} = -p + q + r + s$$

und umgekehrt

$$p = \frac{1}{2}(z - t) + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) - \frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}\right), \quad q = \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}\right)$$
$$r = \frac{1}{2}(z - t) - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) - \frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}\right), \quad s = -\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) + \frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}\right).$$

Bei der ersten Operation geht man von den Werten von z und seinen drei ersten Differentialquotienten aus und bildet zunächst die Werte von p, q, r, s. Ist nun t der Wert an dem einen Ende der Platte, t' der an dem andern Ende, so ist der Übergang von $p+qi = (C_1 + C_2 i)e^{(1-i)t}$ zu $p' + q'i = (C_1 + C_2 i)e^{(1-i)t'}$ einfach dadurch zu bewirken, daß die komplexe Zahl $p + qi$ mit der komplexen Zahl $e^{(1-i)(t'-t)} = e^{t'-t}(\cos(t'-t) - \sin(t'-t)i)$ multipliziert wird. In analoger Weise ist $r + si$ mit $e^{-(t'-t)}(\cos(t'-t) - \sin(t'-t)i)$ zu multiplizieren. Nachdem das geschehen, werden aus den vier Werten $p'q'r's'$ die neuen Werte $z' - t'$, $\frac{dz'}{dt} - 1$, $\frac{1}{2}\frac{d^2z'}{dt^2}$, $\frac{1}{2}\frac{d^3z'}{dt^3}$ gefunden.

Ich setze ein Beispiel hierher:

$z - t$	$\frac{dz}{dt} - 1$	$\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$	$\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$
$+0,59$	$-5,08$	$-2,60$	$-1,69$

$$\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3} = -1,69$$

Diff.: $-3,39$ Summe: $-6,77$

ein Viertel davon: $-0,848$ $-1,692$

$\frac{1}{2}(z-t) = 0,295$ $\frac{1}{4}\frac{d^2z}{dt^2} = -1,300$

Summe: $p = -0,553$ $q = -2,992$

Diff.: $-r = -1,143$ $s = -0,392$

$$(p + qi)e^{(1-i)(t'-t)}$$

$$= (-0,553 - 2,992\,i) \times (-4,65 - 7,19\,i) = 2,57 + 13,72\,i$$
$$-21,50 + 3,98\,i$$
$$p' + q'i = -18,93 + 17,70\,i$$

$$(r + si)e^{(-1-i)(t'-t)}$$

$$= (1,14 - 0,39\,i) \times (-0,038 + 0,024\,i) = -0,07 - 0,11\,i$$
$$-0,04 + 0,02\,i$$
$$r' + s'i = -0,11 - 0,09\,i$$

$$p' + q'i = -18,93 + 17,70\,i$$
$$r' + s'i = -0,11 - 0,09\,i$$

Summe: $-19,04 + 17,61$

Diff.: $-18,82 + 17,79$

$$z' - t' = -19,04,\quad \frac{dz'}{dt} - 1 = 17,61 - 18,82 = -1,21,\quad \frac{1}{2}\frac{d^2z'}{dt^2} = 17,79,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^3z'}{dt^3} = 17,61 + 18,82 = 36,43.$$

Die Multiplikationen sind mit dem Rechenschieber gemacht, dessen Genauigkeit für den Fall der Formänderung eines Wasserbehälters ausreicht. Will man mit Logarithmen rechnen, so wird die Multiplikation der beiden komplexen Zahlen besser trigonometrisch ausgeführt, indem man r und φ so berechnet, daß

$$p = r\cos\varphi, \quad q = r\sin\varphi.$$

Dann ist:

$$p' = re^{t'-t}\cos(\varphi - (t'-t)), \quad q' = re^{t'-t}\sin(\varphi - (t'-t))$$

und in analoger Weise werden r' und s' aus r und s gefunden.

Der Plan der ganzen Rechnung ist nun der folgende. Am oberen Rande sollen z und dz/dt null sein. Dagegen sind die Werte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ unbekannt. Man beginnt nun damit, zu berechnen, welchen Einfluß eine Änderung der oberen Randwerte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und von $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ haben. Die Änderungen von z, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ sind genau so durch t auszudrücken wie die Größen selber, nur daß in dem Ausdruck für die Änderung von z das Glied t fehlt und in dem Ausdruck für die Änderung von dz/dt das Glied 1 und daß natürlich die Konstanten andere Werte haben. Der Einfluß der Vergrößerung des oberen Randwertes von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ oder von $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ um 1, läßt sich also durch dieselben beiden Operationen, die eben besprochen sind, durch die ganze Reihe der Platten verfolgen. Am besten rechnet man gleichzeitig die drei Sätze durch: 1. den Einfluß, wenn $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ am oberen Rande um 1 vergrößert wird, 2. den Einfluß, wenn $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ am oberen Rande um 1 vergrößert wird, 3. den Einfluß, wenn gleichzeitig $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ am oberen Rande um 1 vergrößert werden. Die dritte Rechnung dient zur Kontrolle. Ihre Resultate müssen immer gleich der Summe der entsprechenden beiden Zahlen der ersten und zweiten Rechnung sein.

In dem von mir betrachteten Falle sollte die Wand des Behälters aus 9 Ringen von je 111,5 cm Höhe bestehen, deren Wandstärken in der Reihenfolge von oben nach unten sein sollten: 1,05 cm, 0,95 cm, 0,85 cm, 1,02 cm, 1,27 cm, 1,53 cm, 1,78 cm, 2,04 cm, 2,30 cm. Der Radius sollte 2030 cm betragen.

Die Veränderungen, die eine Vergrößerung des oberen Randwertes von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ oder von $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ um 1 hervorrufen, sind in den folgenden beiden Tabellen gegeben.

	Änderungen von:				Änderungen von:			
	z	$\frac{dz}{dt}$	$\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$	$\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$	z	$\frac{dz}{dt}$	$\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$	$\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$
Oberer Rand	0	0	1	0	0	0	0	1
1. Platte unten	$-0{,}4$	$-12{,}4$	$-12{,}0$	$-11{,}6$	$5{,}8$	$-0{,}4$	$-6{,}2$	$-12{,}0$
2. „ „	68	427	359	292	-126	103	229	355
3. „ „	$-65{,}6.10^2$	-182.10^2	-117.10^2	$-51{,}2.10^2$	$9{,}1.10^5$	$-89{,}8.10^2$	$-98{,}9.10^2$	-108.10^2
4. „ „	223.10^3	481.10^3	258.10^3	36.10^3	16.10^3	234.10^3	218.10^3	201.10^3
5. „ „	-352.10^4	-908.10^4	-555.10^4	-208.10^4	14.10^4	-339.10^4	-352.10^4	-366.10^4
6. „ „	161.10^5	1090.10^5	928.10^5	767.10^5	-189.10^5	203.10^5	391.10^5	580.10^5
7. „ „	421.10^6	-503.10^6	-924.10^6	-1846.10^6	398.10^6	226.10^6	-173.10^6	-572.10^6
8. „ „	-845.10^7	-607.10^7	238.10^7	1083.10^7	-352.10^7	-569.10^7	-216.10^7	$+136.10^7$
9. „ „	521.10^8	1059.1[illegible]^8	538.10^8	18.10^8	18.10^8	391.10^8	373.10^8	356.10^8

Der Einfluß einer Veränderung des oberen Randwertes um x Einheiten ist x-mal so groß und bei gleichzeitiger Änderung des zweiten und dritten Differentialquotienten addieren sich die beiden Einflüsse. Alle Werte der Tabelle sind mit dem Rechenschieber gerechnet, so daß die letzte der hingeschriebenen Stellen nicht mehr verbürgt werden soll.

Jetzt beginnt die eigentliche Rechnung. Man setzt am oberen Rande $z = 0$ und $dz/dt = 0$ und rechnet nun zunächst mit irgend welchen Anfangswerten von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ z. B. $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3} = 0$. Dies führt schon am Ende der zweiten Platte zu beträchtlich großen Werten $z - t = -189$ und $dz/dt = -321$, die unmöglich sind, wenn die Bodenwerte von z und dz/dt Null sein sollen. Man tut deshalb gut nicht weiter zu rechnen, sondern schon hier Korrekturen ξ und η der oberen Randwerte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ zu berechnen, mit denen man am Ende der zweiten Platte zu kleinen Werten von z und dz/dt gelangt. Man bedient sich zu dem Behufe der dritten Zeile der Tabelle, indem man setzt

$$68\,\xi - 126\,\eta = 189, \quad 427\,\xi + 103\,\eta = 321.$$

Man braucht die Rechnung nun nicht wieder von vorn anzufangen, sondern kann mit den gefundenen Änderungen ξ und η die Änderungen

berechnen, die z, dz/dt, $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ am Ende der ersten Platte annehmen. Von da aus rechnet man nun weiter, bis wieder die Werte von $z-t$ und dz/dt zu groß werden. Am Ende der dritten Platte z. B. werden sie — 17,0 und — 64,6. Daraus rechnet man wieder neue Änderungen der oberen Randwerte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$, die aber jetzt schon erheblich kleiner ausfallen als die ersten. Mit diesen Änderungen korrigiert man die vorhergehenden Werte. Jetzt setzt man etwa vom Ende der zweiten Platte an die Rechnung wieder fort und korrigiert wieder, sobald $z-t$ und dz/dt zu groß werden. Auf diese Weise gelangt man schließlich an das Ende der neunten Platte, wo z und dz/dt nun irgend welche nicht zu große Werte annehmen. Diese korrigiert man endlich auf 0. Dadurch werden wieder auch die Werte in den vorhergehenden Platten geändert, aber wiederum sind die Änderungen schon in der achten Platte klein gegen die Änderungen in der neunten, die in der siebenten wieder klein gegen die in der achten, so daß die Änderungen bei den ersten Platten gar nicht in Betracht kommen.

Damit ist die ganze Aufgabe gelöst. Man hat so die Formänderung gefunden, die durch den Wasserdruck hervorgebracht wird, wenn man sich den oberen und unteren Rand fest eingespannt denkt. Aus den Werten von $\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{d^3z}{dt^3}$ ergeben sich nach den obigen Formeln die Werte von M und Q.

Zugleich kann man aus der Tabelle berechnen, wie sich die Bodenwerte von y und dy/dx ändern, wenn die Bodenwerte von M und Q geändert werden. Die letzte Zeile der Tabelle gibt, wenn Δz, $\Delta\frac{dz}{dt}$, $\Delta\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$, $\Delta\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ die Änderungen der Bodenwerte bedeuten

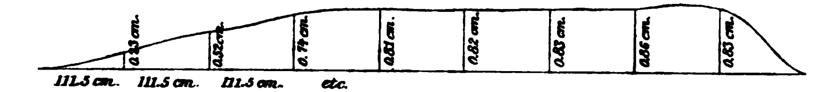
$$\Delta z = 521.10^8\,\xi + 18.10^8\,\eta, \quad \Delta\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2} = 538.10^8\,\xi + 373.10^8\,\eta$$

$$\Delta\frac{dz}{dt} = 1059.10^8\,\xi + 391.10^8\,\eta, \quad \Delta\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3} = 18.10^8\,\xi + 356.10^8\,\eta.$$

Man kann damit ξ und η durch die Änderungen der Bodenwerte von $\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d^3z}{dt^3}$ und folglich auch durch die Änderungen der Bodenwerte von M und Q ausdrücken, und damit kann man auch Δz und $\Delta\frac{dz}{dt}$ und die Änderungen des ganzen Profils durch die Änderungen der Bodenwerte von M und Q ausdrücken.

Die Figur stellt das Profil der Wand dar, wenn der obere und untere Rand fest eingespannt sind. Die Ausweichungen sind dabei in

natürlicher Größe, die Höhen dagegen in ein Hundertstel der natürlichen Größe gezeichnet. Am Boden ergibt sich $M = 1281$ kg und Q



$= 50$ kg/cm. Die Änderungen $\varDelta M$ und $\varDelta Q$ der Bodenwerte von M und Q rufen in dem Profil die Änderungen hervor:

$$\begin{aligned} \varDelta y_7 &= 0{,}000006\, \varDelta M + 0{,}0001\, \varDelta Q \\ \varDelta y_8 &= -0{,}00011\, \varDelta M + 0{,}0025\, \varDelta Q \\ \varDelta y_9 &= 0{,}00067\, \varDelta M - 0{,}0347\, \varDelta Q. \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} y \text{ in cm} \\ M \text{ in cm kg/cm} \\ Q \text{ in kg/cm} \end{matrix}\right)$$

Die Änderungen der vorhergehenden y sind gegen die der letzten zu vernachlässigen.

Wenn man den Unterschied zwischen dem Wasserdruck und dem elastischen Druck für die gefundene Formänderung ausrechnet, so bemerkt man, daß beide in allen Platten, die unterste ausgenommen, nahezu einander gleich sind. In dem vorliegenden Fall wird

	$\gamma x - \frac{E y \delta}{R^2}$
Ende der ersten Platte	$-0{,}01$
Anfang der zweiten Platte	$0{,}00$
Ende der zweiten Platte	$-0{,}02$
Anfang der dritten Platte	$+0{,}01$
Ende der dritten Platte	$+0{,}02$
Anfang der vierten Platte	$-0{,}04$
Ende der vierten Platte	$+0{,}04$
Anfang der fünften Platte	$-0{,}05$
Ende der fünften Platte	$+0{,}06$
Anfang der sechsten Platte	$-0{,}05$
Ende der sechsten Platte	$+0{,}05$
Anfang der siebten Platte	$-0{,}05$
Ende der siebten Platte	$+0{,}04$
Anfang der achten Platte	$-0{,}07$
Ende der achten Platte	$+0{,}07$
Anfang der neunten Platte	$-0{,}04$
Ende der neunten Platte	$+1{,}00$

Das muß für ähnliche Dimensionen wie die vorliegenden immer gelten. Daraus folgt ein abgekürztes Verfahren der Rechnung. Man kann

nämlich die Ordinaten y für alle Platten, abgesehn von der untersten, in der Mitte der Platten nahezu gleich $\frac{\gamma x R^2}{E\delta}$ setzen und dy/dx nahe gleich $\frac{\gamma R^2}{E\delta}$. Nur die unterste und vielleicht die vorletzte und die oberste Platte würden dann in der oben besprochenen Weise durchzurechnen sein. Man würde aber der Mühe enthoben sein, alle neun Platten durchzurechnen.

Ein Beitrag zur Theorie der schnell umlaufenden elastischen Welle.

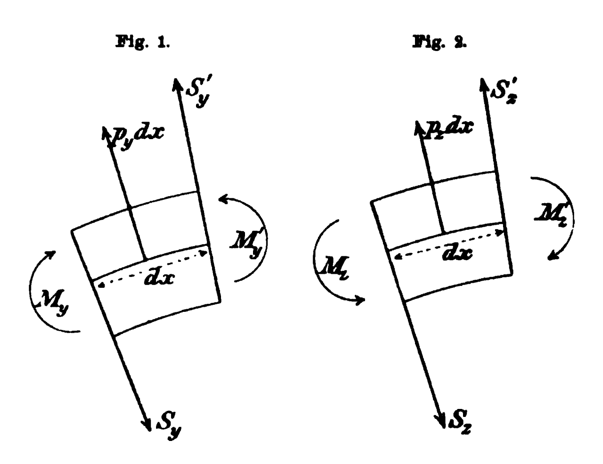
Von Adolf Kneser in Berlin.

1. Stodola behandelt in der Schrift „Die Dampfturbinen“ (Berlin 1903, S. 63, Nr. 18a) folgende Aufgabe. Eine biegsame Welle sei mit aufgesetzten Scheibenrädern, die ihre Biegsamkeit nicht beeinflussen sollen, gleichmäßig belastet; die Mittelpunkte der Räder seien ein wenig von der geometrischen Achse der Welle ausgewichen, sodaß bei der Umdrehung die Zentrifugalkräfte sich nicht völlig ausgleichen; es wird die Gestalt gesucht, die die Welle unter der Wirkung dieser Kräfte und ihrer Elastizität annimmt. Die Abweichungen der Welle von ihrer Gleichgewichtslage werden zunächst klein vorausgesetzt; die Untersuchung ergibt aber, daß im Gegensatz zu dieser Annahme bei gewissen Umlaufsgeschwindigkeiten große, in der Praxis gefährliche Ausschläge auftreten, und hierdurch sind die „kritischen Geschwindigkeiten“ der Welle definiert. Die erhaltenen Resultate gelten (Nr. 19) auch für eine glatte, nur unter dem Einfluß ihrer Eigenmasse rotierende Welle, bei der man anstatt aufgesetzter Räder ihre Querschnitte betrachtet, die ein wenig exzentrisch zur geometrischen Achse gelagert sind.

Stodola nimmt, um die Rechnung zu vereinfachen, an, daß die Schwerpunkte aller Scheibenräder in derselben axialen Ebene liegen und zwar von der Achse der Welle um dieselbe Strecke entfernt. Wir wollen zeigen, daß auch wenn die Schwerpunkte nach beliebigen Richtungen von der Achse ausgewichen sind, die von Stodola erhaltenen Resultate betreffs der kritischen Geschwindigkeiten erhalten bleiben. Der Beweis dafür ist sehr leicht, gewinnt aber vielleicht einiges Interesse durch eine Tatsache, die bei der spezielleren Voraussetzung verborgen bleibt, die Tatsache nämlich, daß bei gewissen Verteilungen der Schwerpunkte der Scheiben einzelne der kritischen Geschwindigkeiten

ihren gefährlichen Charakter verlieren und ausnahmsweise keine großen Ausschläge der Welle verursachen. Es läßt sich auch ein Verfahren angeben, bei einer gegebenen Welle durch Umformung der Scheibenräder eine bestimmte kritische Geschwindigkeit unschädlich zu machen.

2. Die ursprüngliche Achse der Welle sei die x-Achse eines rotierenden rechtwinkligen Koordinatensystems, bezüglich dessen die Welle, wie wir annehmen, eine Lage relativen Gleichgewichts angenommen habe, die von der x-Achse nur wenig abweicht, sodaß, wenn x, y, z die Koordinaten des Mittelpunkts eines Querschnitts der Welle sind, die Größen $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ und $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ vernachlässigt werden können, und dx als Länge eines Elements der verbogenen Welle anzusehen ist, das in der Ruhelage, d. h. wenn keine Rotation vorhanden ist, ebenfalls die Länge dx hat. Denken wir uns ein solches Element durch Querschnitte senkrecht zur Richtung der Welle begrenzt, so wirken in diesen Querschnitten Scherkräfte und senkrecht zu ihren Flächen Biegungsmomente, und die Zentrifugalkräfte können wir uns im Schwerpunkt des Elements angreifend denken.



Die Gleichgewichtsbedingungen aller dieser Kräfte ergeben dann, wie in dem einfacheren von Stodola behandelten Falle, die Differentialgleichungen der Wellenachse. S und M seien Scherkraft und Biegungsmoment in dem der Abszisse x zugehörigen Querschnitt, S' und M' dieselben Größen für den zweiten Querschnitt mit der Abszisse $x + dx$, $p\,dx$ die Zentrifugalkraft. Ein angehängter Buchstabe y oder z bezeichne von jeder Kraft und jedem Moment die Komponente nach einer entsprechenden Achse oder Ebene des Koordinatensystems. Dann zeigen die Figuren 1 und 2 die in den Ebenen xy und xz wirkenden Kräfte und Momente, wobei der Pfeil jedesmal angibt, in welchem Sinne Kraft oder Moment positiv zu rechnen sind, und die verschiedene Richtung der Pfeile bei M_y und M_z darauf beruht, daß in der einen der betrachteten Ebenen die Achsen z und x den Achsen x und y der andern entsprechen.

Setzt man nun in jeder der beiden Ebenen xy und xz die Summen der Komponenten und der Momente bezüglich des Schwerpunktes gleich Null, indem man gemäß der oben eingeführten Voraussetzung, daß die ganze Verbiegung klein sei, den Schwerpunkt mit der Abszisse $x + \frac{1}{2}dx$ in Ansatz bringt, so findet man

$$S_y' - S_y + p_y dx = 0, \quad S_z' - S_z + p_z dx = 0,$$

$$M_y' - M_y - S_y' \frac{dx}{2} - S_y \frac{dx}{2} = 0,$$

$$-M_z' + M_z - S_z' \frac{dx}{2} - S_z \frac{dx}{2} = 0$$

oder

$$\frac{dS_y}{dx} = -p_y, \quad \frac{dS_z}{dx} = -p_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = S_y, \quad \frac{dM_z}{dx} = -S_z,$$

und hieraus folgt sofort

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -p_y, \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = p_z.$$

Die in diesen Gleichungen auftretenden vier Größen M, p können leicht durch y, z und die Ausweichungen der Scheibenräder ausgedrückt werden. Hat nämlich das der Abszisse x entsprechende Rad seinen Schwerpunkt an der Stelle $(x,\ y + e_y,\ z + e_z)$, sodaß e_y und e_z die längs der y- und der z-Achse gemessenen Abweichungen des Schwerpunktes von der verbogenen Wellenachse bedeuten; ist ferner m die auf die Längeneinheit der Achse entfallende Masse der Räder und ω die Rotationsgeschwindigkeit, so wirkt offenbar auf das oben betrachtete Element der Welle eine Zentrifugalkraft, deren Komponenten folgende Werte haben:

$$p_y dx = m dx \cdot \omega^2 (y + e_y), \quad p_z dx = m dx \cdot \omega^2 (z + e_z).$$

Für M_y und M_z aber kann man bekannte Formeln der Festigkeitslehre benutzen; ist E der Elastizitätsmodul des Materials, und Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts der Welle, den man mit Masse von der Flächendichtigkeit Eins belegt, bezüglich eines Durchmessers, so gelten die Formeln

$$M_y = -E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad M_z = E\Theta \frac{d^2 z}{dx^2},$$

in denen wiederum benutzt wird, daß die Quadrate von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ vernachlässigt werden dürfen. Mit diesen Ausdrücken ergeben die obigen Beziehungen zwischen M_y, M_z, p_y, p_z die Differentialgleichungen der verbogenen Welle:

$$E\Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = m\omega^2 (y + e_y), \quad E\Theta \frac{d^4 z}{dx^4} = m\omega^2 (z + e_z).$$

Erstreckt sich die Welle von $x = 0$ bis $x = L$ und ist sie in den Endpunkten nur aufgelegt, so verschwinden in diesen die Biegungsmomente M, und man hat als Grenzbedingungen für $x = 0$ und $x = L$ die Gleichungen

$$y = z = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

3. Um die erhaltenen Differentialgleichungen zu integrieren, setzen wir

$$\frac{m\omega^2}{E\Theta} = k^4$$

und nehmen k positiv; die Gleichung für y wird dann

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k^4 y + k^4 e_y$$

und hat das partikuläre Integral

$$p(x) = \frac{1}{4} \sum_{(k)} k e^{kx} \int_0^x e^{-k\alpha} e_y(\alpha)\, d\alpha,$$

wenn $\sum\limits_{(k)}$ bedeutet, daß für k der Reihe nach die Werte $k, -k, ik$ und $-ik$ geschrieben und die erhaltenen Ausdrücke addiert werden sollen. Man findet nämlich leicht

$$\sum_{(k)} k = \sum_{(k)} k^2 = \sum_{(k)} k^3 = 0, \quad \sum_{(k)} k^4 = 4k^4$$

und hieraus

$$p'(x) = \frac{1}{4} \sum_{(k)} k^2 e^{kx} \int_0^x e^{-k\alpha} e_y(\alpha)\, d\alpha,$$

$$p''(x) = \frac{1}{4} \sum_{(k)} k^3 e^{kx} \int_0^x e^{-k\alpha} e_y(\alpha)\, d\alpha,$$

$$p'''(x) = \frac{k^4}{4} \sum_{(k)} e^{kx} \int_0^x e^{-k\alpha} e_y(\alpha)\, d\alpha,$$

$$p^{\mathrm{IV}}(x) = k^4 p(x) + k^4 e_y(x);$$

das allgemeine Integral der Gleichung für y hat also nach bekannten Sätzen die Form

$$p(x) + \sum_{(k)} C^{(k)} e^{kx}$$

wobei $C^{(k)}$ Konstante sind, oder auch, wenn man die hyperbolischen Funktionen

$$\mathfrak{Sin}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \mathfrak{Cos}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

einführt und durch A, B, C, D wiederum Konstante bezeichnet,

$$y = A\, \mathfrak{Cos}\, kx + B \cos kx + C\, \mathfrak{Sin}\, kx + D \sin kx$$

$$+ \tfrac{1}{2} k \int_0^x e_y(\alpha)\, \mathfrak{Sin}\, k(x-\alpha)\, d\alpha - \tfrac{1}{2} k \int_0^x e_y(\alpha) \sin k(x-\alpha)\, d\alpha.$$

Die Grenzbedingungen sind nach Nr. 2

$$y\,|^0 = y''\,|^0 = y\,|^L = y''\,|^L = 0$$

und ergeben jetzt folgende Gleichungen für die Konstanten:

$$A + B = 0, \quad A - B = 0,$$

$$C\, \mathfrak{Sin}\, kL + D \sin kL + p(L) = 0,$$

$$C\, \mathfrak{Sin}\, kL - D \sin kL + \frac{1}{k^2} p''(L) = 0;$$

hieraus folgt

$$2C\, \mathfrak{Sin}\, kL = -k \int_0^L e_y(\alpha)\, \mathfrak{Sin}\, k(L-\alpha)\, d\alpha,$$

$$2D \sin kL = k \int_0^L e_y(\alpha) \sin k(L-\alpha)\, d\alpha.$$

Da nun

$$k = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{E\Theta}}$$

stets positiv ist, und dasselbe demnach von $\mathfrak{Sin}\, kL$ gilt, so erhält man für C stets einen endlichen Wert; dagegen hat man für D einen unendlich großen Wert zu gewärtigen, wenn die Gleichung

$$\sin kL = 0$$

besteht, d. h. wenn

$$kL = n\pi,$$

und n eine positive ganze Zahl ist. Die kritischen Geschwindigkeiten sind also durch die Formel

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{E\Theta}{m}} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E\Theta}{m}}$$

gegeben, und die entsprechende für die Koordinate z durchgeführte Betrachtung gibt offenbar dieselben Werte, da unsere Rechnung nur so

geändert zu werden braucht, daß man y durch z und e_y durch e_z ersetzt. Damit ist das von Stodola unter der speziellen Voraussetzung

$$e_y = \text{const.}, \quad e_z = 0$$

abgeleitete Resultat auf unsern allgemeinen Fall übertragen.

4. Ersetzt man in der für D erhaltenen allgemeinen Formel die Größe $\sin k(L-\alpha)$ durch ihren ausgerechneten Wert, so findet man

$$2D = k\int_0^L e_y(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha - k \operatorname{cotg} kL \int_0^L e_y(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha.$$

Analog erhält man bei der z-Koordinate für die Konstante $\bar{D}$, die in dem Ausdruck von z als Funktion von x an derselben Stelle auftritt wie oben D, den Ausdruck

$$2\bar{D} = k\int_0^L e_z(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha - k \operatorname{cotg} kL \int_0^L e_z(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha,$$

während sich für die der Konstanten B entsprechende wie bei dieser stets ein endlicher Wert ergibt.

Wenn nun k einen der kritischen Werte

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

annimmt, und die Gleichungen

$$\int_0^L e_y(\alpha)\sin\ k\alpha\ d\alpha = \int_0^L e_z(\alpha)\sin\ k\alpha\ d\alpha = 0$$

oder

$$\int_0^L e_y(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{L}\, d\alpha = \int_0^L e_z(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{L}\, d\alpha = 0$$

gelten, so bleiben die im allgemeinen unendlichen Werte von y und z ausnahmsweise endlich. Die zweiten Glieder der soeben aufgestellten Ausdrücke für D und $\bar{D}$ nehmen dann nämlich, als Brüche mit dem Nenner $\sin kL$ geschrieben, die Gestalt $0:0$ an; da aber schon die erste Ableitung des Nenners an den kritischen Stellen von Null verschieden, nämlich $\pm L$ ist, Zähler und Nenner aber um jeden Wert von k herum in die Taylorsche Reihe entwickelt werden können, so ist der Wert dieser Glieder bei den kritischen Werten von k unter der obigen Voraussetzung sicher endlich. Gelten also die letzten Gleichungen, so verliert die kritische Geschwindigkeit ihren gefährlichen Charakter,

und gibt durchweg endliche Werte von y und z, gestattet also der Welle nahe der ursprünglichen Ruhelage eine Lage relativen Gleichgewichts.

Besonders leicht lassen sich die Bedingungen der Ungefährlichkeit einer kritischen Geschwindigkeit formulieren, wenn man die Ausweichungen e_y und e_z in Fouriersche Sinusreihen entwickelt denkt; setzt man

$$e_y = A_1 \sin\frac{\pi x}{L} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \cdots,$$

$$e_z = B_1 \sin\frac{\pi x}{L} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + \cdots,$$

so ist bekanntlich

$$A_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L e_y(\alpha)\sin\frac{\pi\nu\alpha}{L}\,d\alpha, \quad B_\nu = \frac{2}{L}\int_0^L e_z(\alpha)\sin\frac{\nu\pi\alpha}{L}\,d\alpha,$$

und die $n$te kritische Geschwindigkeit, d. h. die dem Werte

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

entsprechende, ist unschädlich, wenn $A_n = B_n = 0$.

Direkt ersichtlich wird dies Resultat, wenn man die trigonometrischen Entwicklungen von e_y und e_z in die obigen Ausdrücke D und $\bar{D}$ einsetzt; man erhält z. B.

$$2D = k\int_0^L e_y(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha - k\operatorname{cotg} kL\int_0^L \sum_\nu^{1,\infty} A_\nu \sin\frac{\nu\pi\alpha}{L}\sin k\alpha\,d\alpha,$$

also wenn man rechts gliedweise integriert,

$$\begin{aligned} 2D &= k\int_0^L e_y(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \\ &\quad - \tfrac{1}{2}k\operatorname{cotg} kL\sum_\nu^{1,\infty} A_\nu\left[\frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{L}-k\right)L}{\frac{\nu\pi}{L}-k} - \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{L}+k\right)L}{\frac{\nu\pi}{L}+k}\right] \\ &= k\int_0^L e_y(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha - \tfrac{1}{2}k\cos kL\sum_\nu^{1,\infty}\frac{2A_\nu(-1)^{\nu-1}\nu\pi}{L\left(\frac{\nu^2\pi^2}{L^2}-k^2\right)} \end{aligned}$$

Hier sieht man unmittelbar, daß D bei der Annahme

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

endlich bleibt oder unendlich wird, jenachdem A_n verschwindet oder nicht. Eine ähnliche Formel läßt sich natürlich für $\bar{D}$ aufstellen.

5. Ob bei einer gegebenen Welle diese Ausnahmefälle eintreten, läßt sich im allgemeinen nicht entscheiden, da ja e_y und e_z als unbekannte Funktionen von x anzusehen sind, die nur wenig von Null abweichen. Man kann aber beliebig viele der Größen A_n, B_n zum Verschwinden bringen, wenn es möglich ist, e_y auf beliebig begrenzten Strecken, etwa von a_1 bis b_1, von a_2 bis b_2 usw. um die konstanten Beträge $c_1, c_2, \ldots$ zu vermehren. Dann geht das Integral

$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha$$

in die folgende Summe über:

$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha + \sum_\nu c_\nu \int_{a_\nu}^{b_\nu} \sin k\alpha \, d\alpha;$$

setzt man diese gleich Null, indem man für k beliebig viele kritische Werte nimmt, und ist die Anzahl der Teilintervalle groß genug, so erhält man lineare Gleichungen, aus denen man die Größen c_ν bestimmen könnte, sobald die ersten Glieder unserer Ausdrücke bekannt wären. Das sind sie allerdings nicht, aber man übersieht doch, daß es Wertsysteme c_ν gibt, die bewirken, daß bei beliebig vielen kritischen Geschwindigkeiten die Ausdrücke D endlich, die Ausschläge der Welle in der Richtung der y-Achse also klein bleiben. Dasselbe bewirkt man auch für die Ausschläge in der Richtung der z-Achse, wenn es möglich ist, die Ausweichungen e_z auf beliebigen Teilstrecken um konstante Beträge zu ändern; beliebig vorgeschriebene kritische Geschwindigkeiten sind dann völlig unschädlich gemacht.

Wir führen diese Betrachtungen genauer durch, indem wir uns auf die Frage beschränken, wann die kleinste kritische Geschwindigkeit ungefährlich wird. Für sie ist

$$k = \frac{\pi}{L}$$

und die Bedingungen der Unschädlichkeit sind

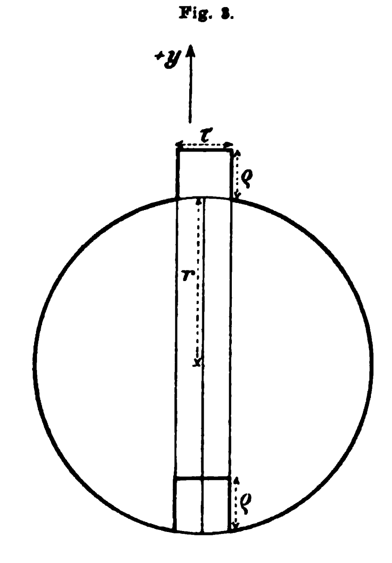
$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{L} \, d\alpha = 0, \quad \int_0^L e_z(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{L} \, d\alpha = 0,$$

die zunächst einmal nicht erfüllt seien. Dann denken wir uns auf der Strecke von $x = \frac{1}{2}L - a$ bis $x = \frac{1}{2}L + a$ die Scheibenräder so abgeändert, daß ihre Massen dieselben bleiben wie zuvor, ihre Schwer-

punkte aber um das konstante Stück η in der Richtung der y-Achse fortschreiten. Man könnte etwa den Rädern die Gestalt der Fig. 3 geben; ist ϱ die radial, τ die tangential gerichtete Seite des an den Kreis angesetzten Rechtecks, r der Radius des Kreises, und wird ϱ positiv oder negativ gerechnet, jenachdem das angesetzte Rechteck in der Richtung $+y$ oder $-y$ über den ursprünglichen Radkreis hinausragt, so findet man leicht für die Entfernung η des Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Kreises den Ausdruck

$$\eta = \frac{\varrho \tau}{\pi r}$$

Fig. 3.



und e_y wird von $x = \frac{1}{2}L - a$ bis $x = \frac{1}{2}L + a$ durch $e_y + \eta$ ersetzt. Die Bedingung der Unschädlichkeit wird somit

$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin\frac{\pi\alpha}{L}\,d\alpha + \eta\int_{\frac{1}{2}L-a}^{\frac{1}{2}L+a} \sin\frac{\pi\alpha}{L}\,d\alpha = 0$$

oder

$$\int_0^L e_y(\alpha) \sin\frac{\pi\alpha}{L}\,d\alpha + \frac{2L\eta}{\pi}\sin\frac{\pi a}{L} = 0,$$

oder, wenn a klein ist

$$\eta = -\frac{1}{2a}\int_0^L e_y(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{L}\,d\alpha.$$

Ebenso ergibt sich eine zweite Unschädlichkeitsbedingung, wenn man längs der z-Achse etwa auch auf der Strecke von $\frac{1}{2}L - a$ bis $\frac{1}{2}L + a$ die Räder in ähnlicher Weise modifiziert und bewirkt, daß die Schwerpunkte um die Strecke ζ in der Richtung der z-Achse fortschreiten; man erhält dann

$$\zeta = -\frac{1}{2a}\int_0^L e_z(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{L}\,d\alpha,$$

und das abgeänderte Rad hat etwa die Gestalt der Fig. 4 oder die einfachere der Fig. 3, in der aber das angesetzte Rechteck keiner der Koordinatenachsen parallel liegt. Die Werte η und ζ sind nun freilich immer noch unbekannt, aber man kann sie sich, da sie sicher existieren, durch Versuche bestimmt denken, in ähnlicher Weise wie man eine starre Welle durch Probieren ausbalanziert. Weiß man nur, daß die Ausweichungen e_y und e_z zwischen $-g$ und $+g$

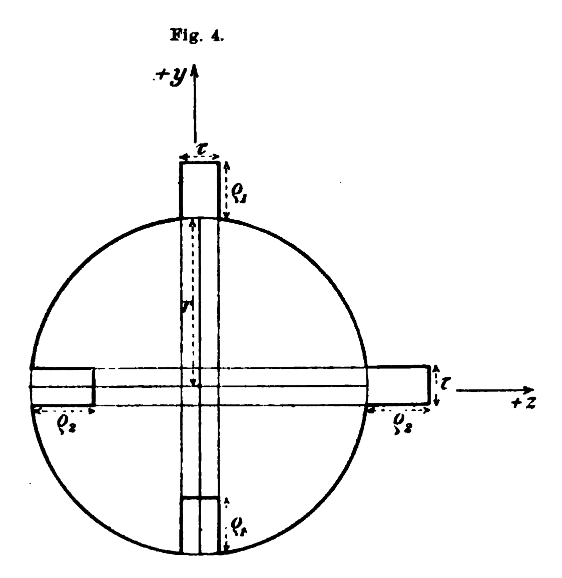
bleiben, so liegen η und ζ zwischen den Grenzen $\pm \frac{gL}{2a}$, womit auch, wenn man τ festhält, für die beiden Strecken ϱ, die in Fig. 4 als ϱ_1 und ϱ_2 unterschieden werden, bestimmte Grenzen durch die Gleichungen

$$\varrho_1 = \frac{\pi r \eta}{\tau}, \quad \varrho_2 = \frac{\pi r \zeta}{\tau}$$

gegeben sind.

Ob es möglich ist und sich lohnt, solche Versuche anzustellen, mag zweifelhaft erscheinen; das Interessanteste scheint mir die Tatsache zu sein, daß die kritischen Geschwindigkeiten durch gewisse theoretisch einfache Modifikationen eines gegebenen Systems von Rädern unschädlich gemacht werden können.

Fig. 4.



6. Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für den Fall der eingespannten Welle anstellen; doch werden die Formeln dann weniger einfach, und die Untersuchung möge deshalb nur im Umriß angedeutet werden.

Die Differentialgleichungen für y und z bleiben dieselben wie oben; an Stelle der in Nr. 2 angegebenen Anfangsbedingungen treten aber die folgenden:

$$y|^0 = y'|^0 = y|^L = y'|^L = 0;$$

dazu kommen Gleichungen derselben Form für z. Aus ihnen erhält man für die Konstanten A, B, C, D die Gleichungen

$$A + B = 0, \quad C + D = 0,$$
$$A(\mathfrak{Sin}\, kL + \sin kL) + C(\mathfrak{Cos}\, kL - \cos kL) + \frac{p'(L)}{k} = 0,$$
$$A(\mathfrak{Cos}\, kL - \cos kL) + C(\mathfrak{Sin}\, kL - \sin kL) + p(L) = 0.$$

Die Determinante der Koeffizienten von A und C in den letzten beiden Gleichungen ist

$$-2 + 2\,\mathfrak{Cos}\, kL \cos kL,$$

sodaß unendliche Werte von A und C zu befürchten sind, wenn

$$\mathfrak{Cof}\, kL \cos kL = 1$$

ist, eine Gleichung, die dieselben kritischen Werte von k ergibt wie die von Stodola im Falle $e_y =$ const. aufgestellte

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}kL}{\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{2}kL} = \pm \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}kL.$$

Setzen wir also

$$\mathfrak{Cof}\, kL \cos kL - 1 = \varpi(k),$$

so bleiben die Produkte $A\varpi(k)$ und $C\varpi(k)$ bei allen Werten von k endlich, ebenso die Größe

$$Y = y\varpi(k),$$

in der y die durch die obigen Grenzbedingungen bestimmte Lösung der Gleichung

$$y^{\mathrm{IV}} = k^4 y + k^4 e_y$$

ist, und offenbar gelten die Gleichungen

$$Y^{\mathrm{IV}} = k^4 Y + k^4 \varpi(k) e_y,$$
$$Y\,|^0 = Y'\,|^0 = Y\,|^L = Y'\,|^L = 0.$$

Nimmt man nun speziell für k einen der positiven kritischen Werte, für die $\varpi(k)$ verschwindet, und die wir $k_1, k_2, \ldots$ nennen wollen, so wird die Differentialgleichung für Y einfach

$$Y^{\mathrm{IV}} = k_n^4 Y$$

und Y muß bis auf einen konstanten Faktor mit einer bei den Schwingungen elastischer Stäbe vorkommenden Größe übereinstimmen, die schon in Poissons Mechanik (Bd. II, Nr. 521) und neuerdings in Rayleighs Theory of sound (Bd. I, Kap. 8) eingehend untersucht ist. Wenn nämlich ein Stab von der Länge L an beiden Enden eingespannt und die positive Abszissenachse von $x = 0$ an seine Ruhelage ist, so wird bei einer Schwingung, die einem einfachen Ton entspricht, die Ordinate irgend eines Teilchens des Stabes durch ein Produkt zweier Faktoren dargestellt, von denen der eine nur von der Zeit, nicht aber von x abhängt, während der andere, den wir u_n nennen, ein genau denselben Bedingungen wie Y unterworfenes Integral der Gleichung

$$u_n^{\mathrm{IV}} = k_n^4 u_n$$

ist. Man bezeichnet u_n als die $n$te Normalfunktion des Schwingungsproblems; sie ist bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, den man so festlegt, daß sie nicht identisch verschwindet. Man kann somit die

oben eingeführte Größe Y, wenn k den $n$ten kritischen Wert k_n annimmt, in der Form

$$Y = C_n u_n$$

schreiben, wobei C_n eine Konstante ist, die aber auch verschwinden kann.

Um C_n allgemein zu bestimmen, lassen wir zunächst k beliebig und integrieren die Gleichung

$$u_n(Y^{IV} - k^4 Y - k^4 \varpi(k) e_y) = 0$$

von 0 bis L. Dann ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_0^L u_n Y^{IV} dx = u_n Y''' - u_n' Y'' \Big|_0^L + \int_0^L u_n'' Y'' dx,$$

$$\int_0^L u_n^{IV} Y \; dx = u_n''' Y \; - u_n'' Y' \Big|_0^L + \int_0^L u_n'' Y'' dx;$$

da nun u_n und u_n' ebenso wie Y und Y' an den Enden des Stabes verschwinden, so folgt

$$\int_0^L u_n Y^{IV} dx = \int_0^L u_n^{IV} Y dx = k^4 \int_0^L u_n (Y + \varpi(k) e_y) dx.$$

Setzt man hier den Wert von u_n^{IV} ein, den die für u_n geltende Differentialgleichung ergibt, so folgt weiter

$$(k^4 - k_n^4) \int_0^L u_n Y dx + k^4 \varpi(k) \int_0^L u_n e_y dx = 0.$$

Differenziert man endlich nach k und setzt dann $k = k_n$, wodurch Y in $C_n u_n$ übergeht, so erhält man die Gleichung

$$4 k_n^3 C_n \int_0^L u_n^2 dx + k_n^4 \varpi'(k_n) \int_0^L u_n e_y dx = 0.$$

Hiermit ist C_n bestimmt, und da $\varpi'(k_n)$, wie man leicht sieht, von Null verschieden ist, verschwindet C_n dann und nur dann, wenn

$$\int_0^L u_n e_y dx = 0.$$

Gilt diese Gleichung, so ist die $n$te kritische Geschwindigkeit unschädlich; denn der Definition von Y zufolge kann gesetzt werden

$$Y = C_n u_n + a_1(k - k_n) + a_2(k - k_n)^2 + \cdots,$$

$$y = \frac{C_n u_n + a_1(k - k_n) + a_2(k - k_n)^2 + \cdots}{\varpi'(k_n)(k - k_n) + b_2(k - k_n)^2 + \cdots},$$

wobei a und b von k unabhängige Koeffizienten sind, und der Faktor $k - k_n$ hebt sich, wenn C_n verschwindet, sodaß bei dieser Voraussetzung y endlich bleibt, auch wenn man $k = k_n$ setzt.

Analog findet man, daß der Ausschlag in der Richtung der z-Achse bei der $n$ten kritischen Geschwindigkeit endlich bleibt, wenn

$$\int_0^L e_z u_n dx = 0.$$

7. Die Größen, die durch ihr Verschwinden die Unschädlichkeitsbedingungen für die eingespannte Welle geben, haben eine ähnliche Bedeutung wie die Größen A_n und B_n in Nr. 4. Bei dem in Nr. 6 bezeichneten Schwingungsproblem wird nämlich verlangt, eine gegebene Funktion von x auf der Strecke von $x = 0$ bis $x = L$ nach den Normalfunktionen u_n zu entwickeln; ist diese Funktion e_y oder e_z, und setzt man die Gleichungen

$$e_y = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots,$$
$$e_z = B_1 u_1 + B_2 u_2 + \cdots$$

an, so findet man

$$A_n = \frac{\int_0^L e_y u_n dx}{\int_0^L u_n^2 dx}, \quad B_n = \frac{\int_0^L e_z u_n dx}{\int_0^L u_n^2 dx}.$$

Die $n$te kritische Geschwindigkeit ist also unschädlich, wenn bei der Entwicklung von e_y und e_z nach den definierten Normalfunktionen die $n$te von diesen nicht auftritt. Akustisch würde das, wie aus dem zitierten Kapitel von Rayleigh hervorgeht, folgendes bedeuten. Der bei $x = 0$ und $x = L$ eingespannte Stab schwinge in der xy-Ebene, indem er mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnt und das der Abszisse x entsprechende Teilchen die Anfangsordinate e_y hat; dann tritt der $n$te Eigenton des Stabes nicht auf, wenn A_n verschwindet. Analoges läßt sich über eine Schwingung in der xz-Ebene aussagen, bei der e_z die Anfangsordinate ist.

Endlich übersieht man leicht, daß es durch ähnliche Abänderungen der Räder, wie sie in Nr. 5 betrachtet wurden, auch bei der eingespannten Welle theoretisch möglich ist, beliebig viele kritische Geschwindigkeiten unschädlich zu machen.

Die biometrische Analyse einer Pflanzenspecies.

Von F. Ludwig in Greiz.

Die Variationsstatistik hat auch unter den Botanikern in den letzten Jahren immer mehr Freunde gewonnen wie die von mir in dieser Zeitschrift f. Math. u. Physik 49 Bd. 1903 2. Heft S. 269—277 ff. gegebene „Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie" beweist. Bei der Beurteilung der Variabilität von Individuengruppen, für die Feststellung und sichere Abgrenzung einzelner Arten oder Rassen, für die Frage nach Abänderung und Vererbung von Eigenschaften, nach dem Einfluß der äußeren Lebensbedingungen auf meristische Merkmale ist sie unentbehrlich. Einen neuen Beweis hierfür liefert eine Arbeit von Friedrich Reinöhl: „Die Variation im Andröceum der Stellaria media Cyr." (Doktordissertation Tübingen 1903, 344 S. 4° u. 3 Tafeln), die sich mit der Zahl der Staubgefäße dieser Art (ausschließlich der Stellaria media neglecta u. St. pallida) beschäftigt. Die mathematische Analyse der empirisch gefundenen Resultate folgt der Methode Pearsons.

Der erste Teil der Arbeit umfaßt die Zählungen an 44 542 Blüten „ohne Wahl", die die Zeit vom Juni 1900 bis November 1902 unausgesetzt erforderten. Das Gesamtpolygon ist zweigipfelig mit einem Hauptgipfel bei 3 und einem Nebengipfel bei 5, fällt nach links steil ab, während es sich nach rechts allmählig senkt. Die Konstanten betragen $\mu_2 = 1{,}31679$, $\mu_3 = 1{,}57439$, $\mu_4 = 8{,}48245$, $\beta_1 = 1{,}08577$, $\beta_2 = 4{,}8919$; $F = 0{,}5271$. Der kritische Wert F bestimmt mit den Momentquotienten β_1 und β_2 den Kurventypus. Sie weisen hier auf den IV. Pearsonschen Typus. Die weitere Rechnung ergibt aber den maßgebenden Abschnitt a imaginär und mit ihm alle Ordinatenwerte, einen unwiderleglichen Beweis dafür, daß die Kurve eine Komplexkurve ist, die sich aus einzelnen einfachen Variationspolygonen zusammensetzt. Nach den Beobachtungen des Verf. lag es am nächsten, zur Isolierung der einzelnen Formeneinheiten und Gewinnung der einfachen Variationspolygone an einen Zusammenhang der Variation mit der Jahreszeit zu denken. Es wurde daher zunächst das Material nach Jahreszeiten in 3 Abteilungen zusammengestellt: Blüten vom März bis Ende Mai als Frühjahrsblüten (A), solche von Anfang Juni bis Ende August als Sommerblüten (B) und solche von Anfang September bis Ende Februar als Herbst- und Winterblüten (C). Die Übereinstimmung des Polygons der Sommerblüten mit dem Polygon der Gesammtblüten war dabei in die Augen springend. Auch A und C ergaben noch zweigipfelige

Polygone, aber in A und C hatte die Ordinate 3 auf Kosten der höheren Varianten eine Vergrößerung erfahren. Die relative Häufigkeit der Blüten mit 3 Staubgefäßen ist also im Frühjahr und Herbst größer als im Sommer. Es wurden nun ausschließlich die Zählungen der ersten Frühlingsblüten (bis Mitte April) und letzten Winterblüten (Nov. bis Febr.) berücksichtigt. In beiden Polygonen war der Gipfel bis 5 verschwunden, der beherrschende Gipfel blieb bei der Ordinate 3 und der Variabilitätsindex wies auf eine verminderte Variabilität hin. Die mathematische Analyse ergab jedoch, daß auch diese eingipfeligen Polygone noch keiner einheitlichen Kurve entsprachen, daß mithin auch die Frühjahrs- und Winterpflanzen keine Individuengruppe darstellten, daß jedoch zwischen der Variationsreihe der Frühjahrs- und der Herbstblüten eine große Übereinstimmung besteht. Letzteres wird verständlich durch die Beobachtung des Verf., daß von Stellaria media bei uns jährlich nur 2 Generationen zur Entwickelung kommen. Von der Keimung einer Generation bis zur ersten Blüte der folgenden Generation vergehen nahezu 5 Monate und die Keimung tritt nur bei bestimmter Temparatur, nicht vor Ende Februar (meistens im März und April) ein. Die ersten Blüten treten meist erst Mitte und Ende Mai auf. Die ersten Blüten einer neuen Generation sind nicht vor August zu erwarten und von Mitte und Ende Oktober an erfolgt keine Keimung mehr. Die im Juli und August keimenden Pflanzen überwintern und liefern die ersten Frühjahrsblüten. Es gibt daher 1) Sommerpflanzen von etwa 5 Monaten Lebenszeit und 2) überwinternde Pflanzen, deren Lebenszeit nahezu ein Jahr dauert. Die Übereinstimmung der Frühjahrs- und Herbstblüten erklärt sich also daraus, daß beide denselben Pflanzen angehören.

Es fragt sich weiter, woher die Abweichung dieser Variation von der Gesammtvariation kommt. Da wir im Frühjahr vorwiegend alternde absterbende Pflanzen vor uns haben, werden wir von selbst darauf geführt, den Einfluß des Lebensalters auf die Variation zu untersuchen. Verfasser genannter Abhandlung beobachtete an vielen Plätzen Stellaria media vom Erscheinen der ersten Blüten bis zum Verschwinden der letzten und nahm an regelmäßigen Zwischenräumen Zählungen vor, an einzelnen Orten täglich. Der Höhepunkt der Variation wurde erst einige Zeit nach dem ersten Blühen erreicht, sie blieb eine Zeit lang auf der erreichten Höhe und sank zuletzt zurück. Es wurden nun die Blüten wieder in 3 Gruppen zusammengestellt (A erste B mittlere und C letzte Blüten). Die Summe stellte wieder die Variation der Gesamtreihe dar. Bei A bestimmte die Ordinate 3 fast ausschließlich die Form des zweigipfeligen Poly-

gons, bei B war der Gipfel bis 5 der herrschende, C war fast eingipfelig mit dem Gipfel bei 3. Im Sommer ist die Wahrscheinlichkeit, alle Entwickelungsstufen anzutreffen am größten, daher die Übereinstimmung der Variation mit der des Gesamtmaterials. Die 3 Polygone A, B, C erwiesen sich immer noch als komplex, daher beeinflussen außer dem Alter noch andere Faktoren die Variation.

Die Vermutung, daß der Standort von Einfluß sei, lag nicht fern, daher stellte Verfasser weiter das Material nach den Standorten zusammen. Der Erfolg war überraschend. Verfasser erhielt von den verschiedenen Generationen eines und desselben Ortes durchaus übereinstimmende Polygone, die häufig so geringe Abweichungen boten, daß sie als identisch bezeichnet werden konnten. Orte mit günstigen Wachstumsbedingungen lieferten Reihen mit Mittelwert bei 5 und großem Variabilitätsindex, Orte die nur kümmerliche Entwickelung gestatteten, Mittelwert bei 3 und kleinem Variabilitätsindex, wenn alle Altersstufen berücksichtigt werden. Die Variation war also in erster Linie vom Standort abhängig. Da die Abhängigkeit vom Alter nicht eliminiert wurde, das Material nicht homogen war, ließen sich vollständig befriedigende Resultate der mathematischen Analyse nicht erwarten, die Übereinstimmung der Polygone mit den berechneten Kurven ergab jedoch, daß für die einzelnen Standorte die Resultate der reinen Variation nahe kamen (Deckungsfehler 7—10%, bei regulärer Variation unter 2%). Bei Berücksichtigung des Alters an den einzelnen Standorten wurde die früher gefundene Abhängigkeit der Variation vom Alter bestätigt. Die Kurvenberechnung führte auf die Typen I und IV mit Deckungsfehlern von 4, 4,6%, die nur wenig über die zulässige Grenze 2,2% bezw. 2% hinausgingen, sodaß in Anbetracht der willkürlichen Trennung der Altersstufen die Variation nunmehr als regulär betrachtet werden konnte. Gleichaltrige Blüten an demselben Standort ergaben also normale eingipfelige Variationspolygone, bei Vernachlässigung des Blütenalters und des Standortes ergeben sich die aus jenen zusammengesetzten komplexen Polygone.

Die aus den Formeneinheiten bestehende komplexe Species ergibt trotzdem ein konstantes, der Art eigenes Variationspolygon, wenn sehr zahlreiche Beobachtungen an den verschiedensten Standorten und zu den verschiedensten Zeiten des Blühens gemacht werden wie ich dies früher mehrfach hervorgehoben habe.

Im zweiten Teil der Reinöhlschen Abhandlung kommen 29 949 Blüten kultivierter Pflanzen zur Besprechung. Ein großer Teil der Kulturpflanzen stand unter herabgesetzter Beleuchtung, ein anderer stammte von Kulturen auf fettem und magerem Boden, wobei

für beide Fälle wieder eine volle und verminderte Beleuchtung in Betracht kam. Ein Teil der Kulturpflanzen wuchs bei höherer, ein anderer bei niedriger Temperatur auf. Bei allen Kulturpflanzen wurden alle Blüten, die angelegt wurden, von der ersten bis zur letzten gezählt. Daher waren die Zahlen auch durchweg geeignet zur Prüfung der im ersten Teil über die Altersstufen erreichten Resultate. Bei stark reduziertem Lichte blieben die Blüten geschlossen (blühten kleistogamisch), und es mußten die Staubgefäße unter dem Präpariermikroskop gezählt werden.

Wir gehen hier auf die einzelnen sehr interessanten Untersuchungswege und Untersuchungsreihen nicht näher ein, sondern fassen gleich die Resultate des experimentellen Teiles zusammen. Die Beleuchtungsverhältnisse waren auf die Variation von bestimmendem Einfluß. Verminderter Lichtzufluß setzte unter allen Umständen die Variation wesentlich herab, er erniedrigte Mittelwert und Variabilitätsindex. Die Abnahme schritt bis zur regulären Variation um die Maximalordinate 3 fort. Schon in der ersten Generation verschwanden die oberen Varianten vollständig. Die dritte Generation lieferte bei Abstammung von hoch variierenden wie von niedrig variierenden Pflanzen eine reguläre Variation nach dem IV. Pearsonschen Kurventypus, in beiden Fällen mit großer Annäherung an die Normalkurve (Abweichungen innerhalb der gesetzlichen Grenze ca. 2%). Geringer ist der Einfluß der Bodenbeschaffenheit. Doch gingen auf gutem Boden bei kräftiger Düngung die Werte in die Höhe und sanken auf magerem Boden herab. In einem Falle wurde eine reguläre Variation ebenfalls nach dem IV. Typus um die Maximalordinate 5 erreicht. Es gelang jedoch, die Variation über diesen Punkt zu erhöhen, sodaß ein bis 8 abgestuftes Polygon zu stande kam. (Die Fibonnacizahlen sind auch für die Variation der Stellaria media von Bedeutung). Auf magerem Boden wurde bei Reduktion der Beleuchtung in späteren Generationen die Variabilität so gering, daß der Variabilitätsindex nicht mehr die Hälfte einer Varianteneinheit ausmachte. Die Pearsonschen Formeln lieferten kein befriedigendes Resultat mehr. In allen Fällen ist die Variation vom Alter abhängig. Zu Beginn der Entwickelung findet ein Steigen, gegen Ende ein Zurückgehen der Variationswerte statt. Je geringer aber der Umfang der Variation im ganzen ist, um so kleiner werden die durch das Alter hervorgerufenen Unterschiede, sodaß schließlich das Material in seiner Gesamtheit eine geschlossene Formeneinheit darstellt.

Experiment wie Beobachtung gaben keinen Anhalt für einen Einfluß von Temperaturunterschieden auf die Variation. Nach den Ergebnissen der Beobachtungen des I. wie des II. Teils sind Alter,

Bodenbeschaffenheit, Beleuchtung die für die Variation maßgebenden Faktoren. Sie bestimmen die Formeneinheiten, aus deren Variation im einzelnen sich die Gesamtvariation zusammensetzt. Die Variationsmittelpunkte bilden die Zahlen 3 und 5. Die Gesetzmäßigkeit, die im Hervortreten dieser Zahlen zum Ausdruck kommt, kann nur in inneren Ursachen begründet sein. Beobachtung und Experiment zeigten, daß die einzelnen Gruppen einen einheitlichen Ursprung hatten. Ob letztere das erste Resultat eines Vorganges innerhalb der Art darstellen, dessen Ende die Auflösung der Art in einzelne selbständige Arten bedeutet?

Petzvals Theorie der Tonsysteme.

Herausgegeben von Dr. phil. L. Erményi, Ingenieur in Wien.

Einleitung.

In dem Vorworte zu der in Bd. 50 dieser Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung *„Theorie der Störungen der Stützlinien von † Josef Petzval“*, in welchem eine gedrängte Charakteristik dieses Mathematikers enthalten ist, wird erwähnt, daß derselbe unter den verschiedenen Zweigen der angewandten Mathematik auch die Akustik bearbeitet und auch darin Hervorragendes geleistet habe. Hatte er schon im Jahre 1859 eine Theorie der Schwingungen gespannter Saiten aufgestellt, so beschäftigte er sich gegen Ende der 1860er Jahre, wie dies aus den vom Herausgeber kürzlich gefundenen Handschriften hervorgeht, insbesondere mit folgenden Gegenständen: *Theorie der Tonsysteme, Bildung der Akkorde, rationelle Tastatur, mathematische Grundsätze zur Bildung einer neuen Harmonielehre.*

Leider sind durch die in Petzvals Biographie[1]) geschilderten beklagenswerten Umstände auch seine akustischen Arbeiten fast gänzlich verloren gegangen, und haben sich von manchen nur noch einzelne Bruchstücke gefunden. Am verhältnismäßig vollständigsten sind die handschriftlichen Aufzeichnungen über seine Theorie der Tonsysteme, wahrscheinlich deshalb, weil sie aus der letzten Zeit seiner lehramtlichen Tätigkeit stammen. Diese Theorie hatte er in den Jahren 1870—1877 an der Wiener Universität zum Gegenstande seiner Vorträge gewählt, die sehr zahlreich besucht wurden, nicht nur weil der Gegenstand neu

1) Dr. Josef Petzvals Leben und Verdienste von Dr. Erményi. 2. wesentlich vermehrte Ausgabe. Halle a. S. 1903, W. Knapp.

war, sondern auch, weil Petzval, gewohnt selbst den trockensten Gegenstand durch seine Vortragsweise fesselnd zu gestalten, der mathematischen Entwickelung dieser Theorie durch geistreiche Ausfälle gegen d'Alembert, Rameau, Helmholtz u. a., sowie durch humoristische Einstreuungen eine besondere Anziehungskraft zu verleihen verstand.

Daß man damals die Ergebnisse seiner akustischen Untersuchungen für bedeutende hielt, geht auch aus dem Umstande hervor, daß im Jahre 1871 sein früherer Assistent, der Realschul-Professor Ševčik, an der Wiener technischen Hochschule die venia legendi für die mathematische Theorie der Tonsysteme und Schwingungen gespannter Saiten erlangen und darin durch eine Reihe von Jahren eine entsprechende Lehrtätigkeit entfalten konnte. Die Erklärung dafür kann nur in dem Umstande erblickt werden, daß in dem Habilitations-Gesuche ausdrücklich und auch von der zur Beurteilung desselben eingesetzten Kommission, welcher Petzvals Leistungen auf diesem Gebiete bekannt sein mußten, besonders hervorgehoben worden ist, daß Ševčik die Vorlesungen „genau nach Petzval" zu halten gedenke.

Als Petzval nach Vollendung seiner Tonsysteme sich auch an die anderen vorgenannten Arbeiten machte, schwebte ihm wohl die Überzeugung vor, daß hiezu ein Musiker von Fach der viel geeignetere Mann wäre, als ein schlichter Mathematiker, der zu dergleichen Darstellungen gar keinen Beruf in sich fühlt. Er war auch bemüht, einen solchen zu gewinnen. Aber da ergab sich die gewiß sehr merkwürdige Erscheinung, daß alle von ihm eingeladenen Musiker, die mathematisch gebildeten nicht ausgenommen, sich dem Einflusse des herrschenden chromatischen Tonsystems nicht zu entziehen vermochten und sich mit einem anderen als dem 12-stufigen System zu befreunden gänzlich außer stande waren. So blieb ihm nichts übrig, als eine solche Darstellung seiner Studien in einer den mathematischen Wissenschaften möglichst homogenen Fassung, wenn auch ohne Beruf, Neigung und Geschick, selbst zu versuchen, und in einer von den musikalischen Inkonsequenzen tunlichst befreiten Darstellung wenigstens die Elemente einer mathematischen Harmonielehre aufzustellen, wie sie zum gründlichen Verständnisse der Tonsysteme überhaupt notwendig sind. Dieser Umstand ist die Ursache, daß sich Petzval mit seinen musikalischen Ansichten und den geltenden Anschauungen der Musiker in mancher Beziehung nicht in voller Übereinstimmung befindet. Indessen ihm war es auch gar nicht darum zu tun, in diesen Kreisen irgendwie aufklärend oder belehrend zu wirken, vielmehr stellte er sich lediglich die Aufgabe, ein Problem der Akustik auf mathematischem Wege einmal gründlich und erschöpfend zu lösen. Den Anlaß hiezu haben ihm zunächst die damals

neuen und epochemachenden Arbeiten von Helmholtz gegeben, der in seiner Lehre von den Tonempfindungen u. a. auch ein neues 30-stufiges Tonsystem aufgestellt und dieses an einem Harmonium „in natürlicher reiner Stimmung“ praktisch durchgeführt hat.

Die Frage der Tonsysteme wollte also Petzval allgemein behandeln und kritisch untersuchen. Er sagte, daß das beste Tonsystem zu allen Zeiten der Gegenstand der Bemühungen der Tonliebhaber war, und daß denn auch eine ziemliche Anzahl in Vorschlag gebracht worden sei. Da sie aber alle erhalten worden seien auf dem Wege des Versuches und des arithmetischen Herumtastens, auf welchem man zwar sehr gute Tonsysteme, ja sogar das beste erfinden, aber nie beweisen kann, daß man das beste habe, so könne dieser offenbar sehr interessante Gegenstand noch nicht als erledigt betrachtet werden. Es bleibe der mathematischen Analysis vorbehalten, die allgemeine Formel, oder die Formeln, wenn es mehrere voneinander verschiedene gibt, anzugeben, in welcher oder in welchen alle erdenklichen Tonsysteme, sowohl die, welche man bereits kennt, sowie auch jene, welche man noch nicht kennt, enthalten sind, wodurch dann die Auffindung des besten unter ihnen sich als ein einfaches Maximum-Problem gestaltet.

Die Methoden, die er dabei anwandte, sind durchaus originell, und sind die gefundenen Ergebnisse ohne Zweifel ein bemerkenswerter Beitrag für die Tonlehre. Eine nachträgliche Veröffentlichung seiner Theorie ist jedenfalls begründet. Die gefundenen handschriftlichen Aufzeichnungen sind im Anfange so gehalten, als ob Petzval die Abhandlung zur Veröffentlichung bestimmt hätte, was er auch an der einen und anderen Stelle ausdrücklich sagt. Aber im weiteren Verlaufe scheint er diese Absicht wieder fallen gelassen zu haben, zumal die Aufzeichnungen immer lückenhafter, unzusammenhängender werden, und schließlich ganz augenscheinlich nur zu dem Zweck gemacht worden sind, für den mündlichen Vortrag als Behelf zu dienen. Druckreif sind also diese Aufzeichnungen nicht. Es blieb daher nichts übrig, als dieselben umzuarbeiten, beziehungsweise das Skelett aus dem vielen, sonst sehr interessanten Beiwerke herauszuschälen, es teilweise zu ergänzen, und so die eigentliche Theorie in ihrer rein mathematischen Form herzustellen.

Die sämtlichen gefundenen Handschriften, die sich auf die erwähnten Gegenstände beziehen, hat der Herausgeber dem Musik-Archiv der Stadt Wien übergeben, weil er der Meinung ist, daß die Gedanken, die Petzval in seinen Aufzeichnungen niedergelegt hat, nicht spurlos verschwinden sollten, zumal es nicht ausgeschlossen ist, daß sich einmal ein in der Mathematik wie in der Musik gleich bewanderter Fachmann findet, der dieselben verwertet und im Geiste Petzvals weiterführt.

I. Begriff eines Tonsystems.

Bekanntlich hat ein jeder elastischer Körper mehrere einfache Schwingungsreihen, die er entweder einzeln oder auch mehrere zusammen anzunehmen vermag, und zu denen ebensoviele Töne gehören. Ihre Schwingungszahlen in der Sekunde sind die Wurzeln einer transzendenten Gleichung und können in eine steigende Reihe, nach einem gewissen Gesetze fortschreitender Glieder geordnet werden. Die erste und kleinste dieser Schwingungszahlen entspricht dem sogenannten *Grundtone*, die anderen entsprechen den verschiedenen *Obertönen* dieses elastischen Körpers. Z. B. eine wagerecht gespannte, homogene und überall gleich dicke Saite kann eine Reihe von Tönen geben, deren Schwingungszahlen in der Sekunde

$$(1) \qquad \zeta,\ 2\zeta,\ 3\zeta,\ 4\zeta,\ 5\zeta,\ 6\zeta,\ 7\zeta, \ldots$$

sind, unter ζ die Anzahl der Schwingungen des tiefsten oder Grundtones verstanden. Hervorgerufen werden diese Töne und zwar der Grundton durch einfaches Anschlagen der Saite, die Obertöne hingegen, wenn man die Saite in der Hälfte, im Drittel, Viertel ... ihrer Länge leicht mit dem Finger berührt und dann anschlägt. Sie heißen auch Aliquot- oder Flageolett-Töne. Der erste Oberton, dem die Schwingungszahl 2ζ angehört, hat die Eigenschaft, das menschliche Ohr beinahe auf dieselbe Weise anzuregen, wie der Grundton selbst, daher man in einem jeden Tongebilde einen derselben für den anderen setzen kann, ohne den Charakter dieses Tongebildes wesentlich zu ändern. Deshalb werden auch in der Musik beide mit ein und demselben Namen bezeichnet. Heißt z. B. der eine C, so heißt der andere ebenso.

Daher folgende allgemeine Regel: *Man kann die Schwingungszahl ξ eines beliebigen Tones ein oder auch mehrere Mal mit 2 multiplizieren oder dividieren, ohne den Namen des Tones zu ändern.* Gehört also die Schwingungszahl ξ zum Tone X, so gehört auch die Schwingungszahl $2^n\xi$ zu einem Tone namens X, unter n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl verstanden.

Das zweite dieser beiden X heißt nach dem musikalischen Sprachgebrauche die n^{te} *Oktave* des ersten, das Warum ist hier nicht wesentlich. Hieraus folgt unmittelbar, daß die unter (1) aufgezeichneten Töne einer Saite nicht alle verschiedene Namen tragen, sondern in Gruppen mit einem und demselben Namen zerfallen. Insbesondere gehören die Schwingungszahlen: $\zeta,\ 2\zeta,\ 4\zeta,\ 8\zeta,\ 16\zeta, \ldots$ alle zu Tönen einerlei Namens, z. B. namens C, und diese Töne heißen: Grundton, 1te, 2te, 3te und höhere Oktave von C.

Ebenso tragen alle Töne mit den Schwingungszahlen 3ζ, 6ζ, 12ζ, $24\zeta, \ldots$ einerlei Benennung *G*; zu ihnen gehört auch der Ton mit $\frac{3}{2}\zeta$ Schwingungen in der Sekunde, wiewohl er in der Reihe (1) nicht vorkommt, mithin kein Oberton der Saite ist, und da $\frac{3}{2}\zeta$ zwischen ζ und 2ζ enthalten ist, so fällt dieser Ton in den Bereich der 1ten Oktave und heißt Quinte des Grundtones *C*. Hieraus folgt, daß *allgemein die Schwingungszahl der Quinte aus jener des Grundtones erhalten wird durch Multiplikation mit* $\frac{3}{2}$.

So hat also die Quinte von *G* oder die zweite Quinte von C die Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta = \frac{9}{4}\zeta$. Dieser Ton wird samt den Tönen mit $\frac{9}{8}\zeta$, $\frac{9}{16}\zeta$, $\frac{9}{32}\zeta, \ldots$, $\frac{9}{2}\zeta$, 9ζ, $18\zeta, \ldots$ Schwingungen in der Musik mit *D* bezeichnet und der erste von ihnen die *Sekunde* des Grundtones *C* genannt. Zu diesem *C* gehört ferner ein Ton, von welchem das *C* die Quinte ist, seine Schwingungszahl ist $\frac{2}{3}\zeta$. Dieser Ton heißt *F*, seine Oktave hat $\frac{4}{3}\zeta$ Schwingungen und wird die *Quarte* des Grundtones genannt. Obschon kein Oberton der Saite, steht er mit dem Grundton doch in naher Verwandtschaft, weil *C* ein Oberton von *F* ist.

In der Reihe (1) befinden sich noch die Schwingungszahlen

$$5\zeta, \quad 10\zeta, \quad 20\zeta, \ldots$$

Die ihnen entsprechenden Töne heißen alle *E*. Zu ihnen gehört auch der in die erste Oktave fallende mit $\frac{5}{4}\zeta$ Schwingungen, welcher die *große Terz* des Grundtones genannt wird. Man erhält mithin die Schwingungszahl der großen Terz aus jener des Grundtones durch Multiplikation mit $\frac{5}{4}$.

Endlich werden in der Reihe (1) auch Schwingungszahlen 7ζ, 14ζ, $28\zeta, \ldots$ wahrgenommen. Die diesen Zahlen entsprechenden Töne nennt Petzval *Ais*. Zu ihnen gehört auch der Ton mit $\frac{7}{4}\zeta$ Schwingungen in der Sekunde, der ebenfalls in den Bereich der ersten Oktave fällt, und den er die *reine Septime* des Grundtones nennt.[1])

[1]) Hier weicht Petzval von der allgemein gebräuchlichen Bezeichnungsweise wesentlich ab. Nach dieser versteht man unter *ais* den Ton mit der reinen Schwingungszahl $\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$ und nennt ihn die übermäßige Sexte; die Töne

Um die Aufzählung der dem Grundtone verwandten Töne vollständiger zu machen, ist noch zu bemerken, daß die Quinte G auch eine große Terz besitzt mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \zeta = \frac{15}{8} \zeta$; sie heißt H.

Auch die Quarte F besitzt eine große Terz mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \zeta = \frac{5}{3} \zeta$. Sie führt den Namen A.

Stellt man nun die aufgezählten, dem Grundtone C verwandten Töne, die sämtlich in der ersten Oktave enthalten sind, in eine Gruppe zusammen, geordnet nach ihren Schwingungszahlen, von der kleinsten angefangen, so erhält man die Tonreihe:

$$\begin{array}{cccccccc} C & D & E & F & G & A & H & C. \\ \zeta & \frac{9}{8}\zeta & \frac{5}{4}\zeta & \frac{4}{3}\zeta & \frac{3}{2}\zeta & \frac{5}{3}\zeta & \frac{15}{8}\zeta & 2\zeta. \end{array} \tag{2}$$

Hier fehlt die Septime mit der Zahl von $\frac{7}{4} \zeta$ Schwingungen. Sie würde den Platz zwischen A und H einnehmen und nach dem in der Musik angenommenen Bezeichnungsgebrauche *Ais*, d. h. erhöhtes A, heißen ist aber nicht eingeschaltet worden, weil sie auch in den herrschenden Tonsystemen der modernen Musik eigentlich nicht vorkommt.

Diese hier angeführten Töne bilden eine kleine, nur aus 7 Noten bestehende Melodie, welche nicht gar so übel klingt und den Leuten nur deshalb unangenehm ist, weil sie sie gar zu oft hören müssen. Demungeachtet bildet sie aber doch ein schon deshalb merkwürdiges Liedchen, weil es nach Belieben heiter oder schwermütig klingt. Heiter, lustig, munter, hart (dur), wenn man es in der Ordnung (2) der Töne von C angefangen absingt. Traurig, weich (moll), wenn man es von A anfängt und in der Ordnung

$$\begin{array}{cccccccc} A & H & C & D & E & F & G & A \\ \eta & \frac{9}{8}\eta & \frac{6}{5}\eta & \frac{27}{20}\eta & \frac{3}{2}\eta & \frac{8}{5}\eta & \frac{9}{5}\eta & 2\eta \end{array} \tag{3}$$

abspielt. Unter den Tönen stehen auch hier dieselben Schwingungszahlen wie in (2), nur η anstatt $\frac{5}{3} \zeta$ gesetzt und reduziert auf die 1. Oktave.

---

h und *b* heißen Septime, und zwar *h* mit der reinen Schwingungszahl $\frac{15}{8}$ die große Septime, und *b* mit der reinen Schwingungszahl $\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{9}{5}$ die kleine Septime.

Die Reihe (2) heißt die *C*-Dur-, die Reihe (3) hingegen die *A*-Moll-Tonleiter (Skala) und heißen in denselben beziehentlich

der 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8. Ton
Prim	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave.

Die Tonabstände in diesen 2 Tonleitern sind selbstverständlich nicht dieselben. Mithin gibt es mehrerlei Terzen, Quarten usw., verminderte, kleine, große, übermäßige usw., was in die musikalische Nomenklatur einige Verwirrung zu bringen geeignet ist. Bei der Lösung des arithmetischen Problems jedoch, die hier angestrebt wird, können wir sie abseits lassen. Nur soviel ist nötig zu erwähnen, daß die kleine Terz der Moll-Tonleiter als dritter Ton in derselben entnommen ist und die Schwingungszahl $\frac{6}{5}\eta$ hat, während die große Terz der dritte Ton der Dur-Tonleiter ist mit der Schwingungszahl $\frac{5}{4}\zeta$.

Auch kann erwähnt werden, daß die Moll-Tonleiter nicht immer die (3) gewesen ist. Unter Papst Gregor dem Großen, der anstatt der griechischen die jetzt noch üblichen Buchstabenbenennungen einführte, wurde sie so: *A. B. C. D. E. F. G. A* gesungen, wobei unter *B* das heutige *H* verstanden wurde. Die moderne Musik hingegen braucht nur im Absteigen die Form (3), im Aufsteigen aber einen Zwitter aus halb Dur, halb Moll.

Ungeachtet der allgemeinen Abneigung gegen die beiden Tonleitern bleibt es aber doch Tatsache, daß die sieben verschiedenen Töne derselben sowohl nacheinander, als auch mehrere derselben mit Auswahl gleichzeitig angeschlagen, einen dem Ohre angenehmen Eindruck hervorbringen. Mehrere gleichzeitig erklingende Töne geben einen *Akkord.* So gibt der Grundton mit der großen Terz und Quinte einen Akkord

$$\begin{matrix} C & E & G \\ \zeta & \frac{5}{4}\zeta & \frac{3}{2}\zeta, \end{matrix}$$

in dem die Schwingungszahlen im Verhältnisse 4, 5, 6 zu einander stehen; er wird der *C*-Dur-Dreiklang genannt und gilt mit allen seinen Versetzungen und insbesondere in der Ordnung der Töne *C, G, E* und dem Verhältnisse 2, 3, 5 der Schwingungszahlen für den angenehmsten oder konsonantesten aller Akkorde.

Solcher Dur-Dreiklänge lassen sich aus den sieben Tönen der Skala noch zwei bilden, nämlich:

$$\begin{matrix} G & H & D & & F & A & C \\ \frac{3}{2}\zeta & \frac{15}{8}\zeta & \frac{9}{4}\zeta & \text{und} & \frac{4}{3}\zeta & \frac{5}{3}\zeta & 2\zeta, \end{matrix}$$

ihre Schwingungszahlen stehen ebenfalls im Verhältnisse 4, 5, 6. Diese Akkorde heißen daher der *G*-Dur- und der *F*-Dur-Dreiklang. Alle bestehen aus: Grundton, große Terz und Quinte, nur ist im ersten der Grundton *C*, im zweiten *G*, im dritten *F*, Töne, von welchen der erste oder Grundton *C* auch Tonika, der zweite *G* die Oberdominante, der dritte *F* die Unterdominante heißt. Die Tonleiter ist mithin zusammengesetzt aus den Bestandtönen dreier Dur-Dreiklänge.

Auch in der Molltonleiter kann aus Grundton *A*, kleiner Terz *C* und Quinte *E* ein Dreiklang, der auf das Ohr einen angenehmen Eindruck macht, gebildet werden; sein Klang ist aber weich (moll), düster, melancholisch, und es können auch hier wieder 3 solche Molldreiklänge aus den 7 Tönen der Skala zusammengestellt werden, nämlich:

$$\begin{matrix} A & C & E \\ \eta & \frac{6}{5}\eta & \frac{3}{2}\eta, \end{matrix} \quad \begin{matrix} D & F & A \\ \frac{27}{20}\eta & \frac{8}{5}\eta & 2\eta \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} E & G & H \\ \frac{3}{2}\eta & \frac{9}{5}\eta & \frac{9}{4}\eta. \end{matrix}$$

Die Töne des ersten und dritten unter ihnen stehen genau im Verhältnisse der ganzen Zahlen 10, 12, 15. Diese Akkorde klingen gut. Der zweite derselben hat aber die Töne in etwas anderen Schwingungsverhältnissen und klingt auch minder gut. Das Verhältnis 10, 12, 15 ist aber samt dem Wohlklange wieder hergestellt, wenn man anstatt des Tones *D* mit $\frac{27}{20}\eta$ Schwingungen einen anderen, *d* mit $\frac{4}{3}\eta$ Schwingungen setzt, der die genaue Quarte des Grundtones *A* ist. Dieses *d* ist $= \frac{80}{81} D$, mithin sehr wenig von *D* unterschieden.

Die Theorie verlangt also zum vollständigen Wohlklang der *C*-Dur- und *A*-Moll-Tonleiter und der darin enthaltenen Dreiklänge sehr nahe aneinanderliegende Töne *D* und *d*, ein Fall, der sich auch bei anderen Anlässen öfter wiederholt. Nebst diesen 6 Dreiklängen ist auch in der Musik von Wichtigkeit der Septimenakkord, der aus Grundton, der großen Terz, Quinte und Septime zusammengesetzt ist:

$$\begin{matrix} C & E & G & Ais \\ \zeta & \frac{5}{4}\zeta & \frac{3}{2}\zeta & \frac{7}{4}\zeta. \end{matrix}$$

Die Schwingungszahlen dieser Töne stehen in dem einfachen Verhältnisse 4, 5, 6, 7. Dieser vierstimmige Akkord hat die besondere Eigenschaft, daß nach ihm der Dreiklang *FAC* besonders gut klingt, so daß er denselben vorzubereiten, zu verlangen, gewissermaßen dazu zu leiten scheint, und namentlich ist es die Septime, die ihm diesen Charakter verleiht, die daher auch der harmonische *Leitton* heißt, oder mindestens heißen sollte.

Der Septimenakkord scheint eine neue Entdeckung zu sein. Im Altertume unbekannt, kommt er auch in der Kirchenmusik Palestrinas noch nicht vor. In der neueren Musik findet er sich entschieden häufiger, als irgend ein anderer. Nur wird in demselben die reine Septime *Ais* durch einen anderen, wesentlich verschiedenen Ton *B* ersetzt, wodurch er einen schärferen Klang bekommt, dabei aber seinen oberwähnten Charakter nicht wesentlich verändert.

Es kommen in der Musik sehr viele verschiedene Akkorde vor; die hier zur Sprache gebrachten drei, nämlich der Dur-Dreiklang, der Moll-Dreiklang und der reine Septimenakkord, deren Töne beziehentlich in den Verhältnissen 4, 5, 6, dann 10, 12, 15 und endlich 4, 5, 6, 7 stehen, sind die einzigen vorzugsweise wohlklingenden, welche man mit dem Namen *konsonante Akkorde* belegt; die übrigen sogenannten *dissonanten Akkorde* sollen an einem anderen Orte zur Sprache gebracht werden.

Nicht nur in Akkorden, sondern auch nacheinander erklingend, erregen die Töne der zwei in Rede stehenden Tonleitern eine angenehme Empfindung, und es gibt eine große Mannigfaltigkeit von Gesängen, die vorzugsweise aus den Tönen derselben zusammengesetzt sind, und die man auch durch Begleitung mit den eben angeführten Akkorden verschönert. Man sagt von ihnen, daß sie je nach ihrem Charakter, ob heiter oder düster, und je nachdem die Begleitung mit Dur- oder mit Moll-Akkorden vorzugsweise stattfindet, aus *C*-Dur oder *A*-Moll gedichtet seien.

Anstatt des Grundtones *C* kann man auch einen jeden beliebigen anderen wählen und auf demselben eine Tonleiter gründen, gleichviel ob er in der *C*-Dur-Skala enthalten ist oder nicht. Man hat nur die gegebene Schwingungszahl dieses neuen Grundtones anstatt ζ in die Reihe (2) einzusetzen, um die Schwingungszahlen der neuen Tonleiter zu erhalten. Es sei z. B. *D* der neue Grundton mit der Schwingungszahl $\frac{9}{8}\zeta$, so erhält man, $\frac{9}{8}\zeta$ statt ζ setzend, die neue *D*-Tonleiter

$$\begin{array}{cccccccc} D & e & Fis & G & a & H & Cis & D \\ \frac{9}{8}\zeta & \frac{81}{64}\zeta & \frac{45}{32}\zeta & \frac{3}{2}\zeta & \frac{27}{16}\zeta & \frac{15}{8}\zeta & \frac{135}{64}\zeta & \frac{9}{4}\zeta. \end{array}$$

Vier Töne derselben, *D, G, H, D,* sind auch in der *C*-Skala enthalten, der zweite, mit der Schwingungszahl $\frac{81}{64}\zeta$ versehen, ist mit dem *E* der *C*-Tonleiter, welches die Zahl $\frac{5}{4}\zeta$ trägt, beinahe identisch. Nennt man ihn also *e*, so ist $\frac{e}{E} = \frac{81}{80}\cdot$ Ebenso ist der fünfte mit *a* bezeich-

nete beinahe das A der C-Skala, und es ist wieder $\frac{a}{A} = \frac{81}{80}$. Die beiden mit *Fis* und *Cis* bezeichneten Töne endlich sind von allen in der C-Tonleiter enthaltenen wesentlich verschieden und liegen beziehentlich zwischen F und G, und zwischen C und D, mit der gewissen Bedeutung eines erhöhten F und erhöhten C.

Ähnliche Bewandtnis hat es nun mit allen von verschiedenen Grundtönen ausgehenden Tonleitern. Sie bestehen teils aus Tönen, die auch schon in anderen Tonleitern vorrätig sind, mitunter aus wesentlich verschiedenen, aber oft auch aus solchen, die von den Tönen anderer Skalen nur sehr wenig abweichen. Diese letzteren bilden nun ein sehr lästiges Tonproletariat, welches, wenn zugelassen, in der musikalischen Praxis sowohl wie auch in der Theorie störend auftritt, indem es bei einigen Instrumenten eine Unzahl beinahe gleichklingender Saiten, bei andern eine Unzahl von Bünden verlangt, die beinahe an dieselben Stellen des Griffbrettes fallen usw., und was das schlimmste ist, eine Unzahl von Tonnamen und -zeichen erheischt, welche die Elemente der Tonschrift in eine Art chinesischen, unübersehbaren Alphabets verwandeln würden. Es ist daher immer für wichtig erachtet worden, diese beinahe gleichlautenden Töne zu beseitigen.

Zu diesem Zwecke ist das nächstliegende, zuerst sich darbietende Verfahren folgendes: In der C-Leiter kommt der Ton A als große Terz von F vor mit der Schwingungszahl $\frac{5}{3}\zeta$. In der D-Leiter erscheint ein ähnlicher a als Quinte von D mit der Schwingungszahl $\frac{27}{16}\zeta$, die von $\frac{5}{3}\zeta$ nur um $\frac{1}{48}\zeta$ abweicht. Beide schafft man ab, und ersetzt sie durch einen einzigen Ton A' mit der Schwingungszahl $\frac{161}{96}\zeta$, die zwischen $\frac{27}{16}\zeta$, und $\frac{5}{3}\zeta$ liegt und von jeder dieser beiden Zahlen nur mehr um $\frac{1}{96}\zeta$ verschieden ist.

Dieses Verfälschen der Töne nennt man in der Kunstsprache *temperieren*, und es ist nunmehr A' sowohl die verfälschte oder temperierte Terz von F, wie auch die temperierte Quinte von D. Und es heißt diejenige von der Einheit nur sehr wenig abweichende Zahl, mit welcher man die reine Terz, Quinte, Septime usw. multiplizieren muß, um die temperierte Terz, Quinte, Septime usw. zu erhalten, *die Temperatur* dieser reinen Terz, Quinte, Septime usw. So ist im gegenwärtigen Beispiele $\frac{161}{160}$ die Temperatur der Terz A von F, und $\frac{161}{162}$ die Temperatur der Quinte a von D.

Die Notwendigkeit des Temperierens wiederholt sich sehr oft; denn die Musik benötigt die Töne mehrerer Tonleitern teils um der Höhe der menschlichen Stimme, die sie zu begleiten hat, gerecht zu werden, hauptsächlich aber, weil sie durch den Übergang zu den Akkorden anderer Tonleitern ihre schönsten und überraschendsten Wirkungen erzielt. Jede neue Tonleiter erheischt aber in der Regel auch neue Töne, die mitunter von den Tönen bereits vorhandener und im Gebrauche stehender Tonleitern sehr wenig abweichen und deshalb nicht durch einen besonderen Aufwand von Klangmitteln, z. B. Saiten, Bünde usw. erzeugt, sondern lediglich durch Temperieren hergestellt werden. Nur geschieht dasselbe nicht in der hier auseinandergesetzten, etwas primitiven Weise, weil es meistenteils auch nicht 2 Töne sind, die einen gemeinschaftlichen Repräsentanten erhalten, sondern mehrere. Es spielt dieser Repräsentant einem dieser Töne gegenüber die Rolle einer temperierten kleinen Terz, zum dritten stellt er eine temperierte Quinte, zum vierten eine Septime dar.

Hierbei ist es nun freilich unerläßlich, daß ein jedes der so temperierten Intervalle etwas von seiner Reinheit abgebe; jedoch soll dies in rationeller Weise so eingeleitet werden, daß der Gesamtbetrag der so gebrachten Opfer ein möglichst kleiner sei, das heißt, daß die Temperaturen der sämtlichen Reintöne möglichst wenig von der Einheit abweichen. Einen Ton, der von demjenigen Reintone, den er vorzustellen berufen ist, in merklicher, leicht hörbarer Weise abweicht, nennen die Musiker in ihrer Kunstsprache nicht mehr einen temperierten Ton, sondern einen *heulenden Wolf.*[1]) So wird z. B. ein Ton, dessen Temperatur $\frac{81}{80}$ ist, mithin um $\frac{1}{80}$ oder um noch mehr von der Einheit abweicht, bereits zu den heulenden Wölfen gezählt. Dieser Abstand von der Reinheit wird ein Komma genannt.

Hat man nun auf dem Wege des Temperierens die sehr nahe aneinander liegenden Töne beseitigt, so bleiben offenbar nur solche übrig, die sich in beträchtlichem Abstande von den Werten ihrer Schwingungszahlen befinden. Diese liegen aber vermöge der vorgenommenen Reduktion auf der ersten Oktave zwischen ζ und 2ζ, können somit

1) Diese Bezeichnung entspricht dem historisch-mathematischen (physikalischen) Standpunkte. Heute nennen die Musiker einen solchen Ton schlechtweg einen „falschen". Unter heulendem Wolf verstehen sie den einem Instrumente infolge eines Material- oder Konstruktionsfehlers zufällig anhaftenden unreinen Ton, wie z. B. bei der Orgel, wenn das Spielventil nicht ordentlich schließt, oder bei Blasinstrumenten, wenn sie noch nicht genügend warm geworden sind usw. Dieses ist der moderne physiologische (akustische) Standpunkt; den historisch-physikalischen hat man aufgegeben.

nicht anders als in beschränkter Anzahl vorhanden sein. Sie stellen sozusagen das Tonalphabet vor, und man nennt ihren Inbegriff ein *Tonsystem.*

II. Das 12-stufige, chromatische Tonsystem. Seine Eigenschaften.

Der Begriff des besten Tonsystems ist ein relativer, insofern verschiedene Tonliebhaber auch verschiedene Anforderungen an ein solches stellen werden, je nach dem Instrumente, das sie behandeln, je nach dem Zwecke, den sie verfolgen, und der entweder sein kann, praktische Musik zu machen oder theoretische Forschungen anzustellen, ferner je nachdem sie einer Notenschrift bedürfen oder nicht usw.

Die Allgemeinheit der mathematischen Untersuchung verlangt, daß wo möglich alle diese Anforderungen berücksichtigt werden. Man muß sich daher vor allem die Frage stellen: Welches sind die wünschenswerten Eigenschaften eines guten Tonsystems? Die Antwort darauf findet man am leichtesten, wenn man sich irgend ein Tonsystem, etwa das herrschende, als Beispiel vorlegt und untersucht. Hiedurch wird man nämlich mit einem Male in medias res versetzt, und lernt die Vorzüge kennen, die beizubehalten oder wenn möglich noch zu steigern wünschenswert sind, und die Mängel, welche man entweder ganz zu vermeiden oder wenigstens zu verringern streben wird.

Das gegenwärtig allgemein übliche, im Klavier verkörperte Tonsystem besteht aus nur 12 Tönen; sie sind der Reihe nach mit ihren Schwingungszahlen:

C	*Cis*	*D*	*Dis*	*E*	*F*	*Fis*	*G*	*Gis*	*A*	*B*	*H*	*C*
ζ	$\alpha\zeta$	$\alpha^2\zeta$	$\alpha^3\zeta$	$\alpha^4\zeta$	$\alpha^5\zeta$	$\alpha^6\zeta$	$\alpha^7\zeta$	$\alpha^8\zeta$	$\alpha^9\zeta$	$\alpha^{10}\zeta$	$\alpha^{11}\zeta$	$\alpha^{12}\zeta = 2\zeta$.

Mithin ist $\alpha^{12} = 2$, also $\alpha = \sqrt[12]{2} = 1{,}05946$.

Diese Zahlen stehen in einer geometrischen Progression, die auch ins Unendliche fortgesetzt werden kann, aber darum doch nur diejenigen Töne liefert, die in der ersten Gruppe von zwölfen enthalten sind, und zwar in derselben Ordnung; denn es ist $\alpha^{13}\zeta = \alpha^{12}\cdot\alpha\zeta = 2\alpha\zeta = Cis$, $\alpha^{14}\zeta = \alpha^{12}\cdot\alpha^2\zeta = 2\alpha^2\zeta = D$ usw., was also dieselben Töne in der zweiten Oktave gibt. Man kann sie sich in einen Kreis wie die 12 Ziffern eines Uhrzifferblattes angeordnet denken, und kann jetzt von jeder beliebigen unter ihnen anfangend sehen, daß auf dieselbe Weise, wie die zweite Gruppe aus der ersten gebildet wird, auch die dritte aus der zweiten, die vierte aus der dritten usw. und schließlieh die erste aus der letzten hervorgeht.

Ähnlich wie diese 12 Bestandtöne bilden auch die Quinten einen in sich zurückkehrenden Kreis, der von einem beliebigen Tone als

nulltem gezählt der siebente ist, nämlich die Quinte dieses nullten. Das gibt den Quintenzirkel:

C G D A E H Fis Cis Gis Dis B F C,

nach welchem offenbar dieselbe Reihe von Quinten abermals erscheint.

Auch die Terzen schließen sich zyklisch zusammen, es sind dies jedoch kleinere, aus nur einigen der 12 Töne gebildete Kreise. Die großen Terzen bilden deren 4, nämlich:

C	*E*	*Gis*	*C*
Cis	*F*	*A*	*Cis*
D	*Fis*	*B*	*D*
Dis	*G*	*H*	*Dis*.

Die kleinen Terzen ergeben hingegen deren 3, nämlich:

C	*Dis*	*Fis*	*A*	*C*
Cis	*E*	*G*	*B*	*Cis*
D	*F*	*Gis*	*H*	*D*.

Es gehen mithin 3 große und 4 kleine Terzen auf die Oktave.

Da zu jedem der 12 Töne die Quinte, die kleine und die große Terz unter eben den 12 Tönen gefunden wird, so kann man auch über jedem derselben als Grundton einen Dur- und einen Moll-Dreiklang konstruieren, und da aus je 3 solchen Dreiklängen eine Tonleiter gebildet werden kann, so ergeben sich aus nur 12 Tönen 12 vollständige Dur- und 12 vollständige Moll-Tonleitern, was unstreitig eine bedeutende Leistung mit wenigen Mitteln ist, die hauptsächlich durch den Umstand möglich wird, daß das Tonsystem ein in sich zurückkehrendes ist, und infolgedessen ein jeder Ton in allen möglichen Eigenschaften erscheint und Dienste leistet, einmal als Grundton, dann als Quinte eines anderen Grundtones, dann als große Terz eines dritten, ferner als kleine Terz eines vierten usw. Diese Eigenschaft des in sich Zurückkehrens ist also eine wünschenswerte, wenigstens insofern, als unter sonst ähnlichen Umständen das in sich zurückkehrende Tonsystem vor einem anderen den Vorzug verdient.

Eine in ähnlicher Weise schätzbare Eigenschaft ist das Fortschreiten der Töne in geometrischer Progression. Sie werden dadurch im musikalischen Sinne, das heißt nach dem Urteile eines geübten Gehörs, äquidistant, und das aus solchen äquidistanten Tönen zusammengesetzte Tonsystem bietet vor einem anderen ähnliche Vorteile, wie ein in gleiche Teile eingeteilter Maßstab vor einem anderen mit ungleicher Teilung. Es erhalten alle gleichnamigen Intervalle einerlei Wert, alle Quinten,

großen und kleinen Terzen usw. werden gleich, d. h. entweder gleich rein, oder gleich temperiert, alle Akkorde, alle Tonleitern haben, abgesehen von der Tonhöhe, einerlei Klang und stellen eben darum im Grunde auch nur eine einzige Leiter vor, und ein jedes Tonstück klingt, in jeder beliebigen Tonart vorgetragen, gleich gut oder gleich übel.

Ob sich aber die reine Tonleiter, die doch offenbar im Tonsysteme möglichst getreu wiedergegeben sein sollte, mit der Einteilung in gleiche Teile überhaupt, und mit der 12-Teilung insbesondere vertrage, ist erst die Frage. Untersucht man, um hierüber vorläufigen Aufschluß zu erhalten, die reine Dur-Tonleiter (2), so gewahrt man in derselben mehrerlei Abstände nächster Nachbartöne voneinander. So stehen C und D und F und G, ebenso A und H im Verhältnis $\frac{9}{8}$ zueinander. Diesen Abstand nennt man einen *großen ganzen* Ton. In dieser Weise besteht zwischen D und E, desgleichen zwischen G und A das Verhältnis $\frac{10}{9}$ der Schwingungszahlen. Dieser Abstand wird ein *kleiner ganzer* Ton genannt. Zwischen E und F, ebenso zwischen H und C ist das Verhältnis $\frac{16}{15}$, was ein *großer Halbton* heißt. Beachtet man noch endlich die ebenfalls wichtige kleine Terz mit dem Schwingungsverhältnisse $\frac{6}{5}$ gegen die große Terz mit $\frac{5}{4}$, so stehen diese beiden Terzen im Abstande $\frac{25}{24}$, der ein *kleiner Halbton* heißt.

Die Oktave wäre mithin aus 3 großen ganzen, 2 kleinen ganzen und 2 großen Halbtönen zusammengesetzt. Das 12stufige Tonsystem hebt den Unterschied zwischen großen und kleinen Ganz- und Halbtönen auf und unterscheidet nur ganze und halbe Töne schlechtweg, läßt mithin die Oktave aus 6 ganzen oder 12 halben Tönen bestehen, was, als erste Annäherung betrachtet, auch ohne Widerrede mathematisch korrekt ist. Natürlich ist von diesen Tönen keiner rein, sondern es sind alle mehr oder minder temperiert. Um zu sehen in welchem Maße, berechnet man ihre Schwingungszahlen. Sie sind:

$$
(4)\quad
\begin{array}{ll}
C \;= \zeta & Fis = \alpha^6\zeta = 1{,}41421\zeta \\
Cis = \alpha\,\zeta = 1{,}05946\zeta & G \;= \alpha^7\zeta = 1{,}49831\zeta \\
D \;= \alpha^2\zeta = 1{,}12246\zeta & Gis = \alpha^8\zeta = 1{,}58740\zeta \\
Dis = \alpha^3\zeta = 1{,}18921\zeta & A \;= \alpha^9\zeta = 1{,}68179\zeta \\
E \;= \alpha^4\zeta = 1{,}25992\zeta & B \;= \alpha^{10}\zeta = 1{,}78180\zeta \\
F \;= \alpha^5\zeta = 1{,}33484\zeta & H \;= \alpha^{11}\zeta = 1{,}88775\zeta .
\end{array}
$$

Es sei nun die Temperatur der Quinte, das heißt diejenige der Einheit nahe Zahl, mit welcher die Schwingungszahl der reinen Quinte $\frac{3}{2}\zeta$ mul-

tipliziert werden muß, um die Schwingungszahl der temperierten Quinte des Systems zu erhalten, q, so ist:

$$\frac{3}{2} q = 1{,}49831, \text{ mithin } q = 1 - \frac{1}{886} = \frac{885}{886}.$$

Diese Temperatur q gilt für alle Quinten wegen der absoluten Gleichheit aller gleichnamigen Intervalle.

Nennt man ebenso die Temperatur der großen Terz T, so ist:

$$\frac{5}{4} T = 1{,}25992, \text{ mithin } T = 1 + \frac{1}{126} = \frac{127}{126}.$$

Die Temperatur der kleinen Terz sei mit t bezeichnet; es wird denn für alle kleinen Terzen des ganzen Systems:

$$\frac{6}{5} t = 1{,}18921, \text{ mithin } t = 1 - \frac{1}{111} = \frac{110}{111}.$$

Endlich sei die Temperatur der Septime, welche die reine Schwingungszahl $\frac{7}{4}\zeta = 1{,}75\zeta$ besitzt, die nur mit der Schwingungszahl des Tones B im Verzeichnisse (4), nämlich $1{,}78180\zeta$ vergleichbar ist, s, so wird:

$$\frac{7}{4} s = 1{,}78180, \text{ mithin } s = 1 + \frac{1}{55} = \frac{56}{55}.$$

Man sieht hier, daß im 12stufigen Tonsysteme die Quinten der Reinheit sehr nahe kommen, die Terzen sind zwar eben noch nicht heulende Wölfe, aber sehr nahe daran auf diese Benennung Anspruch machen zu dürfen. Die Septime endlich ist entschieden ein heulender Wolf, vorausgesetzt, daß man den Ton B wirklich als den Repräsentanten des sechsten Obertones von C mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4}\zeta$ ansieht. Nach einer anderen Ansicht kommt man dem eigentlichen Sachverhalte aber am nächsten, wenn man annimmt, daß die reine Septime in dem 12stufigen Tonsysteme, welches auch das *chromatische* heißt, gar nicht vertreten sei, und daß dieser Ton B gar kein Repräsentant der reinen Septime mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4}\zeta$ sei, sondern der eines anderen Reintones mit der einfachen Schwingungszahl $\frac{9}{5}\zeta$, der vermöge dieser Einfachheit ähnlich der kleinen Terz mit der Schwingungszahl $\frac{6}{5}\zeta$, so wie diese, eine selbständige Rolle in der Musik zu spielen berufen ist. Die Theorie wiederspricht indessen dieser Ansicht, indem sie dieses B des chromatischen Systems für den wirklichen Repräsentanten der reinen Septime erklärt und somit zu einem heulenden Wolfe macht. Das soll in der Folge gezeigt werden.

Alle diese, denselben Namen tragenden Intervalle sind auch gleich temperiert, was sich, wie man sagt, dadurch kennzeichnet, daß sie mit den ihnen entsprechenden Reintönen zugleich angeschlagen, gleichviel Schwebungen hören lassen. Darum nennt man dieses Tonsystem auch ein *gleichschwebend temperiertes.* Dies ist aber irrig; die Anzahl der Schwingungen ist vielmehr der Schwingungszahl, der Tonhöhe proportional, und wenn man daher das chromatische System oder irgend ein ähnliches gleichschwebend temperiert nennt, so ist dies nur in demselben Sinne richtig, in welchem man dasselbe *auch gleichstufig* nennen kann.

Es dient vielleicht zur Klarheit, besonders für diejenigen Leser, die mehr mathematisch als musikalisch gebildet sind und für welche diese Abhandlung vorzugsweise verfaßt ist, zu bemerken, daß der Begriff von Intervall und Stufe ein anderer ist in der Musik als in der Geometrie. Sind nämlich M und M' Punkte einer geraden Linie, x und x' ihre Koordinaten, so ist bekanntlich $x' - x$ das zwischen ihnen vorhandene geometrische Intervall. Sind hingegen x' und x Schwingungszahlen zweier Töne statt Koordinaten, so ist das musikalische Intervall zwischen diesen Tönen $\frac{x'}{x}$. Im ersteren Sinne sind also Punkte, denen Koordinaten $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ entsprechen, äquidistant, wenn $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \ldots$ besteht, d. h. wenn diese Koordinaten eine arithmetische Progression bilden; in der Musik hingegen sind Töne mit diesen Schwingungszahlen äquidistant, wenn $\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} \cdots$ ist, d. h. wenn diese Schwingungszahlen in geometrischer Progression stehen.

Nennt man hiemit im Zusammenhange x die Schwingungszahl eines Tones in einem temperierten Tonsysteme und n die Anzahl der Schwebungen in der Sekunde, die derselbe mit dem Reintone macht, den er darzustellen berufen ist, so ist das System ein gleichschwebend temperiertes, wenn nicht n, wohl aber $\frac{n}{x}$ eine konstante Größe ist, die nur für verschieden benannte Intervalle: Terz, Quinte, Septime, ... andere und andere Werte anzunehmen vermag.

Gegenüber den Vorteilen des 12stufigen Tonsystems sind indessen auch Schattenseiten desselben zu verzeichnen, sogar solche, daß Petzval nicht anstand, dieses heute allgemein verbreitete System keineswegs als das beste zu erklären, nicht etwa in der Absicht, dieses durch ein vollkommeneres zu ersetzen, was er für ein ganz aussichtsloses Beginnen hielt, sondern bloß um zu zeigen, daß die wissenschaftliche Untersuchung unabhängig von der allgemeinen Anschauung ihre eigenen

Wege gehen muß, und um für den Fall, als vielleicht dereinst doch durch mächtige und langandauernde Einflüsse eine zweckmäßige, allgemeine Reform der Musik möglich werden sollte, die Vorarbeiten zu liefern, welche die Art und den Umfang einer solchen Reform zu bestimmen haben.

Die Vereinfachung des Tonalphabets und Zurückführung desselben auf möglichst wenige, z. B. auf nur 12 Töne, wie im chromatischen Systeme, ist allerdings ein Vorteil; es kann aber in der Vereinfachung auch zu weit gegangen sein. Wenn man beispielsweise das Alphabet der deutschen Sprache dadurch vereinfachen wollte, daß man Buchstaben von ähnlichem Klange, wie b und p, d und t, f, v und w usw. je durch ein einziges Zeichen ersetzte, so wäre dies offenbar ein zu weit getriebenes Vereinfachungsbestreben, weil man dann nicht mehr imstande wäre, den richtigen Laut der Worte in der Schrift wiederzugeben. In ähnlicher Weise kann auch in der Vereinfachung des Tonalphabets durch Reduktion auf nur 12 Töne zu weit gegangen sein, wenn dadurch Tonmangel erzeugt ist, infolge dessen wichtige Intervalle und brauchbare Akkorde ausgeschlossen und gewisse musikalische Wirkungen und Feinheiten unerreichbar werden und wenn ferner der Wohllaut der Akkorde dadurch beeinträchtigt wird. Beides ist wirklich der Fall.

Wie bereits bemerkt worden ist, schließt das chromatische Tonsystem den sechsten Oberton des Grundtones, die reine Septime nämlich, die auf die erste Oktave reduziert das Schwingungsverhältnis $\frac{7}{4}$ hat, aus und ersetzt denselben im Dominant-Septimen-Akkord durch einen heulenden Wolf. Hiemit wird aber nicht nur das Intervall $\frac{7}{4}$, sondern werden alle Intervalle, die durch einfache Brüche von der Form $\frac{m}{n}$ ausgedrückt werden und wo entweder der Zähler oder der Nenner die Primzahl 7 ist, ausgeschlossen. In der Tat stehen die Schwingungszahlen der 4 Töne des Dominant-Septimen-Akkordes, z. B. *G*, *H*, *D*, *Eis* im Verhältnisse der Zahlen 4, 5, 6, 7. Fehlt mithin der vierte Ton *Eis*, so fehlt zu *G* das Intervall $\frac{7}{4}$, mithin auch seine Ergänzung zur Oktave: $\frac{8}{7}$, die mit $\frac{7}{4}$ multipliziert das Produkt 2 gibt. Da aber das System über jedem seiner Bestandtöne konstruiert ist, so fehlen die Intervalle $\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7}$ nicht nur zu *G*, sondern zu jedem anderen Tone im ganzen Systeme überhaupt. Zu *H* hat *Eis* das Schwingungsverhältnis $\frac{7}{5}$,

dessen Ergänzung zur Oktave $\frac{10}{7}$ ist. Da *Eis* nicht vorhanden ist, so sind auch die Intervalle $\frac{7}{5} \cdot \frac{10}{7}$ im Systeme nicht vorhanden. Zu *D* endlich steht *Eis* im Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{6}$, dessen Ergänzung $\frac{12}{7}$ ist. Mithin fehlen im chromatischen Systeme die Intervalle:

$$\overline{\frac{7}{4}\ \frac{8}{7}}\quad \overline{\frac{7}{5}\ \frac{10}{7}}\quad \overline{\frac{7}{6}\ \frac{12}{7}}.$$

Nun ist aber erfahrungsmäßig eine Tonverbindung dem Gehöre desto faßlicher, in je einfacheren Zahlenverhältnissen ihre Bestandtöne stehen, weshalb die durch sehr einfache Brüche $\frac{m}{n}$ ausgedrückten Intervalle in der Musik die meiste Wichtigkeit haben. Die wichtigsten sind:

$$1\ 2,\quad \overline{\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}},\quad \overline{\frac{5}{4}\ \frac{8}{5}},\quad \overline{\frac{6}{5}\ \frac{5}{3}},$$

paarweise so zusammengestellt, wie sie sich zur Oktave ergänzen. Nach ihnen folgen sogleich die obigen im chromatischen Systeme nicht vertretenen. Und es geht daraus hervor, daß ein jedes andere Tonsystem, in welchem auch die reine Septime Platz findet, bloß durch die Anwesenheit dieses einen Tones das chromatische Tonsystem in der Anzahl brauchbarer Intervalle im Verhältnisse 4 : 7 überbieten wird.

Diese oder ähnliche Betrachtungen waren es vermutlich, die den berühmten Kontrapunktisten Joh. Philipp Kirnberger und vielleicht auch seinen großen Lehrmeister Sebastian Bach veranlaßten, diesem wichtigen Tone die verdiente Aufmerksamkeit zu schenken. Ersterer suchte ihn in das Tonsystem unter dem Namen *J* einzuführen, zeigte seine Verwendung in einigen von ihm komponierten Musikstücken und stellte zu Berlin ein Orgelregister mit dieser *J* benannten reinen Septime auf, welches aber, nachdem die auf Kirnberger folgenden Organisten nichts damit anzufangen wußten, später wieder beseitigt worden ist. Fasch, ein Schüler Kirnbergers, erneuerte die Bestrebungen seines Lehrers, diesen Ton der Musik zu erhalten, mit demselben geringen Erfolge. Das Urteil der musikalischen Zeitgenossen Faschs und Kirnbergers war über dieses Intervall ungefähr auf folgende zwei Punkte zurückzuführen: a) das Intervall $\frac{7}{4}$ ist ein von Kirnberger neu erfundenes, ein Ton, der Vorzeit unbekannt; b) ist aber nichts anderes als eine temperierte Septime, d. h. ein temperierter heulender Wolf. Dieses Urteil hält nicht Stich, denn es kann dagegen folgendes bemerkt werden. Zu a): Das Intervall $\frac{7}{4}$ ist zwar weder auf den Tasten des

Klaviers, noch auf den in Bünde geteilten Griffbrettern anderer Saiteninstrumente, noch auch in der musikalischen Notenschrift vorhanden; denn wäre es wirklich da, so hätte ja **Kirnberger** es nicht unter der Bezeichnung J einzuführen gebraucht. Es klingt aber als Oberton mit einer jeden angeschlagenen Saite im allgemeinen mit und kann als Klangbestandteil durch einen **Helmholtz**schen Resonator nachgewiesen werden. Auch isoliert als Flageolett-Ton ist es jedem Musiker bekannt und wird erhalten, wenn man eine Saite im siebenten Teile der Länge leise mit dem Finger berührt und dann anschlägt. Ja man kann sich auf diese Weise den ganzen reinen Septimen-Akkord vollkommen frei von jeder Temperatur oder Verfälschung vorführen, indem man eine Saite der Reihe nach im vierten, fünften, sechsten und siebenten Teile ihrer Länge berührt und anschlägt und kann bei dieser Gelegenheit mit sich eins werden, ob man die reine Septime für eine Konsonanz oder Dissonanz zu halten hat. Neu oder unbekannt waren daher alle diese Töne nicht, nur eines scheint den um die Theorie der Schwingungen gespannter Saiten wenig bekümmerten Musikern unbekannt gewesen zu sein, daß nämlich diese Töne im Verhältnisse 4, 5, 6, 7 ihrer Schwingungszahlen zueinander stehen. Zu b) kann bemerkt werden, daß dies den Begriff des Temperierens völlig umkehren hieße. Sonst ist nämlich der untemperierte oder unverfälschte Ton rein, der temperierte verfälscht; hier wären hingegen der untemperierte falsch und der temperierte rein. Das sind die Folgen des Gebrauches oder Mißbrauches sinnabschwächender, fremdsprachlicher Benennungen, anstatt der ehrlichen deutschen Ausdrücke! Sagte man schlicht und gerade: Verfälschen und nicht Temperieren, so wäre eine solche Begriffsverwirrung unmöglich. Es scheint also hier wieder einer der so häufig vorkommenden Fälle vorzuliegen, daß das Urteil eines einzigen gründlichen Denkers, wie **Kirnbergers**, richtiger ist, als das Gesamturteil aller seiner Zeitgenossen. Die reine Septime mit dem Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{4}$ ist also und bleibt ein Ton von hoher Wichtigkeit in der Musik, und eine Theorie der Tonsysteme, die auf dieselbe keine Rücksicht nimmt, kann auch auf Allgemeinheit keinen Anspruch erheben. Es wird daher in dieser Abhandlung der Septime $\frac{7}{4}$ dieselbe Aufmerksamkeit geschenkt, wie den anerkannt konsonanten Intervallen und namentlich den beiden Terzen.

Nicht nur die durch einfache Brüche von der Form $\frac{m}{n}$ ausgedrückten Intervalle, in denen die Primzahl 7 vertreten ist, sind

der Beachtung wert; auch die Primzahlen 11 und 13, mithin die Intervalle:

$$\overline{\frac{11}{6}\ \frac{12}{11}},\quad \overline{\frac{11}{7}\ \frac{14}{11}},\quad \overline{\frac{11}{8}\ \frac{16}{11}},\quad \overline{\frac{11}{9}\ \frac{18}{11}},\quad \overline{\frac{11}{10}\ \frac{20}{11}},$$

$$\overline{\frac{13}{7}\ \frac{14}{13}},\quad \overline{\frac{13}{8}\ \frac{16}{13}},\quad \overline{\frac{13}{9}\ \frac{18}{13}},\quad \overline{\frac{13}{10}\ \frac{20}{13}},\quad \overline{\frac{13}{11}\ \frac{22}{13}}$$

sind womöglich nicht ganz außer Acht zu lassen, und ein Tonsystem, das sie besitzt, wird wenigstens zu Studien über die Charakteristik der Akkorde, welche einfachen Zahlenreihen entsprechen, einigen Vorzug verdienen. Selbstverständlich kommt ihnen die Wichtigkeit, welche die Konsonanzen haben, nicht zu, diese wird sogar beinahe Null, wo die 7 nicht vertreten ist. Den genauen numerischen Wert der Wichtigkeit dieser Intervalle aber hier anzugeben ist schon deshalb unmöglich, weil gründliche Studien über die psychische Charakteristik der Intervalle, Akkorde und Tonarten bisher sehr vernachlässigt worden sind. Daher denn auch die moderne Musik nach Petzvals Ansicht über die Charaktere Dur und Moll, hart und weich damals noch nicht hinausgekommen war. Nur von Koch ist ihm eine Auswahl verschiedener 7- und mehrtöniger Tonleitern mit ihrer psychischen Charakteristik und naturgemäßen harmonischen Begleitung vorgelegen, die aber nicht veröffentlicht worden war. Käme es nun, meinte er, dereinst zur Geltung, was dieser scharfsinnige und vielerfahrene Tonforscher findet, z. B. die folgende über dem Grundtone *as* aufgebaute Tonleiter, welche die unten angesetzten Schwingungszahlen hat und in angemessener Begleitung im echten Stile einer würdigen Kirchenmusik gehalten ist:

as	*ais*	*ces*	*des*	*es*	*eis*	*ges*	*as*
$\mathfrak{z}$	$\frac{12}{11}\mathfrak{z}$	$\frac{6}{5}\mathfrak{z}$	$\frac{4}{3}\mathfrak{z}$	$\frac{3}{2}\mathfrak{z}$	$\frac{18}{11}\mathfrak{z}$	$\frac{9}{5}\mathfrak{z}$	$2\mathfrak{z}$,

so gewänne die Primzahl 11 in der Musik eine vorher nie geahnte Geltung.

In ähnlicher Weise vermöchten aber vielleicht auch andere einfache Intervalle sich Geltung zu erringen. Deren besitzt nun aber das chromatische Tonsystem nur wenige. Man bekommt eine Übersicht über dieselben, wenn man die Dezimalbrüche in den Schwingungszahlen des Verzeichnisses (4) in Kettenbrüche und diese in einfache Näherungsbrüche verwandelt; dies gibt:

C	*Cis*	*D*	*Dis*	*E*	*F*	*Fis*	*G*	*Gis*	*A*	*B*	*H*	*C*
$\mathfrak{z}$	$\frac{18}{17}\mathfrak{z}$	$\frac{9}{8}\mathfrak{z}$	$\frac{44}{37}\mathfrak{z}$	$\frac{63}{50}\mathfrak{z}$	$\frac{4}{3}\mathfrak{z}$	$\frac{58}{41}\mathfrak{z}$	$\frac{3}{2}\mathfrak{z}$	$\frac{100}{63}\mathfrak{z}$	$\frac{37}{22}\mathfrak{z}$	$\frac{16}{9}\mathfrak{z}$	$\frac{17}{9}\mathfrak{z}$	$2\mathfrak{z}$,

eine Reihe, in der man die oben angeführten einfachen und wichtigsten Intervalle nur spärlich vertreten sieht. Es ist also nicht unbegründet, wenn man sagt, daß das chromatische System an Tonmangel leide.

Diese Betrachtungen hatte indessen Petzval nicht dazu angestellt, um den Mangel zu beweisen, der sich in einem nur 12stufigen Systeme von selbst versteht, sondern zu dem Zwecke, um mit Klarheit darzutun, was unter Tonmangel und Tonreichtum zu verstehen ist, wie es Systeme geben kann, die bei einer großen Anzahl von Tönen dennoch an Tonmangel leiden, endlich wie man diese in Rücksicht auf Tonreichtum oder -mangel zu beurteilen habe.

Daß im chromatischen Tonsysteme der Wohlklang der Akkorde durch die übertemperierten und auch wirklich übel klingenden Terzen beeinträchtigt sei, wird wohl ziemlich allgemein von den Musikern zugestanden, jedoch in einer Weise, die zu einem gründlichen Urteile über dasselbe System in dieser Beziehung keinen genügenden Anhalt gewährt. Sie sagen nämlich gewöhnlich: „Die Quinten wären schon gut und rein genug, wenn nur die Terzen reiner wären!“ Hierauf kann man erwidern: Wenn die Quinten nur eben rein genug sind und nichts weiter, so müssen die Terzen auch gut genug sein, denn im Tonreiche gilt dasselbe, was anderwärts als Regel feststeht, nämlich, man kann niemand etwas geben, was man nicht einem anderen wegnimmt. Haben daher die Quinten an Reinheit nur eben genug und kann man ihnen nichts nehmen, so kann man auch den Terzen nichts geben. Andererseits könne man auf eine Tatsache hinweisen, die beinahe zu beweisen scheint, daß das Urteil der Musiker keineswegs das Urteil des Volkes sei, nämlich auf die, daß oft in Konzerten nach einem in möglichst reinen Tönen ausgeführten Streichquartette sich ein Klavierspieler hören läßt mit seinen falschen Terzen und heulenden Septimen, dem aber gleichwohl vom versammelten Publikum wütend applaudiert wird. Hieraus scheine beinahe hervorzugehen, daß die chromatischen Terzen nur dem verfeinerten Gehör der Musiker von Fach übel klingen, für das übrige Menschengeschlecht jedoch rein und wohlklingend genug seien, wenn man nicht etwa annehmen will, daß der Applaus gar nicht der Musik gelte, sondern nur der brillanten Technik des Virtuosen. Wiewohl nun übrigens inbezug auf Wohlklang und Übelklang niemand anderer, als eben der Musiker urteilsfähig ist, so hat doch sein Urteil hier nur dann wissenschaftlichen Wert, wenn es auf der genauen Kenntnis der Charakteristik der konsonanten Intervalle und der Gewichte ihrer Verfälschungen gegründet ist, und wenn er infolge dieser Kenntnis imstande ist, seine Angaben in wenigstens sehr angenäherten Zahlenwerten zu machen. Es kommt also, wenn auch

nicht alles, doch mindestens sehr viel auf die genaue numerische Kenntnis der Empfindlichkeit der Konsonanzen an, ohne sie kann man weder über ein vorgelegtes Tonsystem ein endgültiges Urteil fällen, noch auch die Berechtigung der zahlreichen, der ersten Klasse angehörigen Systeme dieser Art, mit denen sich diese Abhandlung beschäftigt, über jeden Zweifel erheben. In der Tat, wenn sich nachweisen ließe, daß die Quinte keine größere Verfälschung verträgt, als $\frac{1}{886}$, wie im chromatischen Systeme, so wären alle Tonsysteme der ersten Klasse unbrauchbar, weil in ihnen allen die Quinte stärker belastet ist. Und hiemit wäre dann natürlich auch die Berechtigung dieser Abhandlung teilweise aufgehoben. Die ältere Musikliteratur bietet nun über diesen wichtigen Punkt wenig Brauchbares; in der neueren Zeit sind jedoch dankenswerte Bestrebungen aufzuzeichnen, die hiezu als Vorarbeiten gelten können. Man hat nämlich versucht, die Abstufungen der Intervalle in Reinheit festzustellen. Helmholtz hat diese sogar durch eine Kurve bildlich dargestellt. Das jedoch, was man in der Theorie der Tonsysteme braucht, ist nicht diese Kurve, weil hier wenig darauf ankommt, ob eine Dissonanz etwas mehr oder weniger dissoniert, sondern es sind dies die möglichst genauen Werte der Krümmungshalbmesser an den Scheitelpunkten, oder was dasselbe ist, die zweiten Differentialquotienten der Ordinaten, und um beurteilen zu können, ob positive und gleich große negative Verfälschungen auch gleich unangenehm wahrgenommen werden, auch noch allenfalls die dritten. Nicht aus einer gewissen Analogie mit einem im widerstehenden Mittel schwingenden Punkte, von welcher leicht zu beweisen ist, daß sie nicht besteht, sind diese fundamentalen Kenntnisse zu ziehen, wie Helmholtz getan, sondern aus einer gründlichen, auf sorgfältig angestellte Beobachtungen gestützten Theorie.

Es ist nicht zu bezweifeln, daß die rastlos fortschreitende Akustik mit der Zeit auch diese Daten mit zureichender Genauigkeit liefern wird.

Durch die bisherigen Auseinandersetzungen erfährt der Begriff eines Tonsystems eine Erweiterung; man sieht nämlich, daß nicht nur Tonsysteme von der Art des hier als Beispiel gewählten chromatischen, in welchem sämtliche gleichnamige Intervalle einerlei Wert besitzen, sondern daß auch andere mit verschieden temperierten Quinten und Terzen in Anwendung gekommen sind. Sie heißen in der musikalischen Sprache *ungleich temperierte Tonsysteme.* Sie werden aufgestellt zu dem doppelten Zwecke: Um einigen Tonarten einen vollkommeneren Wohllaut zu verschaffen und den anderen einen verschiedenen psychischen Charakter zu verleihen. Berühmte Musiker, wie Kirnberger und

Malcolm, ebenso Euler und Györy sind auf dem äußerst mühsamen Wege des arithmetischen Versuches zu solchen Tonsystemen gelangt. In allen sind einige wenige Tonarten wohllautend, die übrigen desto übelklingender; eine reine Septime ist nirgends zu finden.

Allgemeineren Anklang fanden jedoch diese Versuche nicht. Dies hindert übrigens nicht, daß sie die Aufmerksamkeit des Arithmetikers für sich in Anspruch nehmen, schon weil die ungleich schwebend temperierten Tonsysteme die allgemeine Form, die gleichschwebend temperierten nur der besondere Fall sind, sich also mit den ersten mehr Zwecke und diese zugleich genauer erreichen lassen müssen, als mit den letzteren.

Solange man also die Theorie der Tonsysteme als ein arithmetisches Problem behandelt, wird man immerhin, um wissenschaftlich zu Werke zu gehen, die Tonsysteme einteilen können, ja sogar müssen, in gleichschwebend und ungleichschwebend temperierte. In den einen besitzen sämtliche gleichnamigen Intervalle: Quinten, Terzen, Septimen usw. einerlei Wert, in den anderen sind diese Werte von Tonart zu Tonart verschieden. Um dem in allen mathematischen Wissenschaften notwendigen Streben erst nach Einfachheit, dann aber nach Allgemeinheit gerecht zu werden, sind zuerst die gleichschwebend temperierten Tonsysteme in Angriff zu nehmen. Dann kann man aber zu den ungleichschwebend temperierten übergehen, wenn auch nur um das vorgelegte arithmetische Problem zur allgemeinen Lösung zu bringen, ohne Rücksicht darauf, ob sie die Musik als brauchbar anerkennt oder nicht.

Aus dem bisher Gesagten geht nun wohl genügend hervor, sowohl was man ein Tonsystem nennt, wie auch welches die allgemeinen Forderungen sind, welche man an ein solches zu stellen bisher für gut befunden hat. Man wird sagen: Ein Tonsystem ist eine geschlossene und in sich zurückkehrende Tonperiode, deren Bestandtöne sowohl ihrer Zahl nach, wie auch vermöge ihrer Schwingungsverhältnisse sich geeignet erweisen, um damit gute Musik zu machen. Unter guter Musik versteht man aber nicht nur wohlklingende Musik, sondern auch die unbeschadet ihres Wohlklanges oder vielleicht auch ohne Rücksicht auf denselben einen mannigfachen psychischen Charakter hat. Der Tonsetzer will nämlich mit der Gewalt der Töne das Gemüt des Menschen beherrschen und will ihn nach seinem Belieben in eine lustige, traurige, andächtige, kriegerische usw. Stimmung versetzen. Das Tonsystem darf daher nicht zu wenig Töne enthalten, weil daraus Tonarmut entsteht, zufolge welcher die musikalischen Wirkungen nicht mehr erzielt werden können, es darf aber auch nicht zu viele Töne

zählen, weil die Verschwendung der Tonmittel zu anderen schweren Übelständen führt. Ferner ist es nicht notwendig, daß die Töne, aus welchen das Tonsystem besteht, *reine* Töne seien, sie können vielmehr alle *temperiert*, das heißt verfälscht sein, jedoch nur um einen so geringen Bruchteil ihrer Schwingungszahl, daß die Verfälschung von dem menschlichen Gehör unter den Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, nicht mehr, wenigstens nicht mehr mißklingend wahrgenommen werden kann, also zum Beispiel um weniger als $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl.

Warum Petzval gerade diese Zahl $\frac{1}{240}$ gewählt hat, bedarf einer Erläuterung. Er behauptete, eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl sei selbst bei den empfindlichsten Intervallen, die Oktave nicht ausgenommen, auch durch das feinste musikalische Gehör unter solchen Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, nicht mehr wahrzunehmen. Nur im Unisono ist auch eine noch geringere Abweichung von der Reinheit unschwer zu entdecken. Er beweist dies durch folgende Betrachtung.

Es kann allen Musikern unwiderleglich nachgewiesen werden, daß nicht nur sie, sondern auch alle ihre Vorgänger falsche Intervalle, und zwar nicht nur falsche Terzen und Quinten, denn dies würde sich von selbst verstehen, sondern auch falsche Oktaven, und zwar falsch um wenigstens $\frac{1}{240}$ bald im positiven, bald im negativen Sinne im eigenen und fremden Spiele geduldet haben, und zwar ohne Not, denn sie hätten ohne alle Mühe und Kosten diese falschen Töne auch vermeiden und durch reine Oktaven ersetzen können. Da sie dies aber nicht taten, bleibt nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß sie diese falschen Töne gar nicht bemerkt haben. Daß wirklich eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ in der Musik ohne Not bis heute noch geduldet wird, zeigen alle Saiteninstrumente, welche in Bünde geteilte Griffbretter haben, wie Zithern, Guitaren, Lauten usw. Wird bei diesen Instrumenten eine Saite auf das Griffbrett niedergedrückt, so wird dadurch ihre Spannung etwas vergrößert, mithin der Ton erhöht. Bei dem gewöhnlich vorkommenden Abstande der Saiten vom Griffbrette beträgt diese Tonerhöhung etwa $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl oder auch Saitenlänge, kann aber auch bedeutend größer werden. Es scheint nun, daß bei der Verfertigung der ersten Instrumente dieser Art auf die eben besprochene Wirkung keine Rücksicht genommen worden ist,

sie waren daher vermutlich nach der pythagoräischen Vorschrift so eingeteilt, daß der Oktavenbund genau in die Mitte der Saite, der Quintenbund genau auf $\frac{1}{3}$ ihrer Länge usw. fiel. Bei dieser Anordnung erhöhten sich die sämtlichen gegriffenen Töne um gleichviel, nämlich um $\frac{1}{240}$ der Schwingungszahl, oder nahe um $\frac{1}{30}$ eines ganzen Tones, waren mithin unter sich richtig und wohlklingend, und nur wenn eine leere Saite angeschlagen wurde, erwies sich der Ton gegen die gegriffenen um $\frac{1}{240}$ Schwingungszahl $= \frac{1}{30}$ Ton zu tief. Dieser Unterschied war aber zu klein, um anders bemerkt und verläßlich nachgewiesen werden zu können, als im Unisono, und wurde auch wirklich nur durch die mangelnde Übereinstimmung des Flageolett mit der gegriffenen Oktave entdeckt. Hier wäre nun ganz leicht zu helfen gewesen. Da nämlich die gegriffenen Töne alle untereinander harmonierten, und nur die wenigen der leeren Saiten zu tief waren, so hätte man offenbar die ersteren unangetastet lassen, die letzteren aber alle gleich viel, nämlich um $\frac{1}{30}$ Ton erhöhen sollen, was durch Verkürzung des ersten und letzten Bundes bei der Guitarre um $\frac{1}{10}$ Zoll (2,6 mm), bei der Zither um etwa die Hälfte dieses Betrages zu bewerkstelligen war. Aber auch das noch zu seiner Zeit im Gebrauch gestandene Verfahren der unrichtigen Einteilung war noch nicht aufgegeben worden, weil man den Fehler nicht erkannt hatte. Mithin wurde auch die Verfälschung von $\frac{1}{240}$ der Schwingungsdauer, die daraus entsprang, trotzdem sie oft vorkam, nie gehört; mithin ist eine solche Verfälschung selbst bei den empfindlichsten Intervallen, die Quinte und Oktave mit eingeschlossen, unter den Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, und bei den in Rede stehenden Saiteninstrumenten selbst vom geübten Ohre nicht wahrzunehmen — was zu beweisen war.

Damit wollte aber Petzval keineswegs sagen, eine Verfälschung von $\frac{1}{240}$ an der Oktave oder Quinte sei überhaupt durch das menschliche Ohr nicht wahrzunehmen. Im Gegenteile, Akustiker, Klavierstimmer, Orgelbauer usw. können selbst zehnmal kleinere Differenzen nicht nur entdecken, sondern auch messen. Dies geschieht jedoch durch Anwendung künstlicher Mittel und Herbeiführung von Umständen, unter welchen man Musik nicht zu machen pflegt. Der mit den feinsten Meßinstrumenten versehene Ingenieur, dem noch dazu die

nötige Zeit zur Verfügung steht, kann seine Messungen mit viel größerer Genauigkeit vollbringen, als der bloß auf sein Augenmaß Angewiesene, dem noch überdies keine Zeit zur Beobachtung gegönnt ist. Dies ist hier beiläufig der Sachverhalt. Es besteht ein großer Unterschied zwischen sorgfältiger Tonmessung und oberflächlicher Tonschätzung, und wer Musik hört, kann nicht messen, sondern nur oberflächlich schätzen.

Kehren wir zum eigentlichen Gegenstande wieder zurück.

Wer also ein neues Tonsystem entweder bilden oder über ein solches ein gegründetes Urteil fällen will, der muß sich offenbar drei Fragen beantworten können: 1. welche Tongruppen oder Tonfolgen klingen gut, was klingt besser, was klingt am allerbesten und unter welchen Umständen ist der höchste Wohlklang zu erzielen? 2. wie groß ist die Empfindlichkeit der einzelnen Intervalle gegen Verfälschung? und 3. welche Tonverbindungen besitzen irgend einen angebbaren psychischen Charakter, und sprechen demzufolge eine dem Gehör leicht erfaßbare musikalische Sprache?

Was die zwei ersten Fragen anlangt, so wird man vermutlich meinen, daß die mehrere tausend Jahre alte Musik dieselben bereits längst wird beantwortet haben; man wird ferner vermuten, daß die letzte Frage die meisten Schwierigkeiten bietet, und deshalb entweder gar nicht oder bisher nur unvollständig erledigt sei. Man täuscht sich indessen hierin vollständig. Gerade über die dritte Frage wissen wir das meiste, denn wir besitzen einen wertvollen, von Euler aufgestellten allgemeinen Satz, der klar und bestimmt sagt, welche Intervalle und Tongruppen im allgemeinen einen angebbaren psychischen Charakter haben, während hinsichtlich der beiden ersten Fragen Petzval behauptete, daß man damals in musikalischen Kreisen noch immer nicht einig war über das, was wohl klingt, sowie auch über das, was empfindlich und empfindlicher ist gegen Verfälschung. Es schien ihm dies am besten aus den Antworten der Musiker hervorzugehen, die in der Regel etwa folgendermaßen lauteten:

„Die edelste und vollkommenste, d. h. wohlklingendste Konsonanz ist die Oktave. Sie ist darum auch so empfindlich, daß sie nicht die allergeringste Verfälschung vertragen kann und ganz untemperiert und vollkommen rein bleiben muß. Nach ihr ist die Quinte die edelste und vollkommenste Konsonanz; sie verträgt darum auch nur sehr geringe Verfälschungen und darf nur so wenig als möglich temperiert werden. Dann kommen die Terzen; sie sind vollkommene Konsonanzen und können und müssen auch temperiert werden bis zum Heulen. Die Septimen sind Dissonanzen, kommen mithin auch nur in dissonanten Akkorden vor."

Petzval hat die Widersprüche, welche in diesen Ansichten liegen, eingehend widerlegt und hat auf die Fragen selbst die zutreffenden Antworten gegeben. Schon im Anfange ist hier eines höchst wichtigen Prinzipes der Harmonielehre Erwähnung geschehen, welches er das Prinzip der angenäherten Äquivalenz der Oktaven nennt, und welches er so formuliert hat: Jeder Ton bildet mit allen seinen höheren und tieferen Oktaven eine Reihe von Tönen, die nach dem Urteile des menschlichen Gehöres einander in hohem Grade ähnlich sind, dergestalt, daß man in einem jeden Tongebilde, z. B. Akkorde, einen von ihnen für den anderen setzen kann, ohne den Charakter dieses Tongebildes wesentlich zu ändern. Es werden deshalb auch alle diese Töne der ganzen Oktavreihe mit demselben Namen belegt und mit demselben Buchstaben bezeichnet. Die Richtigkeit dieses Satzes wird von allen Harmonielehrern ohne Unterschied anerkannt, wiewohl sie denselben nie so aussprechen, sondern gewöhnlich in andere Worte kleiden.

Petzval wollte diesen Satz vorderhand als Ergebnis der Erfahrung hingestellt wissen, und meinte, daß die Zeit vielleicht nicht mehr ferne sei, wo man ihn aus dem gründlich und erschöpfend bekannten Baue des menschlichen Ohres mit Hilfe der mathematischen Analysis ableiten wird.

Schon in seiner Theorie der Schwingungen gespannter Saiten[1]) hat Petzval den Satz aufgestellt, der hier brauchbar ist, nämlich: Wenn eine gespannte Saite durch die Schwingungen des Mittels, in welchem sie sich befindet, zum Schwingen angeregt wird, so schwingt sie alle ihr entsprechenden harmonischen Töne und ihre Oktaven auf dieselbe Weise, d. h. Ton und Oktave beide ohne Schwingungsknoten, oder mit derselben Anzahl von Schwingungsknoten, die sich an derselben Stelle befinden.

Da das Gehörorgan auch ein System in einem widerstehenden Mittel schwingender Saiten oder Fasern ist, oder sein soll, die durch die Schwingungen dieses Mittels selbst in Bewegung gesetzt werden, so ist nur noch übrig, zwischen den Identitäten der dynamischen Erscheinung und der sinnlichen Wahrnehmung einen Zusammenhang festzustellen. Damit wird dann das Prinzip der Äquivalenz der Oktaven eine Festigkeit gewinnen, die es den mathematisch bewiesenen Sätzen an die Seite stellt. Dieses Prinzip hat daher mehr für sich, als das übereinstimmende Zeugnis aller Musiker und Harmonielehrer, und der in der Kunst eingeführte Gebrauch.

1) Denkschriften der Akademie d. W. in Wien, 1859.

Aus ihm folgt unmittelbar, daß, wenn Quinte, große Terz und kleine Terz Konsonanzen sind, auch Quarte, kleine und große Sexte ähnliche Konsonanzen von beinahe demselben Grade und psychischen Charakter des Wohlklanges sein müssen.

Dies veranlaßte auch Petzval, die konsonanten Intervalle nicht in vollkommene und unvollkommene, sondern in Urintervalle und Kointervalle einzuteilen. Zu den Urintervallen zählt er die ersten Obertöne des Grundtones mit ihren Oktaven und die kleine Terz. Hier folgen sie mit ihren Schwingungszahlen:

Oktave		Quinte		große Terz		kleine Terz		Septime	
C	*c*	*C*	*G*	*C*	*E*	*C*	*Es*	*C*	*Ais*
ζ	2ζ	ζ	$\frac{3}{2}\zeta$	ζ	$\frac{5}{4}\zeta$	ζ	$\frac{6}{5}\zeta$	ζ	$\frac{7}{4}\zeta$.

Die zweite Gruppe bilden die Kointervalle, d. h. diejenigen, welche die Urintervalle zur Oktave ergänzen, d. h. welche man aus den Urintervallen erhält, indem man statt des Grundtones seine Oktave setzt. Sie heißen

	Einklang		Quarte		kleine Sexte		große Sexte		überm. Sekunde	
	c	*c*	*G*	*c*	*E*	*c*	*Es*	*c*	*Ais*	*c*
	2ζ	2ζ	$\frac{3}{2}\zeta$	2ζ	$\frac{5}{4}\zeta$	2ζ	$\frac{6}{5}\zeta$	2ζ	$\frac{7}{4}\zeta$	2ζ
oder	ζ	ζ	ζ	$\frac{4}{3}\zeta$	ζ	$\frac{8}{5}\zeta$	ζ	$\frac{5}{3}\zeta$	ζ	$\frac{8}{7}\zeta$.

Da sie alle aus den Urintervallen entstanden sind dadurch, daß man anstatt eines Bestandtones seine Oktave gesetzt hat, und da dies vermöge des Gesetzes der angenäherten Äquivalenz der Oktaven den Charakter der Tonverbindung nur unwesentlich zu ändern vermag, so ist die auf diesem Wege aus der Quinte hervorgegangene Quarte nahezu ebenso konsonant und vermutlich auch beinahe ebenso empfindlich gegen Verfälschung. Ebenso ist die aus der großen Terz abgeleitete kleine Sexte eine Konsonanz von ähnlichem Wohllaute und demselben psychischen Charakter, d. h. beide sind heitere oder Dur-Konsonanzen, und besitzen beinahe dieselbe Empfindlichkeit gegen Verfälschung. Die aus der kleinen Terz hervorgegangene große Sexte ist aber so wie diese eine Moll- oder schwermütige Konsonanz, und die übermäßige Sekunde hat in allen Stücken Ähnlichkeit mit der reinen Septime.

Nicht nur in einem reinen, sondern auch in einem temperierten Tonsysteme haben die Urintervalle mit den ihnen entsprechenden Kointervallen durchaus einerlei Eigenschaften, so zwar, daß sie auch einerlei Verfälschungen erleiden müssen. In der Tat, nennt man die

Temperaturen der Quinte, großen und kleinen Terz und Septime in einem solchen Tonsysteme der Reihe nach:

$$q = 1 + \varkappa, \quad T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma,$$

unter $\varkappa$, θ, τ und σ sehr kleine Brüche verstanden, welche die Verfälschungen dieser Intervalle in Teilen der eigenen Schwingungszahl bezeichnen, so sind die Urintervalle mit ihren Schwingungszahlen:

Oktave		Quinte		große Terz		kleine Terz		Septime	
C	c	C	G	C	E	C	Es	C	Ais
ζ	2ζ	ζ	$\frac{3}{2}(1+\varkappa)\zeta$	ζ	$\frac{5}{4}(1+\theta)\zeta$	ζ	$\frac{6}{5}(1+\tau)\zeta$	ζ	$\frac{7}{4}(1+\sigma)\zeta$,

also ihre Verfälschungen beziehentlich:

$$\frac{3}{2}\varkappa\zeta \qquad \frac{5}{4}\theta\zeta \qquad \frac{6}{5}\tau\zeta \qquad \frac{7}{4}\sigma\zeta.$$

Die ihnen entsprechenden Kointervalle werden:

Einklang		Quarte		kleine Sexte		große Sexte		überm. Sekunde	
c	c	G	c	E	c	Es	c	Ais	c
2ζ	2ζ	$\frac{3}{2}(1+\varkappa)\zeta$	2ζ	$\frac{5}{4}(1+\theta)\zeta$	2ζ	$\frac{6}{5}(1+\tau)\zeta$	2ζ	$\frac{7}{4}(1+\sigma)\zeta$	2ζ

oder alles auf den Grundton ζ reduziert:

c	c	G	c	E	c	Es	c	Ais	c
ζ	ζ	ζ	$\frac{4}{3}\cdot\frac{\zeta}{(1+\varkappa)}$	ζ	$\frac{8}{5}\cdot\frac{\zeta}{(1+\theta)}$	ζ	$\frac{5}{3}\cdot\frac{\zeta}{(1+\tau)}$	ζ	$\frac{8}{7}\cdot\frac{\zeta}{(1+\sigma)}$.

Da $\varkappa$, θ, τ und σ sehr kleine Brüche sind, so wird man ihre Quadrate gegen die Einheit vernachlässigen, und die vorliegenden Verhältniszahlen schreiben können:

c	c	G	c	E	c	Es	c	Ais	c
ζ	ζ	ζ	$\frac{4}{3}\zeta(1-\varkappa)$	ζ	$\frac{8}{5}\zeta(1-\theta)$	ζ	$\frac{5}{3}\zeta(1-\tau)$	ζ	$\frac{8}{7}\zeta(1-\sigma)$

Die Verfälschungen dieser Intervalle sind hier beziehentlich:

$$-\frac{4}{3}\varkappa\zeta \qquad -\frac{8}{5}\theta\zeta \qquad -\frac{5}{3}\tau\zeta \qquad -\frac{8}{7}\sigma\zeta.$$

Sie sind also dieselben Bruchteile der betreffenden Schwingungszahlen, wie bei den entsprechenden Urintervallen, nur mit anderem Vorzeichen. Es ist hier vorausgesetzt, daß man die Oktaven untemperiert läßt. Würde man auch diese in einem gewissen Grade verfälschen, so wäre die Kongruenz zwischen den Urintervallen und Kointervallen aufgehoben, und es würden dann die ersteren andere Verfälschungen erleiden als

die zweiten, was sich allenfalls durch eine verschiedene Empfindlichkeit dieser Intervalle motivieren ließe, die dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven zu widersprechen schiene. Es scheint, daß man den Schluß auch umkehren und sagen könnte: Da in der Musik allgemein die Oktaven als unverletzlich angesehen werden, so besitzen alle Urintervalle mit den entsprechenden Kointervallen einerlei Empfindlichkeit gegen Verfälschung, während andernfalls das Temperieren der Oktaven rätlich erscheinen könnte. Hiemit wäre die Unverletzlichkeit der Oktaven viel ungezwungener begründet, als durch die Annahme einer unendlichen Empfindlichkeit, von deren Unmöglichkeit wir uns oben überzeugt haben.

Der wesentliche Nutzen dieser Betrachtungen besteht darin, daß man bei der Berechnung eines jeden Tonsystems nur die Urintervalle, nämlich Quinte, Großterz, Kleinterz und Septime ins Auge zu fassen hat; gelingt es, diese wohlklingend zu gestalten, so sind auch die ihnen entsprechenden Kointervalle, nämlich: Quarte, kleine Sexte, große Sexte und übermäßige Sekunde, in derselben guten Eigenschaft vorhanden. Nur bei der Oktave und dem ihr entsprechenden Kointervall, dem Einklange, stößt man auf eine ernste Schwierigkeit, einen unlösbaren logischen Widerspruch. Nach dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven nämlich sollten Einklang und Oktave ganz einerlei psychischen Charakter tragen, indem der eine aus der anderen entsteht, dadurch, daß man den einen Bestandton des Intervalls durch seine Oktave ersetzt. Nun ist aber, wie oben nachgewiesen, der Einklang keine Konsonanz, sondern nur *Tonverstärkung*, mithin sollte nach dem Prinzipe der Äquivalenz der Oktaven auch die Oktave keine Konsonanz sein, sondern eine Tonverstärkung.

III. Bildung der Tonsysteme. Einteilung in zwei Klassen.

Bei der Bildung eines Tonsystems wird man am besten von einer bestimmten Tonreihe, womöglich von einer Reihe musikalisch äquidistanter Töne, ausgehen und aus ihr diejenigen Töne in systematischer Weise auswählen, die man zur musikalischen Praxis zu benötigen glaubt. Eine solche Reihe äquidistanter Töne wäre zwar auch die Reihe der Oktaven; diese ist aber unbrauchbar, weil sie nur einen einzigen Ton und kein Tonsystem vorstellt.

Es bietet sich zunächst die Quintenreihe dar, und in der Tat ist man zu allen Zeiten, durch einen glücklichen Instinkt geleitet, in der Musik von einer Reihe reiner Quinten ausgegangen. Da sich diese alte Gepflogenheit wissenschaftlich rechtfertigen läßt, so soll auch hier davon nicht abgegangen werden.

Diese unendliche Quintenreihe bildet man nach altem Brauche aus der folgenden siebentönigen fundamentalen Quintengruppe:

$$F,\ C,\ G,\ D,\ A,\ E,\ H,$$

indem man sie nach rechts und links auf folgende Weise fortsetzt:

1. Um sie nach rechts ins Unendliche fortzusetzen, fügt man, bei F anfangend und nach rechts fortschreitend, zu jedem Tone sowohl der Fundamentalgruppe, wie auch ihrer bereits niedergeschriebenen Fortsetzung die Endsilbe *is* zu. Man erhält so:

F, C, G, D, A, E, H, Fis, Cis, Gis, Dis, Ais, Eis, His, Fisis, Cisis, Gisis, Disis, Aisis . . .

2. Um die Fortsetzung derselben Reihe nach links ins Unendliche zu erhalten, fügt man zu jedem Tone der Fundamentalgruppe, bei H anfangend und nach links fortschreitend, die Endsilbe *es* zu, und schreibt den so erhaltenen Ton als Fortsetzung der Reihe an die linke Seite. Und dies tut man sowohl bei den Tönen der Fundamentalgruppe, als auch bei der bereits erhaltenen Fortsetzung, nur daß anstatt *Hes* nach einem alten Gebrauche der Buchstabe B gesetzt wird. Es ergibt sich so:

. . ., *Eses, Bes, Fes, Ces, Ges, Des, As, Es, B, F, C, G, D, A, E, H* . . .

Wiewohl hier von diesen alten, ziemlich einfachen musikalischen Benennungen auch Gebrauch gemacht werden soll, so ist doch für die vorliegenden Zwecke noch eine andere, der kombinatorisch-arithmetischen Betrachtung besser zusagende nötig, welche unmittelbar den Ort erkennen läßt, an dem sich ein Ton in der Reihe befindet. Es soll nämlich der Grundton mit der Schwingungszahl $\zeta\ \mathfrak{Q}_0$ anstatt C heißen; seine Quinte G soll mit $\mathfrak{Q}_1$, die zweite Quinte D soll mit $\mathfrak{Q}_2$, und ebenso die dritte, vierte, fünfte . . . r^{te} Quinte mit $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_5 \ldots \mathfrak{Q}_r$ bezeichnet werden. Die nach rückwärts fortgesetzte Reihe dieser Quinten ist die Quartenreihe

F, B, Es, As, Des, u. s. f.

Diese Töne sollen der Reihe nach mit

$\mathfrak{Q}_{-1}$, $\mathfrak{Q}_{-2}$, $\mathfrak{Q}_{-3}$, $\mathfrak{Q}_{-4}$, $\ldots \mathfrak{Q}_{-r}$ bezeichnet werden.

Sind dies nun reine Quinten und Quarten, so erhält man die Schwingungszahl einer beliebigen unter ihnen aus der zunächst vorangehenden durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$, somit aus der folgenden durch Multiplikation mit $\frac{2}{3}$. Mithin enthält folgende Formel die in Rede

stehende Quintenreihe mit ihrer musikalischen und arithmetischen Nomenklatur und den entsprechenden Schwingungszahlen in 3 Zeilen:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \ldots \mathit{Des}, & \mathit{As}, & \mathit{Es}, & \mathit{B}, & \mathit{F}, & \mathit{C}, & \mathit{G}, & \mathit{D}, & \mathit{A}, & \mathit{E}, & \mathit{H}, & \mathit{Fis} \ldots \\ Q_{-5}, & Q_{-4}, & Q_{-3}, & Q_{-2}, & Q_{-1}, & Q_0, & Q_1, & Q_2, & Q_3, & Q_4, & Q_5, & Q_6, \ldots \\ \frac{2^5}{3^5}\zeta, & \frac{2^4}{3^4}\zeta, & \frac{2^3}{3^3}\zeta, & \frac{2^2}{3^2}\zeta, & \frac{2}{3}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2}\zeta, & \frac{3^2}{2^2}\zeta, & \frac{3^3}{2^3}\zeta, & \frac{3^4}{2^4}\zeta, & \frac{3^5}{2^5}\zeta, & \frac{3^6}{2^6}\zeta \ldots \end{array}$$

Unter diesen Schwingungszahlen liegt nur eine zwischen ζ und 2ζ; allen anderen entsprechen Töne, die außerhalb des Grundtones $Q_0 = C = \zeta$ und seiner höheren ersten Oktave liegen. Da man es aber liebt, in dieser ersten Oktave den ganzen Tonreichtum beisammen vor Augen zu haben, so reduziert man die übrigen Schwingungszahlen auf die erste Oktave durch ein- oder mehrmalige Multiplikation oder Division durch 2, was, wie wir wissen, den Namen des Tones nicht ändert. Zum Beispiele: Q_2 hat die Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta = \frac{9}{4}\zeta$, was größer ist als 2ζ; wir dividieren daher einmal durch die Zahl 2 und schreiben anstatt der der Schwingungszahl $\frac{3^2}{2^2}\zeta$ die andere $\frac{3^2}{2^3}\zeta = \frac{9}{8}\zeta$. Allgemein wird statt der Schwingungszahl irgend einer Quinte Q_r, welche gleich $\frac{3^r}{2^r}\zeta$ ist, behufs der Reduktion auf die erste Oktave $\frac{3^r}{2^\alpha}\zeta$ geschrieben, wobei $\alpha > r$ und so gewählt ist, daß $1 < \frac{3^r}{2^\alpha} < 2$ ausfällt.

Ähnliches gilt auch von der nach links fortgesetzten Quintenreihe; auch ihre Töne führt man auf die erste Oktave zurück durch ein- oder mehrmaliges Multiplizieren der Schwingungszahl mit 2. Demgemäß schreibt man bei Q_{-1} anstatt $\frac{2}{3}\zeta$ lieber die zwischen ζ und 2ζ liegende Zahl $\frac{2^2}{3}\zeta = \frac{4}{3}\zeta$, und ebenso bei den übrigen, so daß allgemein die dem Tone Q_{-r} angehörende Schwingungszahl $\frac{2^r}{3^r}\zeta$ in eine andere $\frac{2^\beta}{3^r}\zeta$ umgewandelt wird, wobei $\beta > r$ und so gewählt werden muß, daß $1 < \frac{2^\beta}{3^r} < 2$ wird.

Die in Rede stehende Reihe reiner und auf die Oktave zurückgeführten Quinten geht hiemit über in:

$$(5) \quad \begin{array}{cccccccccc} \ldots\ldots & \mathit{Es}, & \mathit{B}, & \mathit{F}, & \mathit{C}, & \mathit{G}, & \mathit{D}, & \mathit{A}, & \ldots\ldots \\ \ldots Q_{-r} \ldots & Q_{-3}, & Q_{-2}, & Q_{-1}, & Q_0, & Q_1, & Q_2, & Q_3, & \ldots Q_r \ldots \\ \ldots \frac{2^\beta}{3^r}\zeta \ldots & \frac{2^5}{3^3}\zeta, & \frac{2^4}{3^2}\zeta, & \frac{2^2}{3}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2}\zeta, & \frac{3^2}{2^3}\zeta, & \frac{3^3}{2^4}\zeta, & \ldots \frac{3^r}{2^\alpha}\zeta. \end{array}$$

Diese Reihe der reinen Quinten ist es, auf welcher die hier angeführte musikalische Nomenklatur vorzugsweise beruht; und wenn in manchen Tonsystemen auch ein Ton mit einer anderen Schwingungszahl diesen musikalischen Namen, etwa *A*, *E*, usf. trägt, so wird stets angenommen, daß dies nicht der echte, reine Ton *A*, *E* ... sei, sondern der temperierte. Hier sei auch bemerkt, daß die entwickelte Reihe reiner, auf die erste Oktave reduzierter Quinten gleichzeitig die auf die erste Oktave reduzierter Quarten darstellt, weil die Töne der aufsteigenden reinen Quinten der Reihe nach mit den Tönen der absteigenden reinen Quarten und umgekehrt, die absteigenden Quinten mit den aufsteigenden Quarten gleiche Benennung haben. So hat z. B. die r^{te} Quinte nach aufwärts genommen die Schwingungszahl $\frac{3^r}{2^r}$, die r^{te} Quarte nach abwärts die Schwingungszahl $\frac{3^r}{4^r}$; dividiert man die erste durch die zweite, so erhält man 2^r. Die beiden Töne liegen um r Oktaven auseinander, tragen also gleiche Benennung.

Weil diese Reihe der reinen Quinten für den Tonforscher von großer Wichtigkeit ist, hat Petzval die Quinten und Quarten für je 158 Töne, und zwar auf 6 Dezimalen berechnet, in Tabellen zusammengestellt. Diese sind indessen verloren gegangen. Da aber in der Abhandlung wiederholt darauf hingewiesen wird, war ihre Wiederherstellung notwendig.[1])

Die Tabellen *A* und *B*, die sich am Schlusse der Abhandlung befinden, enthalten also in der ersten Spalte die Quintenbezeichnung mit ihren Stellenzeigern, in der zweiten den arithmetischen Wert, in der dritten die Schwingungszahlen und in der vierten die musikalische Benennung. In der zweiten Spalte lassen die Exponenten der Zähler und Nenner zugleich erkennen, wie oft die Schwingungszahl des zugehörigen Tones behufs der Zurückführung auf die erste Oktave durch 2 dividiert oder damit multipliziert worden ist. Man hat nämlich bei den Quinten von dem Exponenten des Nenners jenen des Zählers, und bei den Quarten von dem Exponenten des Zählers jenen des Nenners abzuziehen. So haben z. B. bei der Zurückführung des Tones $Q_{26} = His^3$ $41 - 26 = 15$ Divisionen durch 2 stattgefunden; desgleichen hat der Ton $Q_{-24} = Es^4$ $39 - 24 = 15$ Multiplikationen mit 2 behufs Zurückführung auf die erste Oktave erfordert.

Bei der in der vierten Spalte vorkommenden musikalischen Nomenklatur hat der Raumersparnis wegen eine Bezeichnung mit Exponenten

1) Die Berechnung hat Herr Viktor Stadler in Wien nach den von Petzval hinterlassenen Angaben besorgt und sie zugleich auf 400 Töne ausgedehnt.

stattgefunden, wobei der angehängte Exponent andeutet, wie oft die Silbe *is* oder *es* in der Tonbestimmung vorkommt. So ist z. B. *Fis*[3] gleichbedeutend mit *Fisisis*, und *Ces*[4] gleichbedeutend mit *Ceseseses*.

Wiewohl es nun in der genannten Quintenreihe der Zahlen und Töne unendlich viele gibt, und wiewohl sie alle zwischen ζ und 2ζ fallen, das heißt im Bereiche einer Oktave eingegrenzt sind, so sind doch alle voneinander verschieden, und es können auch nicht zwei gleiche unter ihnen vorkommen.

Nimmt man nämlich an, es seien 2 gleiche Quinten, $Q_r = Q_{r+m}$ vorhanden, so wäre notwendig

$$\frac{3^r}{2^\alpha} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma}, \text{ mithin } 3^m = 2^{\gamma-\alpha}.$$

Folglich wäre eine durch 3 teilbare Zahl gleich einer durch 3 nicht teilbaren, was nicht sein kann.

Anders verhält sich die Sache, wenn man anstatt der reinen Quinten temperierte setzt; sind dies gleichschwebend temperierte, so werden sie aus den reinen (5) erhalten durch Multiplikation mit einer Potenz der allen gemeinsamen Temperatur q, deren Exponent gleich dem Stellenzeiger des Tones ist, d. h. die Reihe temperierter Quinten ist:

$$\begin{matrix} \cdots Q_{-r}, & \cdots Q_{-2}, & Q_{-1}, & Q_0, & Q_1, & Q_2, & \cdots Q_r, & \cdots Q_{r+m}, & \cdots \\ \frac{2^\beta}{3^r} q^{-r}\zeta, & \cdots \frac{2^4}{3^2} q^{-2}\zeta, & \frac{2^2}{3} q^{-1}\zeta, & \zeta, & \frac{3}{2} q\zeta, & \frac{3^2}{2^3} q^2\zeta, & \cdots \frac{3^r}{2^\alpha} q^r\zeta, & \cdots \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m}\zeta, & \cdots \end{matrix} \tag{6}$$

Hier läßt sich durch schickliche Wahl des Faktors q die Gleichheit zweier Töne bewerkstelligen, denn man erhält $Q_r = Q_{r+m}$, wenn man q so wählt, daß

$$\frac{3^r}{2^\alpha} q^r = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m}, \text{ also } \frac{3^r}{2^\alpha} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^m \tag{7}$$

wird.

Wiewohl dies von allen Tönen gesagt werden kann, so ist doch nicht außer Acht zu lassen, daß q nur dann eine wirkliche Temperatur bedeutet, wenn es wenig von der Einheit verschieden ist; mithin darf auch q^m nur wenig von der Einheit abweichen, und müssen die Zahlen $\frac{3^r}{2^\alpha}$ und $\frac{3^{r+m}}{2^\gamma}$ nahezu einander gleich, also auch die reinen Quinten Q_r und Q_{r+m} nahezu dieselben Töne sein.

Hat man aber im Verzeichnisse der reinen Quinten zwei nahe gleiche Töne entdeckt, und durch schickliches Temperieren einander

ganz gleich gebracht, so zieht dies die Gleichheit sehr vieler anderer Töne nach sich, daß dann nur eine Gruppe nebeneinander stehender, in beschränkter Anzahl vorkommender Quinten übrig bleibt, die sich periodisch in derselben Ordnung wiederholen. In der Tat, wäre für ein von der Einheit wenig verschiedenes q geworden

$$Q_r = Q_{r+m}, \text{ d. h. } \frac{3^r}{2^\alpha} q^r = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma} q^{r+m},$$

so erhielte man, wiederholt mit $\frac{3}{2} q$ multiplizierend:

$$\frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+1}} q^{r+1} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1}, \text{ also } Q_{r+1} = Q_{r+m+1},$$

$$\frac{3^{r+2}}{2^{\alpha+2}} q^{r+2} = \frac{3^{r+m+2}}{2^{\gamma+2}} q^{r+m+2}, \text{ also } Q_{r+2} = Q_{r+m+2} \text{ usw.}$$

Also nur die aufeinander folgenden m Töne $Q_r, Q_{r+1}, \cdots, Q_{r+m-1} \cdots$, werden voneinander möglicherweise verschieden sein, die folgenden $Q_{r+m}, Q_{r+m+1} \cdots Q_{r+2m-1}$ aber sind mit den früheren Ton für Ton identisch. Von Q_{r+2m} an bis Q_{r+3m-1} wiederholen sich dieselben Töne zum zweiten Male, und so geht es fort ins Unendliche in beiden Richtungen.

Man hat mithin ein geschlossenes, zurückkehrendes, nur aus m Stufen bestehendes Tonsystem. Ordnet man die Töne desselben nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, so bilden diese letzteren eine geometrische Progression, sind mithin im musikalischen Sinne äquidistant, was sich auf folgende Art beweisen läßt. Man nenne die Schwingungszahl des Tones Q_r ξ, sodaß $\xi = \frac{3^r}{2^\alpha} q^r \zeta$ ist, wobei q den aus der Gleichung (7) gezogenen Wert, nämlich

$$\frac{3}{2} q = 2^{\frac{\gamma-\alpha-m}{m}} \tag{8}$$

bedeutet. Da q sehr nahe der Einheit gleich sein muß, so liegt dieser Wert von $\frac{3}{2} q$ offenbar zwischen 1 und 2, mithin der Exponent $\frac{\gamma-\alpha-m}{m}$ zwischen 0 und 1, das heißt, es ist

$$x = \gamma - \alpha - m < m \tag{9}$$

und $\frac{x}{m}$ ein echter, positiver Bruch, welchen man sich auf die kleinste Benennung gebracht denken kann. Ist er einer Reduktion fähig, und verwandelt er sich vermöge derselben in $\frac{x'}{m'}$, wo $x' < x$, $m' < m$ ist, so

ist dies ein Zeichen, daß es eine näher an Q_r liegende Quinte, nämlich, $Q_{r+m'}$ gibt, welche ebenso wie Q_{r+m} mit derselben Temperatur q der Q_r gleichgemacht werden kann. Da nun nicht anzunehmen ist, daß man einen von Q_r sehr weit abliegenden Ton einem näheren vorziehen wird, so kann stets vorausgesetzt werden, daß $\frac{x}{m}$ ein echter, der ferneren Reduktion unfähiger Bruch ist, also x und m relative Primzahlen sind. Um nun die aus m Stufen bestehende Periode voneinander verschiedener Töne, nämlich

$$Q_r, \quad Q_{r+1}, \quad Q_{r+2}, \ldots, Q_{r+h}, \ldots, Q_{r+m-1}$$

zu erhalten, multipliziert man die Schwingungszahl ξ von Q_r wiederholt mit

$$\frac{3}{2}q = 2^{\frac{x}{m}} \tag{10}$$

und erhält hiemit zunächst die Zahlenreihe

$$\xi, \quad 2^{\frac{x}{m}}\xi, \quad 2^{\frac{2x}{m}}\xi, \ldots, 2^{\frac{hx}{m}}\xi, \ldots, 2^{\frac{(m-1)x}{m}}\xi, \tag{11}$$

die aber auf die erste Oktave zurückzuführen ist. Man hat zu diesem Behufe die zwischen ξ und 2ξ fallenden der obigen Zahlen unberührt zu lassen, die anderen aber durch eine solche Potenz von 2 zu dividieren, daß sie dadurch ebenfalls zwischen diese zwei Grenzen eingeschlossen werden.

Mit anderen Worten, man hat von den Exponenten

$$\frac{x}{m}, \quad \frac{2x}{m}, \ldots \frac{hx}{m}, \ldots \frac{(m-1)x}{m}$$

die Einheit so oft abzuziehen, bis ein echter Bruch übrig bleibt, oder was dasselbe ist, man hat jeden Zähler wie hx durch den Nenner m zu teilen, was einen Quotienten p und Rest $\varrho < m$ gibt, sodaß

$$hx = mp + \varrho$$

wird. Diesen Quotienten p hat man dann wegzuwerfen, und anstatt des Exponenten $\frac{hx}{m}$ nur $\frac{\varrho}{m}$ zu setzen. Nun läßt sich aber beweisen, daß, wenn man die Zahlen

$$x, \ 2x, \ 3x, \ hx, \ldots, kx, \ldots, (m-1)x$$

alle durch m dividiert, man bei diesen $(m-1)$ Divisionen lauter verschiedene Reste erhalten wird. In der Tat, nimmt man an, hx und

kx geben, durch m geteilt, einerlei Rest ϱ, so hat man die zwei Gleichungen

$$hx = mp + \varrho,$$
$$kx = mp' + \varrho,$$

woraus

$$(k - h)x = m(p' - p).$$

Dies ist aber eine unmögliche Gleichung, weil die rechte Seite durch m teilbar ist und die linke nicht. Da nämlich m und x der Voraussetzung nach keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so müßte $(k - h)$ durch m teilbar sein, was nicht sein kann, weil $k < m$ und $h < m$, mithin um so mehr $k - h < m$ ist. Die Reste dieser $(m - 1)$ Divisionen sind also alle voneinander verschieden und alle kleiner als der Divisor m, mithin sind diese Reste offenbar:

$$1, 2, 3, \ldots, m - 1.$$

Dies gibt definitiv die Schwingungszahlen der unter (11) genannten Töne geordnet nach ihrer Höhe:

$$\xi,\ 2^{\frac{1}{m}}\xi,\ 2^{\frac{2}{m}}\xi,\ 2^{\frac{3}{m}}\xi,\ \ldots,\ 2^{\frac{m-1}{m}}\xi.$$

Sie bilden also eine geometrische Progression, deren Exponent $2^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{2}$ ist, und sind daher im musikalischen Sinne äquidistant.

Hiemit hätten wir ein in sich zurückkehrendes, gleichschwebend temperiertes und nur aus m Stufen, die eine geometrische Progression bilden, bestehendes Quintensystem erhalten dadurch, daß wir zwei den reinen Schwingungszahlen nach sehr ähnliche Quinten durch schickliches Temperieren ganz gleich machten, $Q_r = Q_{r+m}$. Da hieraus $Q_{r-1} = Q_{r+m-1}$ folgt, so hätte man, von dieser Gleichheit ausgehend, genau dasselbe Quintensystem erhalten. Ebenso hätten auch die Gleichungen

$$Q_{r-2} = Q_{r+m-2},\quad Q_{r-3} = Q_{r+m-3},\quad Q_0 = Q_m$$

zu demselben System geleitet. Man kann sich daher darauf beschränken, zum Grundtone Q_0 mit der Schwingungszahl ξ einen Reinton Q_m mit einer ähnlichen, von ξ möglichst wenig abweichenden Schwingungszahl zu suchen.

Es hat zwar ein Tonsystem nicht nur Quinten, sondern auch Terzen, große und kleine, und Septimen zu enthalten, auf welche letztere denn auch entsprechend Rücksicht zu nehmen ist. Allein es

gibt zahlreiche Musiker, die auf möglichst reine Quinten einen besonderen Wert legen, die anderen Intervalle weit weniger beachtend, und die ein vorgelegtes Tonsystem, wenn auch nicht ausschließlich, so doch vorzugsweise nach der Reinheit der Quinten beurteilen. Die mathematische Analysis, die hier nur Hilfswissenschaft ist und schon deshalb allen Ansprüchen womöglich gerecht zu werden versucht, legt sich, um vor allem diesen Quintenpuritanern zu genügen, die folgende Frage vor: *Welche sind die geschlossenen Quintensysteme, die sich durch besondere Reinheit, d. h. durch einen der Einheit sehr nahen Wert ihrer Temperatur q auszeichnen?*

In der zur Bestimmung der Temperatur q aufgestellten Gleichung (8), d. h.

$$\frac{3}{2}q = 2^{\frac{x}{m}}, \tag{13}$$

setzen wir $q = 1$ und erhalten

$$\frac{3}{2} = 2^{\frac{x}{m}}, \tag{14}$$

vergessen aber nicht, daß x und m teilerfremde ganze Zahlen sein müssen.

Die Gleichung (14) gibt:

$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3}{\log 2} - 1 = \frac{4771213}{3010300} - 1.$$

Entwickeln wir diesen Bruch in einen Kettenbruch, so sind dessen Näherungsbrüche offenbar Werte von $\frac{x}{m}$, die der gestellten Forderung genügen.

Diesen Kettenbruch samt den Näherungsbrüchen und den Stellen, wo der Kettenbruch abgebrochen diese Näherungsbrüche gibt, enthält folgende Formel:

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10}}}}}}}}}$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{3}{5} & \cdots\cdots\cdots\cdots\; 2+ \\
\frac{7}{12} & \cdots\cdots\cdots\cdots\; 2+ \\
\frac{24}{41} & \cdots\cdots\cdots\cdots\; 3+ \\
\frac{31}{53} & \cdots\cdots\cdots\cdots\; 1+ \\
\frac{179}{306} & \cdots\cdots\cdots\cdots\; 5+ \\
\frac{389}{665} & \cdots\cdots\cdots\cdots\; 2+
\end{array}$$

Die Näherungswerte von $\frac{x}{m}$ sind also der Reihe nach:

$$\frac{x}{m} = \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \tag{15}$$

und es ist aus ihnen ersichtlich, daß die folgenden reinen Quinten in sehr naher und stets näherer Verwandtschaft ihrer Schwingungsszahlen mit dem Grundtone stehen:

$$Q_0, Q_5, Q_{12}, Q_{41}, Q_{53}, Q_{306}, Q_{665}, \ldots$$

Ihnen entspringen der Reihe nach ein

5-, 12-, 41-, 53-, 306-, 665-stufiges

Tonsystem.

Diese Tonsysteme bestehen alle aus in geometrischen Progressionen fortschreitenden Tönen. Die Exponenten dieser Progression sind beziehentlich

$$\sqrt[5]{2}, \sqrt[12]{2}, \sqrt[41]{2}, \sqrt[53]{2}, \sqrt[306]{2}, \sqrt[665]{2}, \ldots$$

Jedes dieser Tonsysteme hat seine eigene Quintentemperatur q. Unterscheidet man diese Temperaturen durch die Stellenzeiger der ihnen zugrunde liegenden Quinten, sodaß sie beziehentlich heißen

$$q_5, q_{12}, q_{41}, q_{53}, q_{306}, q_{665}, \ldots,$$

so sind die zusammengehörigen Werte dieser reinen Quinten und ihrer Temperaturen

$$\begin{aligned}
Q_5 &= 0.94922\zeta, & q_5 &= 1 + 0.01048 &&= 1 + \frac{1}{95},\\
Q_{12} &= 1.01364\zeta, & q_{12} &= 1 - 0.001135 &&= 1 - \frac{1}{886},\\
Q_{41} &= 0.988606\zeta, & q_{41} &= 1 + 0.0002789 &&= 1 + \frac{1}{3585},\\
Q_{53} &= 1.00209\zeta, & q_{53} &= 1 - 0.0000394 &&= 1 - \frac{1}{25400},\\
Q_{306} &= 0.999005\zeta, & q_{306} &= 1 + 0.00000318 &&= 1 + \frac{1}{314500},\\
Q_{665} &= 1.0001026\zeta, & q_{665} &= 1 - 0.00000007 &&= 1 - \frac{1}{14300000}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Sie werden berechnet auf folgende Weise. Da man nicht $Q_r = Q_{r+m}$, sondern $Q_0 = Q_m$ gesetzt hat, so ist $r = 0$, mithin vermöge der Gleichung (7) auch $\alpha = 0$.

Dies macht zufolge der Gleichung (9) $y = x + m$, mithin

$$Q_m = \frac{3^m}{2^{x+m}} \zeta,$$

hierzu kommt laut (13)

$$\frac{3}{2} q = 2^{\frac{x}{m}}, \quad \text{also} \quad q = \frac{1}{3} 2^{\frac{x+m}{m}};$$

übergehend zu dem Logarithmus

$$\log Q_m = m \log 3 - (x + m) \log 2 + \log \zeta,$$
$$\log q \;\; = \left(\frac{x}{m} + 1\right) \log 2 - \log 3,$$

oder auch in Zahlenwerten

$$\log Q_m = 0.4771213 m - 0.30103 (x + m) + \log \zeta,$$
$$\log q \;\; = \frac{0.30103 (x + m)}{m} - 0.4771213.$$

Von den berechneten Logarithmen von Q_m und q kehrt man dann zu den Zahlen mit Hilfe der Tafeln wieder zurück. Die zusammengehörigen Werte von x und m sind in der Gleichung (15) ersichtlich.

Die Temperatur der Quinte q konvergiert, wie man sieht, außerordentlich rasch gegen die Einheit, aber nur mit ebenso rascher Zunahme der Anzahl der Tonstufen. Schwerlich wird es nun jemand beifallen, auf Q_{306} oder gar Q_{665} ein Augenmerk zu werfen, sondern es wird die allgemeine Aufmerksamkeit zwischen q_{12} und q_{53} haften bleiben, und es wird wohl manchem bedünken, daß zwar 12 Stufen zu wenig, 53 dagegen zu viel seien. Daher dann der Wunsch rege werden dürfte, daß es zwischen Q_{12} und Q_{53} eine reine Quinte Q_y geben möge, wo $12 < y < 53$ ist, welche, dem Grundtone gleich gesetzt, zu einer Temperatur q_y führt, die wenigstens nicht mehr von der Einheit entfernt ist, als q_{12}. Allein eine solche Quinte gibt es eben nicht, weil es keinen Bruch $\frac{z}{y}$ gibt, der zwischen $\frac{7}{12}$ und $\frac{31}{53}$ liegt, sodaß $\frac{7}{12} < \frac{z}{y} < \frac{31}{53}$ besteht, während $7 < z < 31$ und $12 < y < 53$ ist. Wenn daher ein Liebhaber reiner Quinten aus irgend einem Grunde, mit dem 12stufigen Tonsysteme unzufrieden, ein mehrstufiges wünscht, ohne von der Reinheit der Quinten etwas einbüßen zu wollen, wird er zunächst auf das 53stufige verwiesen; ein anderes gibt es nicht, wie dies aus den bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche hervorgeht. Das im Verzeichnisse (16) ebenfalls vorhandene 41stufige System ist unbrauchbar, weil nach einem später zur Sprache kommenden Grund-

gesetze bei allen Tonsystemen die Temperatur der Quinte kleiner als eins sein muß, während $q_{41} > 1$ ist.

Hinzugefügt kann noch werden, daß man sämtlichen Werten von m und x auch das negative Zeichen beilegen kann, wodurch kraft der Gleichung (13) die Temperatur q gar keine Änderung erfährt, so daß man allgemein

$$q_m = q_{-m} \quad \text{hat.}$$

Die Quinte Q_m hingegen geht dadurch in eine Quarte Q_{-m} über, und es ist

$$\frac{1}{\zeta} Q_{-m} = \frac{\zeta}{Q_m}.$$

Endlich gibt die Formel (15) nur die vornehmsten Werte von $\frac{x}{m}$, denen die der Einheit nächsten q und Q entsprechen; man kann sich aber aus ihnen noch viele andere ebenfalls brauchbare $\frac{x}{m}$ verschaffen, indem man aus den Brüchen der Gleichung (15) Mittelwerte bildet, die bekanntlich erhalten werden, indem man von zweien oder mehreren derselben die Zähler addiert, und die Nenner addiert, nachdem man die einen und die anderen vorher mit einer beliebigen Zahl multipliziert hat.

Ein gutes Tonsystem benötigt aber nicht nur einer Reihe nebeneinander liegender Quinten, die eine geschlossene sein kann oder nicht, sondern es braucht auch die dazu gehörigen großen und kleinen Terzen und Septimen, rein oder temperiert, wenn das Temperieren einen wesentlichen Nutzen verspricht.

Es sollen also diese Terzen und Septimen verschafft werden, die wir von vornherein als temperierte annehmen wollen, weil der Übergang von temperierten zu reinen Tönen leichter ist, als der von reinen zu temperierten. Dieser Übergang wird nämlich dadurch bewerkstelligt, daß man die Temperatur $= 1$ setzt. Nennen wir die, allen großen Terzen gemeinschaftliche Temperatur T, ebenso die gemeinsame Temperatur der kleinen Terzen t, die der sämtlichen Septimen s, während die gleichfalls gleichschwebende Temperatur der Quinten mit q bezeichnet bleiben soll. Legen wir uns ferner 4 Reihen von Tönen mit ihren temperierten oder nach Belieben auch reinen Schwingungszahlen vor, angeordnet in vier nebeneinander stehenden vertikalen Spalten, deren erste eine vorderhand noch nach beiden Seiten, nach oben nämlich und nach unten, unendlich gedachte Quarten- und Quintenreihe, die zweite die zu ihnen gehörigen großen Terzen, die dritte die kleinen Terzen, und die vierte die entsprechenden Septimen enthält, so ergibt sich

$$
(17)\quad
\begin{array}{llll}
\mathfrak{Q}_{-r} = \frac{2^{\beta}}{3^{r}} q^{-r}\zeta & T_{-r} = \frac{2^{\beta-2}\cdot 5}{3^{r}} q^{-r} T\zeta & t_{-r} = \frac{2^{\beta+1}}{3^{r-1}\cdot 5} q^{-r} t\zeta & S_{-r} = \frac{2^{\beta-2}\cdot 7}{3^{r}} q^{-r} s\zeta \\
\mathfrak{Q}_{-r+1} = \frac{2^{\beta-1}}{3^{r-1}} q^{-r+1}\zeta & T_{-r+1} = \frac{2^{\beta-3}\cdot 5}{3^{r-1}} q^{-r+1} T\zeta & t_{-r+1} = \frac{2^{\beta}}{3^{r-2}\cdot 5} q^{-r+1} t\zeta & S_{-r+1} = \frac{2^{\beta-3}}{3^{r-1}} q^{-r+1} s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathfrak{Q}_{-2} = \frac{2^{4}}{3^{2}} q^{-2}\zeta & T_{-2} = \frac{2\cdot 5}{3^{2}} q^{-2} T\zeta & t_{-2} = \frac{2^{5}}{3\cdot 5} q^{-2} t\zeta & S_{-2} = \frac{2\cdot 7}{3^{2}} q^{-2} s\zeta \\
\mathfrak{Q}_{-1} = \frac{4}{3} q^{-1}\zeta & T_{-1} = \frac{5}{3} q^{-1} T\zeta & t_{-1} = \frac{2^{3}}{5} q^{-1} t\zeta & S_{-1} = \frac{7}{2\cdot 3} q^{-1} s\zeta \\
\mathfrak{Q}_{0} = \zeta & T_{0} = \frac{5}{4} T\zeta & t_{0} = \frac{6}{5} t\zeta & S_{0} = \frac{7}{4} s\zeta \\
\mathfrak{Q}_{1} = \frac{3}{2} q\zeta & T_{1} = \frac{3\cdot 5}{2^{3}} q T\zeta & t_{1} = \frac{3^{2}}{5} q t\zeta & S_{1} = \frac{3\cdot 7}{2^{3}} q\zeta \\
\mathfrak{Q}_{2} = \frac{3^{2}}{2^{3}} q^{2}\zeta & T_{2} = \frac{3^{2}\cdot 5}{2^{5}} q^{2} T\zeta & t_{2} = \frac{3^{3}}{2^{2}\cdot 5} q^{2} t\zeta & S_{2} = \frac{3^{2}\cdot 7}{2^{5}} q^{2} s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathfrak{Q}_{r} = \frac{3^{r}}{2^{\alpha}} q^{r}\zeta & T_{r} = \frac{3^{r}\cdot 5}{2^{\alpha+2}} q^{r} T\zeta & t_{r} = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha-1}\cdot 5} q^{r} t\zeta & S_{r} = \frac{3^{r}\cdot 7}{2^{\alpha+2}} q^{r} s\zeta \\
\mathfrak{Q}_{r+1} = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+1}} q^{r+1}\zeta & T_{r+1} = \frac{3^{r+1}}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} T\zeta & t_{r+1} = \frac{3^{r+2}}{2^{\alpha}\cdot 5} q^{r+1} t\zeta & S_{r+1} = \frac{3^{r+1}\cdot 7}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} s\zeta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathfrak{Q}_{r+m} = \frac{3^{r+m}}{2^{\gamma}} q^{r+m}\zeta, & T_{r+m} = \frac{3^{r+m}\cdot 5}{2^{\gamma+2}} q^{r+m} T\zeta, & t_{r+m} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma-1}\cdot 5} q^{r+m} t\zeta, & S_{r+m} = \frac{3^{r+m}\cdot 7}{2^{\gamma+2}} q^{r+m} s\zeta \\
\mathfrak{Q}_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1}\zeta, & T_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1}\cdot 5}{2^{\gamma+3}} q^{r+m+1} T\zeta, & t_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+2}}{2^{\gamma}\cdot 5} q^{r+m+1} t\zeta, & S_{r+m+1} = \frac{3^{r+m+1}\cdot 7}{2^{\gamma+3}} q^{r+m+1} s\zeta.
\end{array}
$$

Alle großen Terzen heißen T, die kleinen t, die Septimen S, zusammengehörige Töne tragen einerlei Stellenzeiger und stehen auf derselben horizontalen Linie; es ist also Q_0 der Grundton, T_0 seine gr. Terz, t_0 seine kl. Terz, und S_0 seine Septime, α, β, γ sind ganze Zahlen, die man sich so gewählt denken muß, daß die betreffende Schwingungszahl des Tones zwischen ζ und 2ζ fällt, womit alle Töne der vier Vertikalreihen in den Bereich einer Oktave eingegrenzt werden.

Sind diese Töne alle rein, also alle Temperaturen $q = T = t = s = 1$, so sind sie auch alle, wie wohl ihrer in jeder Spalte unendlich viele vorhanden sind, mit zwischen ζ und 2ζ liegenden Schwingungszahlen voneinander verschieden. Daß dies in der Reihe der reinen Quinten, welche die erste Spalte enthält, richtig sei, ist bereits nachgewiesen worden, mithin ist es auch richtig für die Zahlen in der zweiten, dritten und vierten Spalte, weil sie die Zahlen der ersten Spalte enthalten, beziehentlich mit $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{4}$ multipliziert. Aber auch in verschiedenen Spalten finden sich keine 2 gleichen Zahlen. Denn nehmen wir an, es sei irgend eine der Terzen, etwa T_r gleich irgend einer Quinte, etwa Q_{r+m}, so wäre

$$\frac{3^r \cdot 5}{2^{\alpha+2}} = \frac{3^{r+m}}{2^\gamma}, \text{ also } 5 \cdot 2^{\gamma-\alpha-2} = 3^m,$$

d. h. eine durch 5 teilbare Zahl gleich einer anderen, die es nicht ist. Ebenso kann auch keine einzige der reinen kleinen Terzen und Septimen unter den reinen Quinten gefunden werden.

Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn man temperierte Töne zuläßt. Es ist bereits erwiesen worden, daß, wenn man die Temperatur q der Quinten so wählt, daß zwei ihren Schwingungszahlen nach nahe verwandte Töne Q_0 und Q_m vollständig gleich werden, die ganze unendliche Quintenreihe in vollkommen identische $m$gliedrige Quintenperioden zerfällt. Dasselbe gilt nun offenbar auch von den Zahlen der zweiten, dritten und vierten Spalte, wenn man $T_0 = T_m$, $t_0 = t_m$, $S_0 = S_m$ setzt, sie zerfallen ebenfalls und zwar für denselben Wert von q in sich ins Unendliche wiederholende, $m$gliedrige Perioden. Noch mehr; hat man unter den reinen Terzen irgend eine, etwa T_m entdeckt, die irgend einer Quinte, etwa Q_{r+m}, der Schwingungszahl nach sehr nahe kommt, so wird man durch schickliche Wahl der Temperatur T die volle Gleichheit der temperierten Töne herbeiführen können, und es wird dies zur unmittelbaren Folge haben, daß alle Terzen den aufeinanderfolgenden Quinten paarweise, und Glied für Glied gleich werden so zwar, daß darnach die zweite Vertikalreihe genau gleich der

ersten wird, und nur um eine gewisse Anzahl von Stufen gegen dieselbe verschoben. Nimmt man nämlich an, es sei für ein gewisses T

$$T_r = Q_{r+m}, \quad \text{so ist auch}$$

$$\frac{3^r \cdot 5}{2^{\alpha+2}} q^r T \cdot \zeta = \frac{3^{r+m}}{2^{\gamma}} q^{r+m} \cdot \zeta,$$ also zu wiederholtenmalen mit $\frac{3}{2} q$ multipliziert

$$\frac{3^{r+1} \cdot 5}{2^{\alpha+3}} q^{r+1} T \cdot \zeta = \frac{3^{r+m+1}}{2^{\gamma+1}} q^{r+m+1} \cdot \zeta, \quad \text{das heißt: } T_{r+1} = Q_{r+m+1},$$

$$\frac{3^{r+2}}{2^{\alpha+4}} q^{r+2} \cdot T\zeta = \frac{3^{r+m+2}}{2^{\gamma+2}} q^{r+m+2} \cdot \zeta, \quad \text{das heißt: } T_{r+2} = Q_{r+m+2} \text{ usw.}$$

Es zieht also die Gleichheit zweier Töne T_r und Q_{r+m} unmittelbar die Gleichheit aller übrigen nach sich, und es ist folglich auch ganz gleichgültig, bei welchem Paare man die Gleichstellung vornimmt. Man wird also $T_0 = Q_m$ setzen können, und das Ergebnis wird genau dieselbe Zahlenreihe sein, die auch $T_r = Q_{r+m}$ gibt.

Dasselbe, was hier von den großen Terzen gezeigt worden ist, läßt sich auch von den kleinen Terzen und Septimen beweisen. Bewirkt man nämlich durch schickliche Wahl der Temperatur t oder s, daß irgend eine der kleinen Terzen oder Septimen irgend einer Quinte gleich wird, so werden alle gleich, das heißt sie sind sämtlich unter den Quinten enthalten, und sind weder mehr noch weniger an der Zahl als diese.

Finden sich also endlich in der Quintenreihe Zahlen, die beziehentlich den folgenden

$$(18) \quad T_0 = \frac{5}{4}\zeta = 1{\cdot}25\,\zeta, \quad t_0 = \frac{6}{5}\zeta = 1{\cdot}2\,\zeta, \quad S_0 = \frac{7}{4}\zeta = 1{\cdot}75\,\zeta$$

beinahe gleich geltend sind — und dies wird offenbar der Fall sein müssen aus demselben Grunde, weil der Quinten unendlich viele in dem ganzen Bereiche einer einzigen Oktave eingeschlossen sind — so kann man die Temperaturen T, t und s immer der Einheit nahe und so wählen, daß sämtliche große und kleine Terzen und Septimen in der Reihe der Quinten, zu welchen sie gehören, bereits enthalten sind. Hiemit ergibt sich aber die in einem Tonsysteme so wünschenswerte Allseitigkeit der Verwendung der Töne von selbst, indem man in der Quintengruppe allein zu einem jeden Tone als Grundton nicht nur Quarte und Quinte, sondern auch große und kleine Terz und Septime findet, und vielleicht noch überdies durch geeignete Wahl der Temperatur q das Tonsystem zu schließen imstande ist.

Hiemit wird aber der eigentliche Zweck des Temperierens erst recht in helles Licht gesetzt, der nicht mehr ein bloßes Verfälschen

ist, um einen und denselben Ton zu zwingen mehrere Rollen zu spielen, sondern vielmehr in der Aufhebung der Inkommensurabilität zwischen den Tönen liegt, mit welcher dann eine Reduktion von einer unendlichen auf eine mäßige Anzahl von Tönen, die nun das ganze unendliche Tonreich vorstellen, verknüpft ist.

Da somit alles darauf ankommt, die Zahlenwerte (18) in der Reihe der reinen Quarten und Quinten in möglichster Ähnlichkeit zu entdecken, so mögen dieselben der klaren Übersicht halber wirklich berechnet folgen, aber nur mit 4 Dezimalstellen, weil eine größere Genauigkeit zu den vorliegenden Zwecken nicht notwendig ist. Zu dem kombinatorischen Namen Q des Tones erscheint dabei auch der musikalische hinzugefügt.

$$
(19)\quad
\begin{array}{llll|llll}
Q_0 & = \zeta & = C & & Q_0 & = \zeta & = C & \\
Q_1 & = 1{\cdot}5\,\zeta & = G & = \frac{3}{2}\zeta & Q_{-1} & = 1{\cdot}3333\,\zeta & = F & = \frac{2^2}{3}\zeta \\
Q_2 & = 1{\cdot}125\,\zeta & = D & = \frac{3^2}{2^3}\zeta & Q_{-2} & = 1{\cdot}7778\,\zeta & = B & = \frac{2^4}{3^2}\zeta \\
Q_3 & = 1{\cdot}6875\,\zeta & = A & = \frac{3^3}{2^4}\zeta & Q_{-3} & = 1{\cdot}1852\,\zeta & = Es & = \frac{2^5}{3^3}\zeta \\
Q_4 & = 1{\cdot}2656\,\zeta & = E & = \frac{3^4}{2^6}\zeta & Q_{-4} & = 1{\cdot}5802\,\zeta & = As & = \frac{2^7}{3^4}\zeta \\
Q_5 & = 1{\cdot}8984\,\zeta & = H & = \frac{3^5}{2^7}\zeta & Q_{-5} & = 1{\cdot}0535\,\zeta & = Des & = \frac{2^8}{3^5}\zeta \\
Q_6 & = 1{\cdot}4238\,\zeta & = Fis & = \frac{3^6}{2^9}\zeta & Q_{-6} & = 1{\cdot}4047\,\zeta & = Ges & = \frac{2^{10}}{3^6}\zeta \\
Q_7 & = 1{\cdot}0679\,\zeta & = Cis & = \frac{3^7}{2^{11}}\zeta & Q_{-7} & = 1.8729\,\zeta & = Ces & = \frac{2^{12}}{3^7}\zeta \\
Q_8 & = 1{\cdot}6018\,\zeta & = Gis & = \frac{3^8}{2^{12}}\zeta & Q_{-8} & = 1{\cdot}2486\,\zeta & = Fes & = \frac{2^{13}}{3^8}\zeta \\
Q_9 & = 1{\cdot}2014\,\zeta & = Dis & = \frac{3^9}{2^{14}}\zeta & Q_{-9} & = 1{\cdot}6648\,\zeta & = Bes & = \frac{2^{15}}{3^9}\zeta \\
Q_{10} & = 1{\cdot}8020\,\zeta & = Ais & = \frac{3^{10}}{2^{15}}\zeta & Q_{-10} & = 1{\cdot}1099\,\zeta & = Eses & = \frac{2^{16}}{3^{10}}\zeta \\
Q_{11} & = 1{\cdot}3515\,\zeta & = Eis & = \frac{3^{11}}{2^{17}}\zeta & Q_{-11} & = 1{\cdot}4798\,\zeta & = Ases & = \frac{2^{18}}{3^{11}}\zeta \\
Q_{12} & = 1{\cdot}0136\,\zeta & = His & = \frac{3^{12}}{2^{19}}\zeta & Q_{-12} & = 1{\cdot}9731\,\zeta & = Deses & = \frac{2^{20}}{3^{12}}\zeta \\
Q_{13} & = 1{\cdot}5205\,\zeta & = Fisis & = \frac{3^{13}}{2^{20}}\zeta & Q_{-13} & = 1{\cdot}3154\,\zeta & = Geses & = \frac{2^{21}}{3^{13}}\zeta \\
Q_{14} & = 1{\cdot}1404\,\zeta & = Cisis & = \frac{3^{14}}{2^{22}}\zeta & Q_{-14} & = 1{\cdot}7538\,\zeta & = Ceses & = \frac{2^{23}}{3^{14}}\zeta \\
Q_{15} & = 1{\cdot}7105\,\zeta & = Gisis & = \frac{3^{15}}{2^{23}}\zeta & Q_{-15} & = 1{\cdot}1692\,\zeta & = Feses & = \frac{2^{24}}{3^{15}}\zeta
\end{array}
$$

Der aufmerksame Anblick dieser Zusammenstellung von Schwingungszahlen lehrt, daß sich in derselben und in der Nähe des Grundtones Q_0 zwei Gruppen von Zahlen entdecken lassen, die den Schwingungszahlen der reinen großen und kleinen Terz und Septime (18) ähnlich sind. Man kann nämlich die Töne

(20a) $Q_4 = 1 \cdot 2656\,\zeta = E,\; Q_{-3} = 1 \cdot 1852\,\zeta = Es,\; Q_{10} = 1 \cdot 8020\,\zeta = Ais$

dafür in Aussicht nehmen. Diese haben den Vorteil, dem Grundtone am nächsten zu liegen, und versprechen deshalb die einfachsten Tonsysteme mit der allergeringsten Stufenzahl. Alle die letzteren nennt Petzval *Tonsysteme der ersten Klasse.*

Man kann aber auch die zwar vom Grundtone etwas weiter entfernten, dafür aber mit der reinen großen und kleinen Terz und Septime besser übereinstimmenden Töne

(20b) $Q_{-8} = 1 \cdot 2486\,\zeta = Fes,\; Q_9 = 1 \cdot 2014\,\zeta = Dis,\; Q_{-14} = 1 \cdot 7538\,\zeta = Ceses$

ins Auge fassen, und wird dadurch zu verwickelteren, aber reineren Tonsystemen gelangen, welche Petzval alle zur *zweiten Klasse* zählt.

Es versteht sich von selbst, daß im Verzeichnisse der reinen Quinten, wenn man dasselbe namhaft erweitert, sich Zahlen finden werden, die den: $1 \cdot 25\,\zeta$, $1 \cdot 2\,\zeta$, $1 \cdot 75\,\zeta$ noch näher, ja so nahe als man nur wünscht, kommen; allein sie befinden sich in so großen Abständen sowohl vom Grundtone, wie auch untereinander, geben mithin so vollständige Tonsysteme, daß eine jede vernünftige Ursache des Temperierens wegfällt, indem man mit demselben Aufwande von Mitteln auch vollkommen reine Töne haben kann.

Die hier angestrebte Allgemeinheit der Untersuchung verlangt, daß dieser Sachverhalt klar nachgewiesen werde. Dies kann aber nur dadurch erzielt werden, daß man dem Leser eine vollständige Übersicht über alle in der unendlichen Quintenreihe vorhandenen großen und kleinen Terzen und Septimen verschafft. Hiezu ist entweder die wirkliche Berechnung dieser Quarten- und Quintenreihe, weit genug getrieben, notwendig, oder was vielleicht den Vorzug verdient, eine Methode zur direkten Berechnung dieser genauesten Terzen und Septimen. Diese soll hier gegeben werden.

Sucht man zuvörderst die Terzen und nimmt an, die Terz $T_0 = \frac{5}{4}\zeta$ sei der Quinte $Q_{m'} = \frac{3^{m'}}{2^y}\zeta$ ähnlich, unter m' und y positive oder auch negative ganze Zahlen verstanden, dann ist nahezu

$$\frac{3^{m'}}{2^y} = \frac{5}{4},\ \text{also}\ \frac{3^{m'}}{2^{y-2}} = 5,$$

oder wenn man $y - 2 = z$ setzt,

$$\frac{3^{m'}}{2^z} = 5,$$

$$m' \log 3 - z \log 2 = \log 5, \text{ das heißt}$$

$$0 \cdot 4771213 m' - 0 \cdot 3010300 z = 0 \cdot 6989700 \text{ oder}$$

$$4771213 m' - 3010300 z - 6989700 = 0.$$

Wir dividieren durch den kleinsten Koeffizienten, den der Unbekannten z, und erhalten

$$m' - z - 2 + \frac{1760913\, m' - 969100}{3010300} = 0.$$

Hier ist $m' - z - 2$ eine ganze Zahl, weshalb auch

$$u = \frac{1760913\, m' - 969100}{3010300}$$

eine ganze Zahl sein muß, und nun haben wir

$$m' - z - 2 + u = 0,$$

$$3010300 u - 1760913 m' + 969100 = 0,$$

$$2u - m' - \frac{511526 u - 969100}{1760913} = 0.$$

$2u - m'$ ist hier eine ganze Zahl, weshalb auch

$$v = \frac{511526 u - 969100}{1760913}$$

nahezu einer ganzen Zahl gleich sein muß; für $u = 2$ findet dies in roher Annäherung statt, so daß man als erste Lösung mit Rücksicht auf die vorangegangenen Gleichungen:

$$u = 2, \; m' = 4, \; z = 4, \; Q_4 = 1 \cdot 265625 \zeta$$

hat. Aus der letzten, den Wert von v bestimmenden Gleichung folgt:

$$3v - u + 2 + \frac{226335 v - 53952}{511526} = 0$$

$$2u - m' - v = 0.$$

Hier ist abermals

$$w = \frac{226335 v - 53952}{511526} \text{ eine ganze Zahl,}$$

und

$$3v - u + 2 + w = 0,$$

$$5116526 w - 226335 v + 53952 = 0$$

$$2w - v + \frac{58856 w + 53952}{226335} = 2w - v + \xi = 0.$$

So wie $2w - v$, so ist auch

$$\xi = \frac{58\,856 w + 53\,952}{226\,335} \text{ eine ganze Zahl,}$$

was ziemlich nahe stattfindet für $w = -1$, wo ξ nur um den kleinen Bruch $\frac{4904}{226\,335}$ von Null verschieden ausfällt. Dies gibt die zweite Lösung:

$$w = -1,\ v = -2,\ u = -5,\ m' = -8,$$
$$z = -15,\ y = -13,\ Q_{-8} = 1 \cdot 24859 \zeta.$$

Noch näher aber für $w = 3$, wo ξ von der Einheit nur um den Bruch $\frac{4185}{226\,335}$ verschieden wird, liefert die dritte Lösung:

$$w = 3,\ v = 7,\ u = 26,\ m' = 45,$$
$$z = 69,\ y = 71,\ Q_{45} = 1 \cdot 251205 \zeta.$$

Lösungen geringeren Ranges, die minder genaue Terzen liefern als Q_{-8}, Q_{45}, erhält man noch für

$$w = -5,\ -9,\ \cdots \text{ und für } w = 7,\ 11,\ \cdots;$$

sie werden hier einstweilen außer Acht gelassen.

Die zur Bestimmung von ξ dienende letzte Gleichung gibt

$$4\xi - w - \frac{9089\xi - 4904}{58\,856} - 1 = 4\xi - w - 1 - \eta = 0$$

$$\text{wobei } \eta = \frac{9089\xi - 4904}{58\,856} \text{ eine ganze Zahl sein muß.}$$

Hieraus folgt aber

$$6\eta - \xi + \frac{4322\eta + 4904}{9089} = 6\eta - \xi + \vartheta = 0$$

weshalb

$$\vartheta = \frac{4322\eta + 4904}{9089} \text{ eine ganze Zahl vorstellt.}$$

Dies findet nahezu statt, erstens für $\eta = -1$, wo ϑ nur um $\frac{582}{9089}$ von Null verschieden ausfällt. Es gibt dies die vierte Hauptlösung

$$\eta = -1,\ \xi = -6,\ w = -24,\ v = -54,\ u = -184,$$
$$m' = -314,\ z = -500,\ y = -498,\ Q_{-314} = 1 \cdot 249832 \zeta.$$

Und zweitens noch näher für $\eta = 1$, wo ϑ von der Einheit nur um $\frac{137}{9089}$ abweicht, woraus die fünfte Lösung folgt:

$$\eta = 1,\ \xi = 7,\ w = 26,\ v = 59,\ u = 205$$
$$m' = 351,\ z = 554,\ y = 556,\ Q_{351} = 1 \cdot 24996 \zeta.$$

Endlich noch für $\eta = 3$, wo ϑ nur um $\frac{308}{9089}$ von 2 Einheiten verschieden befunden wird, was zur sechsten Lösung führt:

$$\eta = 3,\ \xi = 20,\ w = 76,\ v = 172,\ u = 594,$$
$$m' = 1016,\ z = 1608,\ y = 1610,\ Q_{1016} = 1 \cdot 250088 \zeta.$$

Hier könnte man innehalten und hätte damit die Hauptauflösungen der vorgelegten Gleichung, das heißt diejenigen kennen gelernt, von deren beinahe jeder man behaupten kann, daß in größerer Nähe am Grundtone Q_0 keine andere, dem reinen Schwingungsverhältnisse $\frac{5}{4}$ näher kommende anzutreffen sei.

Aus diesen gewinnt man mit Hilfe der im Verzeichnisse (16) angeführten reinen Quinten die anderen niederen Ranges. Letztere sind nämlich der Gleichung

$$Q_m = \frac{3^m}{2^{m+x}} \zeta$$

entnommen für solche m und x, daß $\frac{3^m}{2^{m+x}}$ nahe $= 1$ ist. Die hier besprochenen Terzen hingegen ergeben sich aus der Gleichung

$$Q_{m'} = \frac{3^{m'}}{2^y} \zeta$$

für solche m' und y, daß $\frac{3^{m'}}{2^y}$ nahe $\frac{5}{4}$ ist; also wird auch der Bruch $\frac{3^{m+m'}}{2^{m+x+y}}$ nahe $= \frac{5}{4}$ sein, und es ist mithin $Q_{m+m'}$ auch eine dem Reinverhältnisse $\frac{5}{4}$ mehr oder weniger nahe kommende Terz, besonders, wenn von beiden Q_m und $Q_{m'}$ der eine zu groß, der andere zu klein gewählt wird, wo dann $Q_{m+m'}$ gewöhnlich eine Terz ersten Ranges wird.

Z. B. die Quinte $Q_{306} = 0 \cdot 999005 \zeta$ und die Terz $Q_{1016} = 1 \cdot 250088 \zeta$ geben durch Multiplikation eine neue Terz:

$$Q_{1322} = 1 \cdot 248844 \zeta.$$

Ebenso liefern die Quinte $Q_{53} = 1 \cdot 00209 \zeta$ und die Terz $Q_{-8} = 1 \cdot 24859 \zeta$ eine neue Terz ersten Ranges: $Q_{45} = 1 \cdot 251205 \zeta$, die soeben vorgekommen ist.

Die in der Quintenreihe befindlichen kleinen Terzen ähnlich zu berechnen, ist nicht notwendig; denn sie ergeben sich aus den großen Terzen Glied für Glied auf eine höchst einfache Weise. Es ist nämlich die Schwingungszahl der kleinen Terz $t_0 = \frac{6}{5} \zeta$; die einer ihr ähnlichen

Quinte sei $Q_{m''} = \frac{3^{m''}}{2^z}\zeta$, so ist durch Setzen ganzer Zahlen für m'' und z nahezu

$$\frac{3^{m''}}{2^z} = \frac{6}{5} = \frac{2\cdot 3}{5}, \quad \text{mithin } \frac{3^{m''-1}}{2^{z+1}} = \frac{1}{5},$$

also

$$\frac{3^{-(m''-1)}}{2^{-(z+1)}} = 5 \text{ zu machen.}$$

Für die großen Terzen hatten wir die ähnliche Gleichung

$$\frac{3^{m'}}{2^{y-2}} = 5, \text{ es wird mithin offenbar}$$

$$-m'' + 1 = m', \quad -z - 1 = y - 2,$$
$$m'' = -m' + 1, \qquad z = -y + 1.$$

Es gehören also namentlich zu den folgenden Großterzen ersten Ranges die unten stehenden Kleinterzen derselben Rangstufe

$$T_0 = Q_4,\ Q_{-8},\ Q_{45},\ Q_{-314},\ Q_{351},\ Q_{1016} \cdots Q_{m'}$$
$$t_0 = Q_{-3},\ Q_9,\ Q_{-44},\ Q_{315},\ Q_{-350},\ Q_{-1015} \cdots Q_{m''},$$

und es ist allenthalben die Summe der Stellenzeiger entsprechender Q, also entsprechender Groß- und Kleinterzen

$$m' + m'' = 1,$$

eine wichtige Gleichung, in welcher ein Grundgesetz der Tonsysteme seine Wurzel hat.

Jetzt sind nur noch die Septimen übrig. Es sei eine solche $S_0 = \frac{7}{4}\zeta$, die ihr ähnliche Quinte $Q_n = \frac{3^n}{2^y}\zeta$, so muß durch ganze Werte von n und y

$$\frac{3^n}{2^y} = \frac{7}{4}, \quad \frac{3^n}{2^{y-2}} = 7 = \frac{3^n}{2^z}, \quad z = y - 2 \text{ gemacht werden.}$$

Übergehend zu den Logarithmen hat man

$$n \log 3 - z \log 2 = \log 7, \text{ oder}$$
$$4771213n - 3010300z = 8450980, \text{ hieraus}$$

$$n - z - 3 + \frac{1760913n + 579920}{3010300} = n - z - 3 + u = 0,$$

wo ebenso wie $n - z - 3$ notwendig auch annähernd

$$u = \frac{1760913n + 579920}{3010300} \text{ eine ganze Zahl sein muß;}$$

hieraus folgt:

$$2u - n - \frac{511526u + 579920}{1760913} = 2u - n - v = 0,$$

wo

$$v = \frac{511526u + 579920}{1760913} \text{ eine ganze Zahl vorstellt.}$$

Nahezu ist dies der Fall für $u = -1$, wo v nahe $= 0$ wird. Man gewinnt dadurch eine erste Septime:

$$u = -1,\ n = -2,\ z = -6,\ y = -4,\ Q_{-2} = 1 \cdot 77777\,\zeta.$$

Einen anderen Ton dieser Art minderen Ranges gibt

$$u = 6, \text{ wo } v \text{ nahe} = 2 \text{ wird; mithin}$$
$$u = 6,\ n = 10,\ z = 13,\ y = 15,\ Q_{10} = 1 \cdot 80203\,\zeta.$$

Aus der letzten Gleichung in v folgt

$$3v - u - 1 + \frac{226335v - 68394}{511526} = 3v - u - 1 + w = 0,$$

wo $w = \frac{226335v - 68394}{511526}$ eine ganze Zahl sein muß; hieraus folgt aber $2w - v + \frac{58856w + 68394}{226335} = 2w - v + \xi = 0$, mithin muß auch $\xi = \frac{58856w + 68394}{226335}$ eine ganze Zahl sein. Dies findet nahezu statt für $w = -1$, wo dann $\xi = 0$ wird. Dies gibt eine neue Septime:

$$w = -1,\quad v = -2,\quad u = -8,\quad n = -14,\quad z = -25,\quad y = -23,$$
$$Q_{-14} = 1.75384\,\zeta.$$

Aber auch $w = 3$ gibt ein ξ nahe an eins, also ist auch

$$w = 3,\quad v = 7,\quad u = 23,\quad n = 39,\quad z = 59,\quad y = 61,$$
$$Q_{39} = 1.175752\,\zeta.$$

eine annehmbare Septime.

Aus den letzten Gleichungen in ξ folgt

$$4\xi - w - 1 - \frac{9089\xi + 9538}{58856} = 4\xi - w - 1 - \eta = 0,$$

wo

$$\eta = \frac{9089\xi + 9538}{58856}$$

eine ganze Zahl vorstellt. Dies ist nahe der Fall für $\xi = -1$, wo η nahe Null wird.

Man erhält so eine sehr genaue Septime:

$$\xi = -1,\quad w = -5,\quad v = -11,\quad u = -39,\quad n = -67,\quad z = -109,$$
$$y = -107,\quad Q_{-67} = 1.75018\,\zeta.$$

Die folgenden Töne dieser Art tragen bereits sehr hohe Stellenzeiger, daher denn auch die Septimen in der Quintenreihe nur sehr spärlich vertreten sind.

Der klareren Übersicht halber mögen die bisher erhaltenen großen und entsprechenden kleinen Terzen und Septimen zusammengestellt sein.

$$
(21)\quad
\begin{array}{lll}
T_0 = Q_4 = 1.265625\zeta, & t_0 = Q_{-3} = 1.185185\zeta, & S_0 = Q_{-2} = 1.77778\zeta, \\
Q_{-8} = 1.24859\zeta, & Q_9 = 1.20136\zeta, & Q_{10} = 1.80203\zeta, \\
Q_{45} = 1.251205\zeta, & Q_{-44} = 1.198848\zeta, & Q_{-14} = 1.75384\zeta, \\
Q_{-314} = 1.249832\zeta, & Q_{315} = 1.200433\zeta, & Q_{39} = 1.75752\zeta, \\
Q_{351} = 1.24996\zeta, & Q_{-350} = 1.200076\zeta, & Q_{-67} = 1.75018\zeta, \\
Q_{1016} = 1.250088\zeta, & Q_{-1015} = 1.200023\zeta, & Q_{239} = 1.748403\zeta.
\end{array}
$$

Diese Groß- und Kleinterzen und Septimen sind aber nicht die einzigen, sondern nur die an Reinheit hervorragendsten derjenigen, von welchen ein Tonforscher bei der Konstruktion von Tonsystemen Gebrauch machen kann, und man erhält aus ihnen eine reiche Fülle von anderen meist niederen Ranges, wenn man sie mit einer der Quinten multipliziert, die der Einheit oder auch der Zahl 2 nahe kommen und die Stellenzeiger addiert.

Solche Quinten sind

$$
Q_{12} = 1.01364, \quad Q_{-12} = 1.97308, \quad Q_{41} = 1.97721, \quad Q_{-41} = 1.01153,
$$
$$
Q_{53} = 1.00209, \quad Q_{-53} = 1.99583.
$$

Sogar die Töne des vorliegenden Verzeichnisses können im allgemeinen so auseinander abgeleitet werden, z. B.

$$
Q_4 = Q_{-8} \cdot Q_{12}, \quad Q_{45} = Q_{-8} \cdot Q_{53}, \quad Q_{39} = Q_{-4} \cdot Q_{43},
$$
$$
Q_9 = Q_{-3} \cdot Q_{12} \text{ usw.}
$$

(Schluß folgt.)

Bücherschau.

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. gr. 8°. Leipzig 1903, B. G. Teubner. In Leinwand geb. ℳ 24.

In den Kreisen der akademischen Mathematiker findet die Wahrscheinlichkeitsrechnung zurzeit nicht die allgemeine Beachtung und Pflege, welche sie verdient. Jedes Werk, das den gegenwärtigen Besitzstand und die in der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung maßgebenden Ideen und noch schwebenden Probleme dem wissenschaftlichen Publikum übermittelt, schließt daher die Fähigkeit in sich, unsere wissenschaftliche Erkenntnis auf diesem Gebiete zu verbreiten und zu fördern; nicht nur dadurch, daß die bisher erhaltenen Resultate größeren Kreisen bekannt gemacht werden, sondern auch dadurch, daß es zur Weiterarbeit anregt.

Czuber ist es ganz besonders zu danken, daß er im Gegensatz zur allgemeinen Mode von jeher der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen großen Teil seiner Arbeit gewidmet hat. Durch sein der deutschen Mathematikervereinigung erstattetes Referat ist er im gegenwärtigen Werke umfangreicher Literaturangaben überhoben. Trotzdem finden sich namentlich in den der mathematischen Statistik und der Lebensversicherung gewidmeten Teilen zahlreiche Nachweise der inzwischen erschienenen Literatur. Gegenüber den bisher veröffentlichten Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehe ich einen wesentlichen Fortschritt in der gegenwärtigen Darstellung darin, daß auf einem verhältnismäßig beschränkten Raume die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung und die modernen Anwendungen gleichzeitig dargestellt werden.

Als einen Fortschritt in der Disposition betrachte ich es ferner, daß die auf eine endliche Anzahl von Möglichkeiten sich beziehenden Wahrscheinlichkeiten und die sogenannten geometrischen Wahrscheinlichkeiten in einem und demselben Abschnitte, nämlich in I „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" dargestellt sind. Frühere Autoren waren der Meinung, daß mit dem Auftreten der kontinuierlichen Variablen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz neue, begriffliche Schwierigkeiten hinzukämen. Im übrigen ist Referent der Meinung, daß die grundlegenden Begriffe und Definitionen von der mathematischen Seite aus eine ausführlichere Analyse verdient hätten, etwa in der Art, wie es auf den ersten Seiten von Poincarés „Calcul des Probabilités" angedeutet ist.

Der zweite Abschnitt des Buches, welcher den wiederholten Versuchen gewidmet ist, führt zum Bernoullischen und Poissonschen Theorem, für die ein strenger Beweis auf Grund eines Satzes von Tchébycheff im vierten Abschnitte nachgeholt wird. An den Resultaten der Brünner Lotterie wird die Übereinstimmung, an den Wolffschen Würfelversuchen die mögliche Nichtübereinstimmung der aus den genannten Sätzen folgenden Ergebnisse mit der Erfahrung nachgewiesen. Bei Gelegenheit des Poissonschen Theorems wird die erzeugende Funktion Laplaces wieder zu Ehren gebracht, die zur formalen Vereinfachung vieler Betrachtungen wichtige Dienste leistet. Czuber verwendet sie, um die aus wiederholten Versuchen sich ergebende Häufigkeitskurve durch das „Exponentialgesetz" (e^{-x^2}) zu approximieren.

Die Verallgemeinerung dieser Darstellung, nach welcher eine Übereinanderlagerung zahlreicher unabhängiger Elementarfehler näherungsweise zum Ex-

ponentialgesetz führt, wird in der Einleitung zur Ausgleichungsrechnung (Teil II) mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung nach Crofton ausgeführt. Nicht behandelt wird die neuerdings von den Russen vielfach bearbeitete Frage, unter welchen Voraussetzungen bei unbegrenzt wachsender Zahl der Elementarfehler die Häufigkeitskurve als Limes die Exponentialkurve ergibt. In der Tat gehen diese Untersuchungen wegen ihrer Kompliziertheit über den Rahmen eines Lehrbuches wohl hinaus, des Interresses der. Fachgelehrten sind sie aber wert.

Dem Gesagten entsprechend wird die Ausgleichungsrechnung durchweg mit Hilfe des Exponentialgesetzes begründet. Gegenüber dem zweiten Verfahren, das Gauß in seiner Theoria combinationis gegeben hat, hat dieser Weg den Nachteil, daß er mehr Voraussetzungen erfordert, den Vorzug, daß er an ein konkretes Fehlergesetz anknüpft und dadurch dem Studierenden anschaulicher sein wird.

Im dritten Teile des Werkes werden Methoden und Resultate der mathematischen Statistik, speziell die Sterblichkeitsmessung und die Messung der Invalidität entwickelt und dadurch dem Studierenden der Mathematik ein neues Gebiet erschlossen, das er in dem üblichen Studiengang nicht kennen lernt.

Angewandt werden die Ergebnisse im vierten Teile auf die Lebens- und Invalidenversicherung. Vorführung der Erfahrungsresultate und der unmerischen Daten bilden hier wie auch sonst einen wesentlichen Vorzug des Werkes.

Berlin, im September 1904. Georg Bohlmann.

W. Voigt, Thermodynamik. Zwei Bände. gr. 8. 360 u. 370 S. mit 43 bez. 44 Figuren. Leipzig, G. J. Göschen 1903, 1904.

In der neueren deutschen physikalischen Lehrbuchliteratur fehlte bisher eine *umfassende* Darstellung der Wärmelehre; denn die vorhandenen Lehrbücher dieses Gebiets behandeln entweder nur die mechanische Wärmetheorie im engeren Sinne, oder sie sind, wie die Vorlesungen von Kirchhoff und Helmholtz, auf Kosten einer ausführlichen Darstellung der Wärmeleitung unvollständig hinsichtlich der neueren Anwendungen der Thermodynamik. Diesem Mangel wird durch das vorliegende Werk abgeholfen, in welchem die *gesamte* Wärmetheorie nebst ihren Beziehungen zu anderen Gebieten der Physik, jedoch mit Ausschluß der kinetischen Theorien, eine zwar gedrängte, aber nichtsdestoweniger leicht verständliche und durch zahlreiche Anwendungen belebte Darstellung gefunden hat. Die Sätze aus anderen Zweigen der Physik, auf welche Bezug genommen wird, sind jedesmal zuvor in einem besonderen Paragraphen auseinandergesetzt, so daß auch in dieser Hinsicht bei dem Leser keine eingehenden Kenntnisse vorausgesetzt zu werden brauchen.

Der erste Band enthält eine die „reine Wärmelehre", d. h. die Thermometrie, Kalorimetrie und Wärmeleitung behandelnde Einleitung (49 S.) und Teil I, die Lehre von den „thermisch-mechanischen Umsetzungen", also die mechanische Wärmethorie im engeren Sinne. Bezüglich der Einleitung sei bemerkt, daß in dem Abschnitt über *Wärmeleitung* nur solche Probleme behandelt werden, die keinen großen Aufwand von Analysis erfordern, aber für die Bestimmung der Wärmeleitungskonstanten (so z. B. durch Beobachtung der Isothermen sowie nach der Methode des elektrisch geheizten Körpers von Kohlrausch) von Wichtigkeit sind.

Aus dem 1. Kap. des I. Teiles, betitelt „die Gleichung der Energie und das mechanische Wärmeäquivalent", seien hervorgehoben die ausführliche Besprechung der verschiedenen Bestimmungsmethoden des mechanischen

Wärmeäquivalents und die Anwendungen der Energiegleichung auf kosmische Probleme (Theorien der Sonnenwärme von R. Mayer und Helmholtz).

Auch im 2. Kap. — der Thermodynamik idealer Gase — behandelt der Verf. eine Reihe von Beispielen aus der kosmischen Physik, speziell das indifferente (adiabatische) Gleichgewicht in der Erdatmosphäre und in kosmischen Gaskugeln. Bemerkenswert als ein Gegenstand, den man sonst in den physikalischen Lehrbüchern der Thermodynamik nicht findet, ist in diesem Kap. noch die Lehre von den Zustandsänderungen auf „polytropischen" Kurven (nach Zeuner).

Das 3. Kap. enthält zunächst die Ableitung der zweiten Hauptgleichung aus dem Clausius-Thomson'schen Prinzip und allgemeine Folgerungen aus den beiden Hauptgleichungen, sodann die Anwendung derselben auf Flüssigkeiten und feste Körper unter allseitigem Druck, auf die wirklichen Gase (die Linde'sche Kältemaschine), auf die Definition der absoluten Temperaturskala, und auf einen zylindrischen festen Körper unter einseitigem Zug, wobei ein wenig bekannter merkwürdiger Versuch von W. Weber, sowie die Edlundschen Versuche besprochen werden.

Kap. 4 beginnt mit einem Abschnitt über die Grundlagen der Mechanik deformierbarer Körper; dann folgt die Entwicklung der Hauptgleichungen der Thermodynamik für beliebig viele unabhängige Variable und deren Anwendung auf elastische Körper — ein Gebiet, welches ja besonders vom Verf. selbst ausgebaut ist. Im Anschluß hieran wird erörtert, wie der Vorgang der Wärmeleitung streng, d. h. mit Berücksichtigung der begleitenden Deformationen, zu behandeln und inwieweit die gewöhnliche Behandlungsweise zulässig ist. Den Schluß des 1. Bandes bildet die Aufstellung der allgemeinen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen, welche den Ausgangspunkt der im 2. Band dargestellten Untersuchungen bilden. Diese betreffen die *thermisch-chemischen* und *thermisch-elektrischen* Umsetzungen (Teil II und III).

In Teil II werden (in Kap. 1) zunächst die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten für die Phasenumwandlung *einer* Komponente entwickelt und speziell auf die Aggregatzustandsänderungen angewendet. Die hier als Beispiel gegebene Behandlung der adiabatischen Zustandsänderung feuchter Luft nach Hertz — dessen Kurventafel auch reproduziert ist — wird jedem meteorologisch interessierten Leser sehr willkommen sein. Auch ein durch Zahlenbeispiele erläuterter Abschnitt über Dampfarbeits- und Dampfkältemaschinen wird als nützlich empfunden werden.

Das 2. Kap. behandelt — immer mit Benutzung des „zweiten" thermodynamischen Potentials — *mehrere* Komponenten in einer oder mehreren Phasen, insbesondere die Theorie der Mischungen und Lösungen, der Dissoziation idealer Gase und der elektrolytischen Dissoziation.

Der III. Teil bringt Anwendungen der Thermodynamik auf Probleme der *Elektrostatik* (besonders Pyro- und Piëzoelektrizität und die mittels des thermodynamischen Potentials daraus ableitbaren reziproken Erscheinungen) und des *Galvanismus* (Wärmewirkungen des Stromes und Thermoelektrizität, in der vom Verf. selbst herrührenden allgemeinen Behandlung mittels des thermodynamischen Potentials, ferner die Theorie der Hydrokette). Den Schluß bildet ein Kapitel über die thermodynamische Theorie der (elektromagnetisch aufgefaßten) *Wärmestrahlung*, worin die Gesetze von Stefan, Wien, Planck und Kirchhoff, sowie die Beobachtungsresultate von Lummer, Pringsheim und Kurlbaum erörtert werden.

Heidelberg. F. POCKELS.

Neue Bücher.

Astronomie und Geodäsie.

1. Hayn, Friedrich, Selenographische Koordinaten. II. Abhandlung. (Abh. der mathem.-physikal. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. XXIX No I.) Mit 4 Taf. Leipzig, Teubner. M. 6.
2. Möller, Max, Orientierung nach dem Schatten. Studien über eine Touristenregel. Mit 30 Fig. Wien 1905, Hölder. M. 3.50.

Geometrie.

3. Böhmer, Paul, Über geometrische Approximationen. Diss. Mit 2 Taf. Berlin. (Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.) M. 1.60.

Geschichte und Biographien.

4. Kern, G. Joseph, Die Grundzüge der linear perspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder Van Eyck und ihrer Schule. I. Die perspektivische Projektion. Mit 3 Zeichnungen im Text u. 14 Taf. Leipzig, Seemann. geb. M. 6.
5. Poggendorf, I. C., Handwörterbuch. 4. Bd. v. A. v. Oettingen. 22., 23. u. 24. Lfg. (Schluß). Leipzig, Barth. M. 9.
6. Sturm, A., Geschichte der Mathematik. (Sammlung Göschen Nr. 226.) Mit 7 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —80.

Mechanik.

7. Andrews, E. S., with some assistance from Karl Pearson, On the theory of the stresses in crane and coupling hooks, with experimental comparison with existing theory. London, Dulau. 3 s.
8. Boltzmann, Ludwig, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. II. Teil, enthaltend: Die Wirkungsprinzipe, die Lagrangeschen Gleichungen und deren Anwendungen. Mit 10 Fig. Leipzig, Barth. M. 9; geb. M. 10.
9. Fuhrmann, Arwed, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsbuch u. Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Mit 34 Fig. 3. verb. u. verm. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 3.60.
10. Keck, Wilh., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. I. Teil: Mechanik starrer Körper. 3. Aufl. bearb. v. Ludw. Hotopp, Hannover 1905, Helwing. M. 10; geb. M. 11.50.
11. Matriculation model answers: Mechanics. Being the London University Matriculation Papers in Mechanics from June 1890 to June 1898, and from Sept. 1902 to Sept. 1904. (University Tutorial Series.) London, Clive. 2 s.
12. Mach, Ernst, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Mit 257 Abb. 5. verb. u. verm. Aufl. (Internation. wissensch. Bibliothek Bd. 59.) Leipzig, Brockhaus. M. 8; geb. M. 9.
13. Mehrtens, Geo. Christoph, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen u Festigkeitslehre. 2. Bd. Statisch bestimmte Träger. Leipzig, Engelmann. M. 14; geb. in Leinw. M. 15
14. Müller-Breslau, Heinr. F. B., Die neueren Methoden der Festigkeitslehre u. der Statik der Baukonstruktionen, ausgehend v. dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit. 3. verm u. verb. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. M. 8; geb. in Halbfr. M. 10
15. Ritter, Aug., Elementare Theorie u. Berechnung eiserner Dach- u. Brücken-Konstruktionen. 6. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. M. 10; geb. in Halbfr. M. 12

16. Webster, Arthur Gordon, The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics. Teubners Sammlung XI.) Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 14.
17. Winkelmann, Max, Zur Theorie des Maxwellschen Kreisels. Diss. Mit Fig. u. 1 Taf. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 2.

Physik und Chemie.

18. Abraham, M., Theorie der Elektrizität, I. Bd., Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität von A. Föppl. 2., vollständig umgearbeitete Aufl. hrsg. v. M. Abraham. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.
19. Ariès, E., La statique chimique basée sur les deux principes fondamentaux de la thermodynamique. Paris, Hermann. Frs. 10.
20. Balfour, Right Hon. A. S., Reflections suggested by the new theory of matter. Being the presidential adress before the British Association for the Advancement of Science, Cambridge, August 17, 1904. London, Longmanns. 1 s.
21. Bremer, F., Leitfaden der Physik für die oberen Klassen der Realanstalten. Mit besonderer Berücksichtigung von Aufgaben u. Laboratoriumsübungen. Mit 386 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 3.20.
22. Bucherer, A. H., Mathematische Einführung in die Elektronentheorie Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 3.20.
23. Classen, J., Theorie der Elektrizität u. des Magnetismus. II. Magnetismus und Elektromagnetismus. (Sammlung Schubert XLII.) Mit 53 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 7.
24. Czapski, Siegfried, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. 2. Aufl., unter Mitwirkung des Verfassers u. mit Beiträgen von M. von Rohr hrsg. von O. Eppenstein. Mit 176 Abb. Leipzig, Barth. M. 14.50; geb. M. 16.
25. Donle, Wilh., Lehrbuch der Experimentalphysik für Realschulen u. Realgymnasien. 3., verb. Aufl. Mit 420 Abb., einer Spektraltaf. u. 560 Übungsaufgaben. Stuttgart 1905, Grub. geb. M. 3.60.
26. Duddell, W., On the resistance of electromotive forces of the electric arc. London, Dulau. 4 s.
27. Fortschritte, die, der Physik im J. 1903. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 59. Jahrg. 3. Abtlg. Kosmische Physik. Braunschweig, Vieweg u. Sohn. M. 26.
28. Helm, Geo., Die Theorien der Elektrodynamik nach ihrer geschichtlichen Entwickelung. Leipzig, Veit & Co. M. 5.60; geb. in Leinw. M. 6.60.
29. Hertz, Paul, Untersuchungen üb. unstetige Bewegungen eines Elektrons. Diss. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht M. 2.
30. Horton, Frank, The effects of changes of temperature on the modulus of torsional rigidity of metal wires. London, Dulau. 3 s. 6 d.
31. Junker, Fr., Physikalische Aufgaben aus dem Gebiet des Magnetismus und der Elektrizität für die Oberklassen höherer Lehranstalten. Ulm. (Kommissionsverlag von B. G. Teubner, Leipzig.) M. 0.80.
32. Marx, A. L'éther, Principe universel des forces. Mémoires résumés par C. Benoit. Paris 1905, Gauthier-Villars. Frs. 6.50.
33. Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther. („Aus Natur und Geisteswelt", 58. Bändchen). Mit 27 Fig. B. G. Teubner, Leipzig. M. 1—; geb. M. 1.25.
34. Poynting, J. H., and Thomson, J. J., A textbook of Physics: Sound. 3rd ed. carefully revised. London, Griffin. 8 s. 6 d.
35. Rizzatti, F., Dalla pietra filosofale al radio, con un'appendice bibliografica Torino. L. 3.50.
36. Samuelson, Arnold, Luftwiderstand und Flugfrage. Experimental-Vortrag. Hamburg, Boysen & Maasch. M. 2.

37. Schuster, Arthur, An introduction to the theory of Optics. London, Arnold 15 s.

38. Siertsema, L. H., De elektriciteits geleiding in gassen, in verband met de electronentheorie. Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het leeraarsambt in de naturkunde aan de polytechnische school te Delft, op 6 Oktober 1904. Delft, Waltmann Jr. Fl. 0.40.

39. Starke, Hermann, Experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Mit 275 Abb. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 6.

40. Stewart, Wallace, The higher text-book of Magnetism and Electricity. The Tutorial Physics vol. 4. London, Clive. 6 s. 6 d.

41. Strutt, Hon. R. J., The Becquerel rays and the properties of Radium. London, Arnold. 8 s. 6 d.

42. Thomson, J. J., Elements of the mathematical theory of Electricity and Magnetism. 3rd ed. Cambridge, University Press. 10 s.

43. Thomson, J. J., Elektrizität u. Materie. Autorisierte Übersetzung von G. Siebert. („Die Wissenschaft" Heft 3.) Mit 19 Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 3; geb. M. 3.60.

44. Travers, Morris W., Experimentelle Untersuchung von Gasen. Mit einem Vorwort von Sir William Ramsay. Deutsch von Tadeusz Estreicher. Nach der englischen Aufl. vom Verf. unter Mitwirkung des Übersetzers neu bearb. u. erweitert. Mit 1 Tfl. u. 144 Abb. Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. M. 9; geb. in Leinw. M. 10.

45. Wallentin, Ignaz, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. (Teubners Lehrbücher XV.) Leipzig B. G. Teubner. geb. in Leinw. M. 12.

46. Watts, W. Marshall, An introduction to the study of Spectrum Analysis. London, Longmans. 10 s. 6 d.

47. Weyrauch, Jakob J., Grundriß der Wärmetheorie. Mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen. 1. Hälfte: I. Erhaltung der Energie. Erster Hauptsatz, II. Wärme u. Arbeit. Zweiter Hauptsatz. III. Über Wärmemotoren im allgemeinen. IV. Von den Gasen. V. Über Luftmaschinen. VI. Aus der Chemie u. kinetischen Gastheorie. VII. Über Verbrennungsmotoren. Stuttgart 1905. Wittwer.

48. Wiedemann, Eilhard, u. Elbert, Herm., Physikalisches Praktikum. 5. verb. u. verm. Aufl. Braunschweig, Vieweg und Sohn. M. 10—, geb. M. 11.

49. Wilson, H. A., On the electric effect of rotating a dielectric in a magnetic fluid. London, Dulau. 1 s.

50. Zwick, Herm., Grundzüge der Experimentalphysik zum Gebrauch f. Schüler. Mit 209 Fig. Berlin 1905, Oehmigke. M. 1.50; geb. M. 1.80.

S. auch Nr. 16.

Rechenapparate, Tafeln.

51. Dreyssé, A., Instruction détaillée sur la règle à calcul Mannheim et méthode pratique, à l'usage des ingénieurs, architectes, conducteurs de travaux, élèves des écoles du gouvernement, des classes de mathématiques spéciales et de mathématiques élémentaires. Paris, Vuibert et Nony. Frs. 2.50.

52. Gauss, F. G., Fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 2. Tl. Fünfstellige logarithm.-trigonom. Tafeln f. Dezimalteilung des Quadranten. Ster.-Dr. 3. Aufl. Halle, Strien. M. 6; geb. in Halbfrz. 6.75.

53. Pröhl Reinhold, Thermodynamische Rechentafel. 38; 5 $\times$ 49 cm. Nebst Gebrauchsanweisung. Berlin, Springer. M. 2.50.

Verschiedenes.

54. Musil, Alfred, Bau der Dampfturbinen. Mit zahlreichen Abb. Leipzig, B. G. Teubner. geb. in Leinw. M. 8.

55. Riecke, E., Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik u. Astronomie an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik u. Physik in Göttingen, Ostern 1904, von O. Behrendsen, E. Bose, E. Riecke, J. Stark u. K. Schwarzschild. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. M. 2.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Abraham, M., Theorie der Elektrizität, I, s. N. B. („Neue Bücher"), Nr. 18.

Ariès, E., La statique chimique, s. N. B. 19.

Arndt, Erdmann, Einführung in die Stereometrie als Pensum des ersten Vierteljahres der 1. Klasse. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht der vierten Realschule zu Berlin. Ostern 1904. Mit 2 Tfln. Berlin, Weidmann.

Boltzmann, L., Prinzipe der Mechanik, II., s. N. B. 8.

Bremer, F., Leitfaden der Physik, s. N. B. 21.

Bucherer, A. H., Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, s. N. 22.

Cesàro, Ernesto, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Gerhard Kowalewski mit 79 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 15.

Classen, J., Elektrizität und Magnetismus, II., s. N. B. 23.

Czapski, S., Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, 2. Aufl., s. N. B. 24.

Donle, W., Lehrbuch der Experimentalphysik, s. N. B. 25.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk. Tome I, vol. 1. fasc. 1. Arithmétique. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, Teubner. M. 4.

Fisher, I., Kurze Einleitung in die Differential- u. Integralrechnung („Infinitesimalrechnung") Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten 3. englischen Ausgabe übers. v. N. Pinkus. Mit 11 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 1.80.

Fricke, R., Rede, gehalten bei der Übernahme des Rektorats der Herzoglichen Technischen Hochschule Carola-Wilhelmina zu Braunschweig. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Fuhrmann, A., Aufgaben aus der analytischen Mechanik, I., s. N. B. 9.

Hayn, Fr., Selenographische Koordinaten. II. Abhandlung. s. N. B. 1.

Holzmüller, Gustav, Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Teil. 4. Doppel-Auflage. Mit 192 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 2.40.

Junker, Fr., Physikalische Aufgaben, s. N. B. 31.

Kern, G. I., Die Grundzüge der linear-perspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder Van Eyck und ihrer Schule. I., s. N. B. 4.

Koch, K. R., Relative Schweremessungen, ausgeführt im Auftrage des Kgl. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens. IV. Anschlußmessungen in Karlsruhe. (Veröffentlichung der Kgl. Württembergischen Kommission für die internationale Erdmessung. Sonder-Abdruck aus den Jahresheften des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Jahrgang 1905.) Stuttgart, Druck von C. Grüninger.

Köhler, A.. Mathematische Aufgaben f. die Prima der höheren Lehranstalten. Teil II. Berlin, Simion Nf. geb. M. 1.70, Auflösungen hierzu, brosch. M. 1.

Lechalas, G., Introduction à la géometrie générale. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.75.

Marx, A., L'éther, s. N. B. 32.

Mie, G., Moleküle, Athome, Weltäther, s. N. B. 33.

Möller, M., Orientierung nach dem Schatten, s. N. B. 2.

Moors, B. P., Le Système des poids, mesures et monnaies des Israélites d'après la Bible. Paris, Hermann. Frs. 4.

Müller, H., u. Kutnewski, M., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie u. Stereometrie. II. Teil. Ausgabe A, für Gymnasien. 2. verb. u. stark gekürzte Aufl. Leipzig u. Berlin. 1905, Teubner.

Musil, A., Dampfmaschinen, s. N. B. 54.

Niemeyer, R., Pastor in Peckelsheim, Die Zahlenkunst. II. Teil. Das Rechnen mit ganzen Zahlen. 2. Fortsetzung. Selbstverlag. Dortmund, Buchdruckerei von C. L. Krüger.

Petronievics, Branislav, Prinzipien der Methaphysik. I. 1. Allgemeine Ontologie u. die formalen Kategorien. Mit einem Anhang. Elemente der neuen Geometrie. Heidelberg, Winter. M. 16.

Poggendorff, Handwörterbuch, s. N. B. 5.

Reusch, I., Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung. Mit 104 Fig. Leipzig u. Berlin, Teubner. M. 1.

Riecke, E., Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik u. Astronomie an den höheren Schulen, s. N. B. 55.

Schlags, Willibrord, Geometrische Aufgaben über das Dreieck, Für Schüler höherer Lehranstalten in Unterrichtsbriefen systematisch geordnet. Mit 59 Abb. Freiburg i. B., Herder. M. 1.

Schlömilch, Oskar, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 5. Aufl. Bearb. v. E. Naetsch. Mit 85 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 8.

Schwering, K., Sammlung v. Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. 3. Lehrgang. 2., verb. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 1.20; geb. M. 1.50

Schwering, K., Analytische Geometrie für höhere Lehranstalten. 2., verb. Aufl. Mit 7 Fig. Freiburg i. B., Herder. M. —.50.

Starke, Herm., Experimentelle Elektrizitätslehre. s. N. B. 39.

Stolz, Otto u. Gmeiner, Anton, Einleitung in die Funktionentheorie. (Teubners Sammlung Bd. XIV.) I. Abteilung. Mit 10 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw M. 6.

Sturm, A., Geschichte der Mathematik, s. N. B. 6.

Tannery, Jules, Indroduction à la théorie des fonctions d'une variable. 2ème édition entièrement refondue. Tome I. Nombres irrationnels, ensembles, limites, séries, produits infinis, fonctions élémentaires, dérivées. Paris, Hermann.

Thomson, J. J., Elektrizität u. Materie, s. N. B. 43.

Travers, M. W., Experimentelle Untersuchungen von Gasen, s. N. B. 44.

Vries, H. de, Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume. Leipzig 1905, Göschen. M. 3.

Wallentin, J., Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre, s. N. B. 45.

Webster, A. G., The dynamics of particles . . . s. N. B. 16.

Weyrauch, Jakob J., Grundriß der Wärmetheorie. 1. Hälfte, s. N. B. 47.

Zwick, H., Experimentalphysik, s. N. B. 50.

Title Page

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE,
H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

---

51. BAND. 4. HEFT.

MIT 2 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 17. April 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

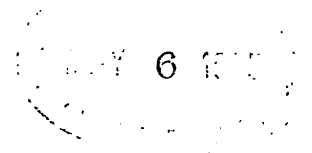
☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Blaske, E. Czuber, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, A. Grünwald, G. Herglotz, G. Holtsmark, J. Horn, A. V. Leon, F. Ludwig, K. Mack, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, R. v. Mises, K. Sitz, B. J. W. Reuser, C. Runge, L. Schleiermacher, J. Schnöckel, E. Selling, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Weinnoldt, Th. Weitbrecht, S. Wellisch, A. Wlassow, F. Wittenbauer, E. Wölffing.



Petzvals Theorie der Tonsysteme.

Herausgegeben von Dr. phil. L. Erményi, Ingenieur in Wien.

(Schluß.)

IV. Tonsysteme der ersten Klasse.

Um zu den Tonsystemen erster Klasse zu gelangen, bilden wir zunächst aus dem Verzeichnisse (19) der reinen Quinten temperierte. Dies geschieht durch Multiplikation einer jeden Zahl mit einer Potenz der Temperatur q, deren Exponent gleich dem Stellenzeiger des zu dieser Zahl gehörigen Tones ist. Wir heben dann aus dem Verzeichnisse heraus die Töne:

$$Q_4 = 1.2656 q^4 \zeta = \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta = E,$$

$$Q_{-3} = 1.1852 q^{-3} \zeta = \frac{2^5}{3^3} q^{-3} \zeta = Es,$$

$$Q_{10} = 1.8029 q^{10} \zeta = \frac{3^{10}}{2^{15}} q^{10} \zeta = Ais.$$

Dann temperieren wir aber auch die in den Formeln (18) verzeichnete große und kleine Terz und Septime durch Multiplikation mit T, t und s:

$$T_0 = 1.25 T\zeta = \frac{5}{4} T\zeta, \quad t_0 = 1.2 t\zeta = \frac{6}{5} t\zeta, \quad S_0 = 1.75 s\zeta = \frac{7}{4} s\zeta,$$

und stellen endlich die ähnlichen Schwingungszahlen von Q_4 und T_0, Q_{-3} und t_0, Q_{10} und S_0 einander gleich, was durch schickliche Wahl der Temperaturen T, t und s bewerkstelligt gedacht wird:

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta &= \frac{5}{4} T\zeta, \quad \text{also} \quad T = \frac{3^4}{2^4 \cdot 5} q^4 = \frac{81}{80} q^4, \\ \frac{2^5}{3^3 q^3} \zeta &= \frac{6}{5} t\zeta, \quad\quad ,, \quad\quad t = \frac{2^4 \cdot 5}{3^4 \cdot q^3} = \frac{80}{81 q^3}, \\ \frac{3^{10}}{2^{15}} q^{10} \zeta &= \frac{7}{4} s\zeta, \quad\quad ,, \quad\quad s = \frac{3^{10}}{2^{13} \cdot 7} q^{10} = \frac{59049}{8192 \cdot 7} q^{10} = \frac{59049}{57344} q^{10}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen q unbestimmt. Man kann demselben mithin noch unendlich viele Werte beilegen und wird so zu unendlich

vielen Tonsystemen der ersten Klasse gelangen. Nur muß jedesmal die Wahl des q so getroffen werden, daß weder q noch T, t und s viel von der Einheit verschieden ausfallen. Hiezu gehört aber wesentlich, daß $q < 1$ sei. Dies ist aber eine notwendige Eigenschaft aller Tonsysteme der ersten Klasse, denn wollte man $q > 1$ wählen, so hätte man

$$T > \frac{81}{80}, \quad t < \frac{80}{81}, \quad s > \frac{59049}{57344},$$

lauter heulende Wölfe. Hier erklärt es sich auch, warum als Repräsentant der Septime der Ton *Ais* mit der reinen Schwingungszahl $1.8020\,\zeta$ und nicht der der reinen Septime $1.75\,\zeta$ nähere Ton $B = 1.7778\,\zeta = Q_{-2}$ gewählt worden ist. Letzterer würde nämlich anstatt der dritten der Gleichungen (22) für s die folgende andere geliefert haben:

$$\frac{2^6}{3^2 \cdot 7 \cdot q^2} = \frac{64}{63 \cdot q^2},$$

die für jedes bei Tonsystemen erster Klasse zulässige $q < 1$ einen heulenden Wolf vorstellt, für $q = 1$ jedoch noch den Vorzug behält.

Multipliziert man nun die zwei ersten der Gleichungen (22) miteinander, so ergibt sich die merkwürdige Gleichung

$$Tt = q, \tag{24}$$

die ein Grundgesetz aller Tonsysteme enthält, nämlich: *Das Produkt der Temperaturen der großen und kleinen Terz ist gleich der Temperatur der Quinte.*

Dieser Satz läßt sich noch anders aussprechen. Man hat nämlich aus der vorhergehenden Gleichung auch

$$\frac{5}{4}T \cdot \frac{6}{5}t = \frac{3}{2}q,$$

mithin

$$\log\frac{5}{4}T + \log\frac{6}{5}t = \log\frac{3}{2}q$$

Nun sind $\frac{5}{4}T$, $\frac{6}{5}t$, $\frac{3}{2}q$ diejenigen Faktoren, mit welchen man die Schwingungszahl eines Tones multiplizieren muß, um jene seiner großen, kleinen Terz und Quinte zu erhalten, oder mit anderen Worten die Schwingungsverhältnisse der genannten Intervalle. Man kann also auch sagen: *Die temperierte große und kleine Terz ergänzen sich zur temperierten Quinte in dem Sinne, daß die Summe der Logarithmen der Schwingungsverhältnisse der Terzen den Logarithmus des Schwingungsverhältnisses der Quinte gibt.*

Es fragt sich, ob dieser merkwürdige Satz auf die Tonsysteme

der ersten Klasse beschränkt ist, und wenn nicht, auf welche anderen er auch ausgedehnt werden kann. Er verdankt sein Bestehen folgendem Umstande. Weil die vierte temperierte Quinte vom Grundtone aus, nämlich $q^4 Q_4$, zugleich die temperierte Großterz T_0 ist, und weil die dritte Quarte vom Grundtone aus, $q^{-3} Q_{-3}$, zugleich die temperierte Kleinterz t_0 ist, so bestehen die Gleichungen

$$T_0 = q^4 Q_4 \quad \text{und} \quad t_0 = q^{-3} Q_{-3},$$

aus welcher durch Multiplikation

$$T_0 t_0 = q Q_1$$

erhalten wird. Der Grund der Richtigkeit des obigen Satzes ist also, daß die Stellenzeiger derjenigen Quinten Q, die zugleich die Rolle der großen und kleinen Terz übernehmen, summiert Eins geben. Nun haben wir aber im vorhergehenden Abschnitte gesehen und im Verzeichnisse (21) klar vor Augen gelegt, daß zu jeder Großterz $Q_{m'}$ eine Kleinterz $Q_{m''}$ desselben Ranges vorhanden ist mit

$$m' + m'' = 1.$$

Der fragliche Satz gilt also für alle jene Tonsysteme, bei welchen die großen und kleinen Terzen in derselben Weise gepaart vorkommen.

Um nun auch noch eine andere allgemeine Eigenschaft der Tonsysteme der ersten Klasse zu erkennen, legen wir uns den über dem Grundtone C konstruierten Dreiklang CEG vor mit der musikalischen und arithmetischen Bezeichnung und den Schwingungszahlen seiner Bestandtöne:

$$C = Q_0 = \zeta, \quad E = Q_4 = \frac{3^4}{2^6} q^4 \zeta = 1.265625 q^4 \zeta, \quad G = Q_1 = \frac{3}{2} q \zeta = 1.5 q \zeta.$$

Da die temperierte Unterdominante F die Schwingungszahl $\frac{4}{3q}\zeta$ besitzt, so wird man durch Multiplikation mit $\frac{4}{3q}$ vorstehende Töne in FAC, d. h. den Dreiklang der Unterdominante verwandeln:

$$F = Q_{-1} = \frac{4}{3q}\zeta = \frac{1.33333}{q}\zeta, \quad A = Q_3 = \frac{3^3}{2^4} q^3 \zeta = 1.6875 q^3 \zeta, \quad C = 2\zeta = Q_0.$$

Die Oberdominante G hat die Schwingungszahl $\frac{3}{2} q\zeta$, man erhält mithin den Dreiklang der Oberdominante ebenso durch Multiplikation mit $\frac{3}{2} q$

$$G = \frac{3}{2} q \zeta = 1.5 q \zeta = Q_1, \quad H = \frac{3^5}{2^7} q^5 \zeta = 1.89844 q^5 \zeta = Q_5,$$

$$D = \frac{3^2}{2^3} q^2 \zeta = 1.125 q^2 \zeta = Q_2.$$

Wichtige Töne sind noch die kleine Terz *Es* der Tonika *C* und die Septime *Eis* der Oberdominante *G*. Sie erhalten in sämtlichen temperierten Tonsystemen erster Klasse die Schwingungszahlen:

$$Es = Q_{-3} = \frac{2^5}{3^3 q^3}\zeta = \frac{1.185185}{q^3}\zeta, \quad Eis = Q_{11} = \frac{3^{11}q^{11}}{2^{17}}\zeta = 1.351524 q^{11}\zeta.$$

Aus den Tönen oben genannter 3 Dreiklänge, geordnet nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, setzt sich die Dur-Tonleiter über dem Grundtone (Tonika) $C = Q_0$ zusammen:

C	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*	*H*	*C*
Q_0,	Q_2,	Q_4,	Q_{-1},	Q_1,	Q_3,	Q_5,	Q_0,
ζ,	$\frac{3^2}{2^3}q^2\zeta$,	$\frac{3^4}{2^6}q^4\zeta$,	$\frac{2^2}{3\cdot q}\zeta$,	$\frac{3}{2}q\zeta$,	$\frac{3^3}{2^4}q^3\zeta$,	$\frac{3^5}{2^7}q^5\zeta$,	2ζ,
ζ,	$1.125q^2\zeta$,	$1.2656q^4\zeta$,	$\frac{1.3333}{q}\zeta$,	$1.5q\zeta$,	$1.6875q^3\zeta$,	$1.8984q^5\zeta$,	2ζ.

Aus den Schwingungszahlen dieser Töne folgt znnächst:

$$\frac{D}{C} = \frac{E}{D} = \frac{G}{F} = \frac{A}{G} = \frac{H}{A} = \frac{3^2}{2^3}q^2 = 1.125q^2.$$

In sämtlichen Tonsystemen erster Klasse sind daher die ganzen Töne alle gleich, und es wird kein Unterschied zwischen großen und kleinen Tönen gemacht, wie er in der reinen Tonleiter besteht. Dies ist nun allerdings eine Abweichung vom reinen Wohllaute, die nur dadurch unmerklich gemacht werden kann, daß man sie auf die dissonanten Intervalle wirft.

Ferner ergibt sich noch

$$\frac{F}{E} = \frac{C}{H} = \frac{2^8}{3^5 q^5} = \frac{1.0535}{q^5},$$

und

$$\frac{E}{Es} = \frac{Eis}{E} = \frac{3^7}{2^{11}}q^7 = 1.0679q^7,$$

$$\frac{F}{Eis} = \frac{2^{19}}{3^{12}q^{12}} = \frac{1}{1.01364\,q^{12}}.$$

Mithin ist der große Halbton $\frac{F}{E}$ von dem kleinen Halbtone $\frac{E}{Es}$ im allgemeinen verschieden, ausgenommen, es wäre q so beschaffen, daß

$$\frac{2^8}{3^5 q^5} = \frac{3^7}{2^{11}}q^7, \quad \text{also} \quad \frac{3^{12}}{2^{19}}q^{12} = 1,$$

$$q = \sqrt[12]{0.986541} = 0.99887$$

ist.

Dies ist die wohlbekannte Temperatur der Quinte im 12-stufigen, chromatischen Systeme; also in diesem und nur in diesem ist der große

Halbton dem kleinen gleich. Mit dem Zusammenfallen der beiden Halbtöne wird aber auch $F = Eis$, d. h. die Unterdominante ist auch zugleich die Septime des Septimenakkords der Oberdominante.

Bei allen anderen Tonsystemen der ersten Klasse, in welchen $q < 0 \cdot 99887$, ist der große Halbton größer als der kleine, und die Septime tiefer als die Unterdominante. Gäbe es hingegen brauchbare Tonsysteme erster Klasse, in welchen $q > 0 \cdot 99887$, wo dieses q der Einheit noch näher käme als im chromatischen, also mit noch reineren Quinten, so wäre in denselben der kleine Halbton größer als der große, und die Septime höher als die Unterdominante. Daß es derlei Brauchbares nicht geben kann, liegt auf der Hand.

Endlich ist noch vermöge der oben angeführten Gleichungen

$$\frac{E}{Es} \cdot \frac{F}{E} = \frac{F}{Es} = \frac{3^2}{2^3} q^2 = \text{einem ganzen Tone,}$$

$$\frac{Eis}{E} \cdot \frac{F}{Eis} = \frac{F}{E} = \frac{2^8}{3^5 q^5} = \text{einem großen halben Tone.}$$

Also setzen sich der große und der kleine Halbton zu einem ganzen Tone, und der kleine Halbton und das Intervall $\frac{F}{Eis}$ zu einem großen Halbton zusammen.

Selbstverständlich läßt sich über einem jeden der temperierten Quintenreihe entnommenen Q_p nicht nur ein Dreiklang, sondern auch eine ganze Tonleiter aufbauen, sowie über dem Grundtone Q_0. Die allgemeine Formel für diese Tonleiter geht aus derjenigen für den Grundton Q_0 hervor, indem man p Einheiten zu den Stellenzeigern sämtlicher Töne Q addiert, unter p eine beliebige, ganze, positive oder negative Zahl verstanden. Diese Formel ist also

$$Q_p, \quad Q_{p+2}, \quad Q_{p+4}, \quad Q_{p-1}, \quad Q_{p+1}, \quad Q_{p+3}, \quad Q_{p+5}, \quad Q_p.$$

In allen für verschiedene Werte von p in dieser Formel enthaltenen Tonleitern haben die korrespondierenden Intervalle einerlei Größe; der ganze Ton, die beiden Halbtöne sind überall dieselben. Die Konsonanzen, Quinte, Quarte, Terzen und Septimen sind in allen gleich temperiert.

Auch für die Molltonleiter über dem Grundtone Q_p läßt sich eine ähnliche Formel aufstellen, zu der man auf demselben Wege gelangt. Der dem Grundtone $Q_0 = C$ angehörige Moll-Akkord ist nämlich C, Es, G.

$$C = Q_0 = \zeta, \quad Es = Q_{-3} = \frac{2^5}{3^3 q^3} \zeta, \quad G = Q_1 = \frac{3}{2} q \zeta.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{4}{3q}$, ebenso mit $\frac{3}{2}q$ bewerkstelligt man die Verwandlung desselben in die Moll-Dreiklänge.

$$F,\ As,\ C \quad \text{und} \quad G,\ B,\ D.$$

$$Q_{-1} = F = \frac{2^2}{3q}\zeta, \qquad Q_{-4} = As = \frac{2^7}{3^4 q^4}\zeta,\ Q_0 = C = 2\zeta,$$

$$Q_1 = G = \frac{3}{2}q\zeta, \qquad Q_{-2} = B = \frac{2^4}{3^2 q^2}\zeta,\ Q_2 = D = \frac{3^2}{2^3}q^2\zeta.$$

Aus den Tönen dieser 3 Moll-Dreiklänge entsteht die Molltonleiter über dem Grundtone Q_0

$$\begin{matrix} C & D & Es & F & G & As & \dot{B} & C \\ Q_0 & Q_2 & Q_{-3} & Q_{-1} & Q_1 & Q_{-4} & Q_{-2} & Q_0. \end{matrix}$$

Und indem man p Einheiten zu den Stellenzeigern sämtlicher Töne Q hinzufügt, erhält man die allgemeine Formel aller Moll-Tonleitern über dem unbestimmten Grundtone Q_p:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p-3} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p-4} \quad Q_{p-2} \quad Q_p.$$

Die arithmetische Nomenklatur kann hier sowohl, wie auch in der allgemeinen Formel der Dur-Tonleitern in die musikalische für jedes bestimmte p mit Hilfe der Quintentabelle übertragen werden. Für die vorliegenden Zwecke ist dies jedoch nicht notwendig.

Der Musiker braucht, um die in verschiedenen Tonarten geschriebenen Tonstücke spielen zu können, die Töne mehrerer Tonleitern, und weil vorzugsweise verwandte Tonarten in Anwendung kommen, so bilden die Grundtöne dieser benötigten Tonleitern eine Reihe kontinuierlich fortschreitender Quinten in gewisser Anzahl. Die moderne Musik setzt deren 12 fest. Dies war jedoch nicht zu allen Zeiten gleich, leidet auch jetzt für gewisse Instrumente eine Ausnahme und könnte vielleicht in Zukunft anders werden.

Nehmen wir also, um allgemein zu sprechen, an, der Musiker brauche $p+1$ Tonleitern über den $p+1$ Grundtönen (Toniken)

$$Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,\ Q_{p-1},\ Q_p$$

und zwar in Dur wie in Moll, so lehrt der Anblick der über den äußersten Tönen Q_0 und Q_p aufgebauten Dur- und Moll-Tonleitern, daß hiezu alle Töne benötigt werden aus der folgenden Quintenreihe:

$$Q_{-4},\ Q_{-3},\ Q_{-2},\ Q_{-1},\ Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{p-1},\ Q_p,\ \ldots,\ Q_{p+5}.$$

Sie sind $p+10$ an der Zahl, also um 9 mehr, als Dur-Tonarten. Die letzten 6 von ihnen ermangeln zudem der reinen Septime des Ober-

dominant-Septimenakkordes, und müssen sich anstatt dieser, mit der Unterdominante behelfen. Will man diesem Mangel abhelfen, und allen Tonarten echte Septimen verschaffen, so muß man die vorliegende Reihe bis Q_{p+11} fortsetzen, was $p + 16$ Töne gibt, also um 15 mehr als Dur-Tonarten.

Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß alle diese $p + 16$ Töne voneinander verschieden sind; befinden sich hingegen unter ihnen einander gleiche, dann kann oft eine namhafte Ersparnis an Tonmitteln erzielt werden. Ein solches Zusammenfallen mehrerer Töne in einen findet aber nur in geschlossenen, in sich zurückkehrenden Tonsystemen statt, und die Ersparnis ist dann am größten, wenn es gelingt, ein geschlossenes Tonsystem von $p + 1$ Stufen d. h. von so vielen, als Tonleitern benötigt werden, aufzufinden.

In einem solchen ist nämlich

$$Q_{p+1} = Q_0, \quad Q_{p+2} = Q_1, \quad Q_{p+3} = Q_2, \quad \ldots, \quad Q_{p+11} = Q_{10},$$
$$Q_p = Q_{-1}, \quad Q_{p-1} = Q_{-2}, \quad Q_{p-2} = Q_{-3}, \quad \ldots, \quad Q_{p-3} = Q_{-4}$$

und nur die $p + 1$ Töne

$$Q_0, \quad Q_1, \quad Q_2, \ldots, Q_p$$

sind wirklich voneinander verschieden. Man hat daher mit nur $p + 1$ Tönen ebenso viele Tonleitern, die gleichmäßig mit allen konsonanten und dissonanten Intervallen versehen sind. Das geschlossene Insichzurückkehren des Tonsystems erspart mithin wenigstens 9 Töne, und wenn dasselbe mit einer guten, dem reinen Schwingungsverhältnisse $\frac{7}{4}$ nahe genug kommenden Septime versehen ist, sogar 15 Töne.

Da nun solchergestalt die geschlossenen Tonsysteme unter übrigens ähnlichen Umständen vor anderen einen bedeutenden Vorzug behaupten, so entsteht die wichtige Frage: Gibt es außer dem üblichen 12stufigen chromatischen noch andere geschlossene Tonsysteme der ersten Klasse, und welches ist ihre Stufenzahl?

Diese Frage zu beantworten, bringen wir in Erinnerung, daß, wie im II. Abschnitte bewiesen worden ist, die Töne eines geschlossenen $(p + 1)$-stufigen Tonsystems, wenn man sie nach ihrer Höhe d. h. Größe der Schwingungszahlen ordnet, eine geometrische Progression bilden, wie

$$\zeta, \quad \alpha\zeta, \quad \alpha^2\zeta, \quad \alpha^3\zeta, \ldots, \alpha^p\zeta, \quad \alpha^{p+1}\zeta,$$

in welcher $\alpha^{p+1} = 2$ ist. Ein jedes in der Tonleiter vorkommende Intervall erhält von den $(p + 1)$ Stufen, in welche die Oktave zerfällt, eine bestimmte, offenbar ganze Zahl. Das kleinste Intervall ist in den

Tonsystemen erster Klasse das zwischen dem großen und kleinen Halbton bestehende, wie oben nachgewiesen wurde. Nehmen wir an, dieses kleinste Intervall habe k solche Stufen, der kleine Halbton deren m, so hat der große Halbton deren $m + k$. Der ganze Ton besteht aus einem großen, und einem kleinen Halbtone, hat mithin $2m + k$ Stufen. Die Tonleiter zählt 5 ganze Töne und 2 große Halbtöne, hat also im ganzen $p + 1 = 12m + 7k$ Stufen.

Verschiedenen Werten von k und m entsprechen verschiedene geschlossene Tonsysteme, und zwar gibt die Voraussetzung $k = 0$ die erste Gattung derselben, nämlich Tonsysteme, die für

$$m = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots$$
$$(p + 1) = 12m = 12,\quad 24,\quad 36,\quad 48,\ldots$$

Stufen enthalten. Sie sind nicht voneinander verschieden, sondern fallen alle in das einzige, wohlbekannte 12stufige System zusammen, welches mithin allein für sich eine Gattung bildet.

Die zweite Gattung bekommt man für $k = 1$. Hier entsprechen den angenommenen Werten von m

$$m = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots$$
$$p + 1 = 12m + 7 \quad = 19,\quad 31,\quad 43,\quad 55,\quad 67,\ldots \text{ stufige}$$

Tonsysteme. Ihre Quintentemperaturen erhält man, wenn man der Reihe nach

$$Q_0 = Q_{19},\quad Q_{31},\quad Q_{43},\quad Q_{55},\quad Q_{67},\quad \ldots$$

das heißt $1 = 1.0824q^{19},\quad 1.0972q^{31},\quad 1.1122q^{43},\quad 1.1274q^{55},\quad 1.1427q^{67},\ldots$

setzt, was $q = 0.99584,\quad 0.997012,\quad 0.997530,\quad 0.997822,\quad 0.998009$.

ergibt.

Eine dritte Gattung erhält man für $k = 2$, was für die Werte von m

$$m = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots$$
$$p + 1 = 12(m + 1) + 2 \quad = 26,\quad 38,\quad 50,\quad 62,\quad 74,\ldots$$

Stufen zur Folge hat. Die entsprechenden Quintentemperaturen gewinnt man hier der Reihe nach, indem man

$$Q_0 = Q_{26},\quad Q_{38},\quad Q_{50},\quad \ldots,$$

das heißt $1 = 1.1559q^{26},\quad 1.1717q^{38},\quad 1.1877q^{50},\ldots$

setzt.

Hier kommen auch Tonsysteme vor, die wir als zur zweiten Gattung gehörend kennen gelernt haben. Jedes zweite der vorliegenden Reihe

ist ein solches: Das 38stufige ist mit dem 19stufigen der zweiten Gattung, das 62stufige mit dem 31stufigen usw. identisch, sodaß als wesentlich zur dritten Gattung gehörig nur die Tonsysteme mit 26, 50, 74 ... Stufen zu betrachten sind. Sie entsprechen den ungeraden Werten von m, daher man die eigentliche Formel für die Tonsysteme der dritten Gattung erhalten wird, wenn man $m = 2n + 1$ setzt, nämlich:

$$p + 1 = 24(n + 1) + 2.$$

Man könnte nun noch $k = 3, 4, 5, \ldots$ setzen und so eine 4te, 5te, 6te Gattung aufstellen. Allein die Stufenzahlen werden immer größer, die Werte von q immer ungünstiger, und man überzeugt sich bald, daß, was man in den 3 ersten Gattungen nicht findet, in den folgenden vergebens gesucht wird.

Das sind die allgemeinsten Eigenschaften der Tonsysteme erster Klasse. Um weitere kennen zu lernen, muß man sich in nähere Untersuchungen einlassen. Sie können daher erst später zur Sprache kommen.

Aus den Gleichungen (22) gehen alle die unendlich vielen Tonsysteme der ersten Klasse hervor, und ein jeder Musiker, der sich mit der Absicht trägt, ein neues aufzustellen, kann sich dasselbe nach Belieben wählen, und kann diese Wahl entweder nach wissenschaftlichen Grundsätzen treffen, oder nach richtigen oder unrichtigen vorgefaßten Meinungen, oder nach einer besonderen Vorliebe für irgend eine Konsonanz, oder nach anderen Beweggründen.

Um zu zeigen, wie dies zu geschehen hat, führen wir diejenigen Tonsysteme erster Klasse, die bisher bekannt geworden sind, zuerst vor, hiebei freilich von der unstatthaften doppelten Fiktion ausgehend, daß den Erfindern derselben die Gleichungen (22) vorgelegen seien, und daß sie das, was sie wirklich gefunden haben, mit allen seinen Eigenschaften auch haben finden wollen.

Nehmen wir an, der erste dieser fiktiven Tonsystem-Erfinder sei ein konsequenter Quintenpuritaner, der seine Meinung etwa auf folgende Weise formuliert: Die vollkommenste und edelste aller Konsonanzen ist unbestrittener Maßen die Oktave, sie ist auch die allerempfindlichste gegen Verfälschung, und hat infolge ihrer nahen Verwandtschaft mit dem Grundtone und ihrer außerordentlichen Empfindlichkeit das Vorrecht, untemperiert zu bleiben. Die Quinte ist aber von derselben direkten Abkunft; nach der Oktave die vollkommenste aller Konsonanzen übertrifft sie diese noch an Lieblichkeit und Macht der Wirkung in der Musik. Gegen Verfälschung ist sie ebenso empfindlich wie die Oktave. Das Reinheitsprivilegium darf daher nicht der Oktave allein gebühren, sondern muß auf die Quinte ausgedehnt werden. Da also

ein Tonsystem mit absolut reinen Quinten verlangt wird, ist $q = 1$ zu setzen und die Gleichungen (22) geben

$$(25)\qquad T = \frac{81}{80} = 1 + \frac{1}{80},\ t = \frac{80}{81} = 1 - \frac{1}{81}.$$

Die Temperatur der Septime kann entweder den Gleichungen (22) oder (23) entnommen werden; da letzteres hier das vorteilhaftere ist, so wird man

$$(26)\qquad s = \frac{64}{63} = 1 + \frac{1}{63}$$

erhalten. Dies ist das griechische Tonsystem des *Pythagoras*.

Hier mögen einige Bemerkungen zu diesem Beispiele angefügt sein, die zum richtigen Verständnis des behandelten Gegenstandes vielleicht mehr beizutragen geeignet sind, als das Beispiel selbst. Der Erfinder des griechischen Tonsystems ist ein fiktiver, d. h. die Griechen haben zwar ihr Tonsystem erfunden, waren mithin Quintenpuritaner, tatsächlich aber waren sie dies nicht aus Grundsatz, denn eine eigentliche Theorie kannten sie nicht, sonst hätten sie wohl einen ganz anderen Gebrauch davon gemacht. Es ist ein erheblicher Unterschied zwischen einem, von einer richtigen mathematischen Theorie geleiteten Erfinder und einem anderen, der dieses Hilfsmittel entbehrt. Der erste gleicht einem Manne, der mit der Formel als Quittung in der Hand zu einer Kasse geht und sich einen bestimmten durch die Formel festgestellten Betrag ausbezahlen läßt. Der andere dagegen einem Manne, der auf der Straße umherirrt in der Hoffnung, einen vollen Geldbeutel zu finden. Manchmal findet er wirklich einen solchen, manchmal etwas ganz anderes, oft gar nichts, und hat meistenteils auch im günstigsten Falle keinen Anhalt zur Beurteilung, ob er mit seinem Funde zufrieden zu sein Ursache habe, oder mehr zu suchen Veranlassung nehmen solle.

Die bisher bekannt gewordenen Tonsysteme sind meist auf dem Wege eines Versuches und nicht auf Grundlage einer umfassenden Theorie erfunden, gleichen also immerhin einem gefundenen Geldbeutel, bei dem man nicht fragen darf, warum der Erfinder nicht mehr gefunden oder warum er nicht lieber Gold gefunden habe statt Silber. Der Mathematiker hingegen muß seinen klaren Willen darlegen, er darf nicht etwas anderes wollen und etwas anderes erreichen. Eine wohlgeordnete mathematische Theorie der Tonsysteme darf sich daher keineswegs darauf beschränken, dem Leser nur einige, wenn auch sehr gute Tonsysteme mit lobender Kritik und Empfehlung vorzuführen. Sie muß vielmehr demselben alle möglichen, systematisch eingeteilt in Klassen und Gattungen, mit Angabe der allgemeinen und besonderen Eigenschaften vorlegen. Dies ist aber noch nicht genug. Sie hat den

Leser noch überdies in der zu treffenden Auswahl zu leiten, jedoch nicht dadurch, daß sie ihm eine bestimmte Ansicht aufzudringen sucht, sondern dadurch, daß sie ihn lehrt, seine eigene wie immer geartete Ansicht in die mathematische Sprache zu übertragen, und der Analysis dasjenige Tonsystem, welches dieser seiner Ansicht am vollkommensten entspricht, methodisch abzufragen und tabellarisch übersichtlich in der ganzen Ausdehnung der musikalischen Praxis berechnet vorzulegen. Das einfachste Mittel zu diesem Zwecke schien die Vorführung fiktiver Tonliebhaber mit den verschiedenartigsten Ansichten zu sein, die man diese ihre Ansichten genau formulieren, und teilweise der Klarheit wegen auch begründen läßt, und denen man dann mit Hilfe geregelter mathematischer Methoden die angestrebten Zwecke erreichen und die besonderen Ansichten verwirklichen hilft. Selbstverständlich werden niemand, und wäre es auch der Erfinder eines Tonsystems selbst, derlei An- oder Absichten zugemutet. Am allerwenigsten bekennt sich aber die Theorie zu irgend einer derselben. Diese hat vielmehr und vertritt keine besondere Ansicht, sondern betrachtet alle vollständig aufgezählten Tonsysteme als ebenbürtige und gleichberechtigte Auflösungen eines und desselben mathematischen Problems.

Die zweite Bemerkung ist: Die Tonsysteme *erster Klasse* vertragen sich mit den reinen Quinten nicht, indem sie dieselben nur um den Preis sehr falscher Terzen und Septimen erkaufen lassen. Viel besser befreunden sie sich mit reinen Terzen und Septimen, wie in der Folge dieser Untersuchung erhellen soll. Liebhaber reiner Quinten sind daher genötigt, ihre Zuflucht zu den Tonsystemen der zweiten Klasse zu nehmen, wo sie wirklich erhalten, was sie wünschen.

Führen wir uns jetzt einen zweiten fiktiven Tonliebhaber vor, der seine Wünsche folgendermaßen in Worte kleidet: Ich erkenne den hohen Wert reiner Oktaven und Quinten an, aber ich kann doch billig verlangen, daß man damit auch praktische Musik machen könne, und zwar mit bescheidenen Tonmitteln. Hiezu braucht man aber bei einer mäßigen Anzahl von Tönen eine genügende Auswahl von Tonleitern, die wieder am besten in einem geschlossenen, in sich zurückkehrenden Tonsysteme zu haben sind. Ich wünsche also ein solches, auch wenn es mit einem kleinen Opfer an Reinheit der Quinten erkauft werden müßte. Diesem Begehren wird durch das gegenwärtig im Gebrauche stehende 12stufige, chromatische Tonsystem Genüge geleistet, welches wir im Vorhergehenden bereits sattsam kennen gelernt haben. Die Temperaturen der konsonanten Intervalle in demselben sind:

$$(27) \qquad q = 1 - \frac{1}{887}, \; T = 1 + \frac{1}{126}, \; t = 1 - \frac{1}{111}, \; s = 1 + \frac{1}{55}.$$

Der Vergleich dieser Zahlen mit denen des Pythagoräischen Tonsystems lehrt, daß man durch ein sehr geringes Opfer von $\frac{1}{887}$ der Schwingungszahl, gebracht an der Reinheit der Quinte, eine sehr merkliche Aufbesserung um beiläufig den 3fachen Betrag bei den beiden Terzen erzielt hat. Die Septime hat sich aber verschlimmert in einem Maße, daß man genötigt ist anzunehmen, die reine Septime sei im chromatischen Systeme durch gar keinen Ton vertreten.

Gehen wir jetzt von den Verehrern reiner Quinten zur Voraussetzung eines Tonforschers über, der ein anderes Intervall, etwa die kleine Terz in besonderen Schutz nimmt, also ein Tonsystem zu haben wünscht, in welchem $t = 1$ ist; mithin ist vermöge der Gleichung (24) $q = T$, und infolge der zweiten der Gleichungen (22):

$$(28) \qquad 1 = \frac{80}{81 \cdot q^3}, \quad \text{also } q = \sqrt[3]{\frac{80}{81}} = \frac{4 \cdot 30887}{4 \cdot 32675} = 1 - \frac{1}{242} = T.$$

Diese Zahl belehrt uns, daß man die reine kleine Terz nicht umsonst erhalte, sondern mit einem namhaften Opfer an Reinheit der Quinte bezahlen müsse. Aber auch alle übrigen Eigenschaften eines Tonsystems sind nur um den Preis zu haben, z. B. das geschlossene Rückkehren in sich selbst. Und wenn man das in Rede stehende Tonsystem in ein geschlossenes umschaffen will, muß man so fragen: Wie viel muß man von der absoluten Reinheit der kleinen Terz ablassen, um dafür ein geschlossenes Tonsystem zu erhalten?

Die Antwort auf diese Frage erstreben wir so: Ein geschlossenes m-stufiges Tonsystem ist vorhanden, wenn man in der Quintenreihe einen Ton Q_m entdecken kann, der für irgend ein q dem Grundtone Q_0 gleich wird.

Setzen wir also $Q_0 = Q_m$, das heißt:

$$\zeta = \frac{3^m}{2^\alpha} q^m \zeta, \text{ und untersuchen, ob dieser Gleichung nicht}$$

für den obigen Wert von q oder einen sehr wenig davon verschiedenen und für irgend welche ganzzahligen Werte von m und α Genüge zu leisten wäre. Die Gleichung schreiben wir in folgender Gestalt:

$$(29) \qquad \frac{3^m}{2^m} q^m = 2^{\alpha - m} = 2^x, \text{ wo } \alpha - m = x \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

$$(30) \qquad q = \frac{1}{3} 2^{\frac{\alpha}{m}} = \frac{1}{3} 2^{\frac{m+x}{m}} = \frac{2}{3} 2^{\frac{x}{m}} \text{ und}$$

$$(31) \qquad \frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1.$$

Die letztere dieser beiden Gleichungen suchen wir nun annäherungsweise aufzulösen in ganzen Zahlen für x und m; wir setzen zu diesem Behufe anstatt q den durch die Gleichung (28) gegebenen Wert und entwickeln sodann den zweiten Teil der Gleichung (31) in einen Kettenbruch. Der demselben am nächsten kommende Näherungsbruch kann dann für $\frac{x}{m}$ genommen werden. Es wird so:

$$\frac{x}{m} = \frac{4\,753\,229}{8\,010\,800} - 1$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{2351}{159\,308}}}}}}.$$

Der zum letzten Nenner 2 hinzugefügte negative Ergänzungsbruch ist so klein, daß er vernachlässigt werden kann. Man bekommt also einen sehr genauen Näherungsbruch:

$$\frac{x}{m} = \frac{11}{19}, \tag{32}$$

aus welchem zu schließen ist, daß es wirklich ein geschlossenes 19stufiges Tonsystem in der nächsten Nähe desjenigen mit absolut reinen kleinen Terzen gebe.

Seine Quintentemperatur entspricht aber nicht der Gleichung (28), sondern muß aus der Gleichung (30) für $\frac{x}{m} = \frac{11}{19}$ neu berechnet werden:

$$\log q = -0 \cdot 0018\,108$$
$$q = 0 \cdot 99\,584 = 1 - \frac{1}{240} = \frac{239}{240}.$$

Mit Hilfe dieser Werte des q und seines Logarithmus schreitet man zur neuen Berechnung von T, t und s aus den Formeln (22) und erhält

$$T = 0 \cdot 995\,753 = 1 - \frac{1}{235} = \frac{234}{235}$$

$$t = 1 \cdot 0000865 = 1 + \frac{1}{11\,560} = \frac{11\,561}{11\,560}$$

$$s = 0 \cdot 98\,768 = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}.$$

Das geschlossene 19stufige Tonsystem hätten wir also ziemlich billig erhalten, gegen ein Opfer von $\frac{1}{11\,560}$ der Schwingungszahl der kleinen Terz. Die Töne folgen in diesem Systeme einer geometrischen Progression, deren Quotient $\sqrt[19]{2} = 1 \cdot 037\,155$ ist.

Sie sind:

$$
(33) \qquad
\begin{array}{llll}
Q_0 & = C & = \zeta & = \zeta \\
Q_7 & = Cis = & 1\cdot 0372\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2} \\
Q_{-5} & = Des = & 1\cdot 07\,569\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^2} \\
Q_2 & = D = & 1\cdot 11\,566\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^3} \\
Q_9 & = Dis = & 1\cdot 15\,711\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^4} \\
Q_{-3} & = Es = & 1\cdot 20\,010\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^5} \\
Q_4 & = E = & 1\cdot 24\,459\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^6} \\
Q_{11} & = Eis = & 1\cdot 29\,094\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^7} = Fes \\
Q_{-1} & = F = & 1\cdot 33\,881\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^8} \\
Q_6 & = Fis = & 1\cdot 38\,851\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^9} \\
Q_{-6} & = Ges = & 1\cdot 44\,024\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{10}} \\
Q_1 & = G = & 1\cdot 49\,376\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{11}} \\
Q_8 & = Gis = & 1\cdot 54\,926\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{12}} \\
Q_{-4} & = As = & 1\cdot 60\,682\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{13}} \\
Q_3 & = A = & 1\cdot 66\,652\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{14}} \\
Q_{10} & = Ais = & 1\cdot 72\,844\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{15}} \\
Q_{-2} & = B = & 1\cdot 79\,266\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{16}} \\
Q_5 & = H = & 1\cdot 85\,927\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{17}} \\
Q_{-7} & = Ces = & 1\cdot 92\,835\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{18}} = His \\
Q_0 & = C & = 2\,\zeta & = \zeta \sqrt[19]{2^{19}}.
\end{array}
$$

Dieses ist das Tonsystem *Opelts.* Es besitzt sehr schätzbare Eigenschaften, die es in der Tat empfehlen. Zwar ist die Reinheit der Intervalle eine mäßige. Allein schon der Umstand, daß ein so intelligenter und erfahrener Musiker und Akustiker wie Opelt sein Tonsystem dem musikalischen Publikum empfehlen konnte, beweist zur Genüge, daß $\frac{239}{240}$ wenigstens für die große Mehrzahl musikalischer Instrumente eine sehr gut zulässige Temperatur der Quinte sei.

Es scheint übrigens gerade die rechte Anzahl von Tönen zu besitzen, weder zu wenig, noch zu viel, sondern für das Bedürfnis der Musik gerade genug. Den Beweis hiefür scheint die Erfahrung zu geben, nach der Violinspieler unter anderen wirklich 19 Töne kennen, und die musikalische Notenschrift auch Zeichen für 19 Töne besitzt.

Aus ihnen werden 19 Dur- und eben so viele Moll-Tonarten und Leitern gebildet, was mehr als genug ist. Die Tonintervalle in der reinen Tonleiter vermag das *Opelt*sche System treuer wieder zu geben, als das chromatische, weil es bereits einen Unterschied macht zwischen großen und kleinen Halbtönen. Der große besteht aus zwei, der kleine aus einer Tonstufe, der ganze Ton hat drei Stufen. Mithin geben die 5 ganzen und 2 großen Halbtöne der Skala gerade 19 Tonstufen des Systems. Diese Halbtöne sind nun wohl nicht ganz die der reinen Skala, wo dem kleinen Halbton das Schwingungsverhältnis $\frac{25}{24} = 1 \cdot 0416$, dem großen das $\frac{16}{15} = 1 \cdot 0666$ entspricht, während *Opelt* hiefür die Zahlen: $1 \cdot 0372$ und $1 \cdot 0756$ hat. Es kommen diese Zahlen aber doch den reinen Verhältnissen näher, als der gemeinsame Repräsentant beider Halbtöne im 12 stufigen Systeme, nämlich: $1 \cdot 0595$.

Diese Beispiele bereits *bekannt gewordener* Tonsysteme mögen genügen. Wir wenden uns nun zu solchen Systemen der ersten Klasse, die auf Grundlage dieser Theorie aufgebaut bisher *noch nicht bekannt* geworden sind, und lassen deshalb noch einen hypothetischen Musikliebhaber auftreten, der folgende Betrachtung anstellt: Wer irgend etwas, also auch ein Tonsystem haben will, muß sich vor allem anderen die Frage stellen, was kann ich vernünftiger Weise wollen und auch erhalten? Hiezu gehört aber die volle und genaue Kenntnis aller Eigentümlichkeiten der gewünschten Sache, mit denen man sich also zu befreunden hat. Die hier am meisten in Betracht zu nehmende Eigentümlichkeit eines Tonsystems ist der innige Zusammenhang aller seiner Eigenschaften, infolgedessen man keine von ihnen antasten kann, ohne alle übrigen mehr oder weniger zu verletzen. Deswegen erhält man hier auch nichts umsonst; alles muß mehr oder weniger teuer bezahlt werden, am aller kostspieligsten aber ist die absolute Reinheit irgend eines Intervalles. Die absolut reine Quinte z. B. muß mit heulenden Terzen und Septimen bezahlt werden. Wer absolut reine kleine Terzen haben will, muß dafür die übrigen Intervalle bis zum äußersten temperieren, beinahe übertemperieren. Dies kommt unstreitig daher, daß reine Intervalle mit dem Urbegriffe eines Tonsystems im direktesten Widerspruche stehen. Aber auch andere geschätzte Eigenschaften eines Tonsystems müssen um diesen Preis der Reinheit im allgemeinen erkauft werden, z. B. das geschlossene Rückkehren in sich selbst. Man hat also jederzeit sorgfältig dasjenige, was man an guten Eigenschaften erreichen will, gegen das, was man aufopfern muß, in die Wagschale zu legen, und acht zu geben, daß man bei dem Handel nicht zu kurz komme. Dazu jedoch ist es unerläßlich, daß man diese

guten Eigenschaften nicht nur kenne, sondern auch ihrem relativen Werte nach richtig zu schätzen wisse. Sie sind:

1. Die Reinheit der Intervalle.
2. Ökonomie, das heißt mäßige Anzahl der zum Musizieren benötigten Töne.
3. Genügende Menge und Auswahl an Dur- und Moll-Tonarten.
4. Geschlossenes Rückkehren in sich selbst samt dem hiemit in Verbindung stehenden Fortschreiten der Töne in geometrischer Progression.
5. Anschluß an denjenigen Teil der gegenwärtig in Übung stehenden Gesetze der Tonkunst, der dem Fortschritte derselben in der Zukunft nicht hinderlich ist.
6. Auch das musikalische Instrument ist in Betracht zu ziehen, und das Tonsystem soll womöglich dem Baue und sonstigen Eigentümlichkeiten desselben nicht widerstreben.

Um über den relativen Wert dieser Eigenschaften zu richtigeren Begriffen zu gelangen, nehmen wir sie der Reihe nach vor und ergehen uns über dieselben in folgenden Betrachtungen.

Die Reinheit der Intervalle anlangend ist schon bemerkt worden, daß sie teuer zu stehen kommt, und es kann auch noch hinzugefügt werden, daß sie, über eine Grenze hinaus getrieben, wertlos ist. Denn es gibt für jedes konsonante Intervall eine Verfälschung, die so klein ist, daß sie von einem musikalisch gebildeten Durchschnittsgehör unter Umständen, unter welchen man Musik zu machen pflegt, eben noch nicht bemerkt werden kann, aber doch so groß ist, daß eine geringe Steigerung sie schon bemerklich machen würde.

Diese Verfälschung heiße die *virtuelle Verfälschung* des entsprechenden Intervalls und die ihm entsprechende Temperatur *die virtuelle Temperatur*.

Über die Grenze dieser virtuellen Temperatur hinaus ist jede Steigerung der Reinheit des Tones nur von sehr geringem Werte, denn sie kann nur durch künstliche Mittel bei der Stimmung der Instrumente hervorgebracht werden, und ist, wenn zustande gebracht, gar nicht wahrzunehmen, außer eben mit diesen Hilfsmitteln, z. B. Stimmgabelapparaten. Man kann aber doch nicht mit einem ganzen Stimmgabelkabinett ins Konzert gehen, und könnte man es, so würde es im Sturme schnell verbrausender Töne doch nichts nützen. Es gibt also eine für die praktische Musik nicht nur unerreichbare, sondern auch überflüssige Tonreinheit, die aber für den, mit dem Aufbau eines Tonsystems beschäftigten Theoretiker einen großen Wert hat, weil sie einzig und allein das Kapital bildet, durch dessen Aufopferung die heulenden

Wölfe beseitigt und alle schätzbaren Eigenschaften dieses seines Tonsystems erkauft werden.

Die Reinheit der konsonanten Intervalle hat also allerdings in einem Tonsysteme einen hohen Wert, aber nur bis zur Grenze der virtuellen Temperatur. Innerhalb dieser Grenzen hingegen ist eine weitere Annäherung an die absolute Reinheit nicht nur nutzlos, sondern in den meisten Fällen sogar ein Fehler, es sei denn, daß der Erfinder imstande wäre zu beweisen, daß durch Aufopferung dieser überflüssigen Reinheit kein namhafterer Vorteil zu erreichen gewesen wäre. Es folgt hieraus, daß der nach einem neuen Tonsystem strebende Erfinder folgende zwei Dinge kennen sollte:

a) Die virtuelle Temperatur der (konsonanten) Intervalle: Quinte, große und kleine Terz und Septime;

b) Eine analytische Methode, die Temperaturen (22) dieser Intervalle in die Grenzen der virtuellen Temperaturen einzuschließen.

2. Rücksichtlich der zweiten Eigenschaft eines Tonsystems, nämlich Ökonomie der Töne, ist bereits im II. Abschnitte die Bemerkung gemacht worden, daß man die Sparsamkeit mit denselben auch zu weit treiben könne, daß sie im chromatischen Tonsysteme wirklich zu weit getrieben scheine, und es kann noch hinzugefügt werden, daß nach den bisherigen Erfahrungen die Zahl 19 das Minimum der zu einer guten Musik notwendigen Töne zu enthalten scheine.

Es kann indessen hier nicht unerwähnt bleiben, daß bei gewissen musikalischen Instrumenten z. B. Orgeln, Harmoniums, Klavieren, die ohnehin Hunderte von Saiten, Pfeifen, Federn und dergl. enthalten, jede Rücksicht auf Ökonomie beinahe lächerlich erscheint. Bei solchen ist daher eher Sorge zu tragen, daß sie ungeachtet ihres großen Reichtums an Tonmitteln nicht dennoch an Tonmangel leiden.

3. Hinsichtlich der notwendigen Anzahl der Moll- und Dur-Tonarten kann bemerkt werden, daß 12 solche, wie im chromatischen Systeme, vollkommen hinreichen, daß es aber nicht allein auf die Anzahl ankommt, sondern auch auf die Verbindung dieser Tonarten unter sich. Man sollte nämlich wenigstens zur Mehrzahl derselben, wenn nicht zu allen, auch die zunächst verwandten Dur- und Moll-Tonarten besitzen.

4. Der Übergang von einem unendlichen zu einem geschlossenen Tonsysteme ist einer Ersparnis von 7 bis 9 Tönen gleich zu achten; dies gilt jedoch nur in der ersten Klasse dieser Systeme und unter der Voraussetzung, daß man alle Töne des geschlossenen Systems auch wirklich benutzt. Sind ihrer so viele, daß man nicht alle brauchen kann, sondern eine Gruppe derselben von der wirklichen Verwendung

ausscheiden muß, dann sind alle Vorteile des Geschlossenseins aufgehoben bis auf den der Äquidistanz der Bestandtöne, der aber an und für sich schon groß genug ist, um für ein geschlossenes, selbst vielstufiges System sogar ein Opfer zu rechtfertigen.

Die Kenntnis der virtuellen Temperatur der Quinte, großen und kleinen Terz und der Septime ist wohl eine wichtige; sie geht aber den Musiker und Akustiker an, der Rechner kann sie bei der Aufstellung der Theorie der Tonsysteme als gegeben ansehen. Diese virtuellen Temperaturen seien also q', T', t' und s', so sind die virtuellen d. h. größten zulässigen Verfälschungen dieser Intervalle

$$q' - 1, \quad T' - 1, \quad t' - 1, \quad s' - 1.$$

Die reziproken Werte derselben aber können als die *Gewichtszahlen einer Verfälschung* (spezifische Empfindlichkeit) der Quinte, großen und kleinen Terz und der Septime angesehen werden, wenn man auf das Zeichen keine Rücksicht nimmt und nur den numerischen Wert beachtet. Diese Gewichte mögen beziehentlich:

$$\mathfrak{q}, \quad \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{s}$$

heißen; so hat man:

$$(34) \qquad \mathfrak{q} = \frac{1}{(q' - 1)}, \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{(T' - 1)}, \quad \mathfrak{t} = \frac{1}{(t' - 1)}, \quad \mathfrak{s} = \frac{1}{(s' - 1)}.$$

Jetzt ist noch eine Methode vonnöten, die Abweichungen von der Reinheit der konsonanten Intervalle untereinander auszugleichen und womöglich in die Grenzen der virtuellen Temperatur zurückzuziehen. Die Wissenschaft besitzt eine verläßliche Methode dieser Art, nämlich: Die Methode der kleinsten Quadratsummen. Sie wird in der Physik und Astronomie zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler verwendet, und, nach dem von *Gauß* entdeckten Prinzip des kleinsten Zwanges, beherrscht sie auch die ganze Körperwelt.

Zwar ist ihre Verwendbarkeit an die Bedingung geknüpft, daß positive und negative Fehler von gleicher Größe auch gleich wahrscheinlich seien, was auf das Gebiet der Töne übertragen vielleicht nicht mit aller Strenge richtig ist, indem gewisse Intervalle für positive und negative Verfälschungen ungleiche Empfindlichkeit offenbaren dürften. Allein es handelt sich hier zunächst nur darum, die Temperaturen dieser Intervalle in die Grenzen der virtuellen Temperaturen einzuschließen, und hiezu ist die Methode der kleinsten Quadratsummen ganz geeignet.

Macht man davon Gebrauch, so ist das Tonsystem zu suchen, für welches die Summe der Quadrate aller Aufopferungen an Reinheit oder,

was dasselbe ist, aller mit ihren Gewichten multiplizierten Verfälschungen ein Minimum ist.

Bei allen Tonsystemen der 1ten Klasse hängen die Temperaturen q, T, t, s, durch die Gleichungen (22) zusammen; die Verfälschungen sind mithin:

$$q-1, \quad T-1, \quad t-1, \quad s-1.$$

Mit ihren Gewichtszahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$ multipliziert, geben sie folgende Werte der Abweichungen von der Reinheit

$$\mathfrak{q}(q-1), \quad \mathfrak{T}(T-1), \quad \mathfrak{t}(t-1), \quad \mathfrak{s}(s-1).$$

Die Summe ihrer Quadrate sei $\sum$, so daß

$$\sum = \mathfrak{q}^2(q-1)^2 + \mathfrak{T}^2(T-1)^2 + \mathfrak{t}^2(t-1)^2 + \mathfrak{s}^2(s-1)^2 \tag{35}$$

besteht. Nun ist die Quadratsumme $\sum$ zu einem Minimum zu machen.

Da sie vermöge der Gleichungen (22) betrachtet werden kann als Funktion der Temperatur q der Quinte, so erhält man durch Differenzieren die Bedingungsgleichung des Minimums:

$$\mathfrak{q}^2(q-1) + \mathfrak{T}^2(T-1)\frac{dT}{dq} + \mathfrak{t}^2(t-1)\frac{dt}{dq} + \mathfrak{s}^2(s-1)\frac{ds}{dq} = 0.$$

Nun ist aber aus der Gleichung (22):

$$\frac{dT}{dq} = \frac{3^4}{4\cdot 5}q^3, \quad \frac{dt}{dq} = -\frac{2^4\cdot 5}{3^3 q^4}, \quad \frac{ds}{dq} = \frac{3^{10}\cdot 5}{2^{12}\cdot 7}q^9.$$

Führt man diese Werte und jene für T, t, s aus (22) ein in die vorliegende Gleichung, so ergibt sich zur Bestimmung von q:

$$\mathfrak{q}^2(q-1) + \frac{3^4}{2^2\cdot 5}\mathfrak{T}^2 q^3\left(\frac{3^4}{2^4\cdot 5}q^4 - 1\right) - \frac{2^4\cdot 5}{3^3}\frac{\mathfrak{t}^2}{q^4}\left(\frac{2^4\cdot 5}{3^4\cdot q^3} - 1\right)$$
$$+ \frac{3^{10}\cdot 5}{2^{12}\cdot 7}\mathfrak{s}^2 q^9\left(\frac{3^{10}}{2^{13}\cdot 7}q^{10} - 1\right) = 0.$$

Geordnet ist sie eine algebraische Gleichung vom 26ten Grade, nämlich:

$$\mathfrak{s}^2 q^{26} - \frac{2^{13}\cdot 7}{3^{10}}\mathfrak{s}^2 q^{16} + \frac{2^{19}\cdot 7^2}{3^{13}\cdot 5^3}\mathfrak{T}^2 q^{14} - \frac{2^{23}\cdot 7^2}{3^{16}\cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 q^{10} + \frac{2^{25}\cdot 7^2}{3^{20}\cdot 5}\mathfrak{q}^2 q^8 - \frac{2^{25}\cdot 7^2}{3^{20}\cdot 5}\mathfrak{q}^2 q^7$$
$$+ \frac{2^{29}\cdot 7^2}{3^{23}}\mathfrak{t}^2 q^3 - \frac{2^{33}\cdot 5\cdot 7^2}{3^{27}}\mathfrak{t}^2 = 0,$$

die wohl allen Versuchen, sie allgemein aufzulösen, widerstehen würde. Man braucht aber hier auch nur eine einzige, nahe unter der Einheit liegende Wurzel, die man mit Leichtigkeit erhält, wenn man die Beschaffenheit des q berücksichtigt.

Dies kann nach Belieben entweder in der vorliegenden Gleichung geschehen, oder auch in der Gleichung (35), und zwar auf folgende Weise. Es sei

$$q = 1 - \varkappa, \tag{36}$$

so bedeutet $\varkappa$ einen sehr kleinen positiven Bruch; ebenso nehme man an

$$T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma,$$

unter θ, τ, σ ebenfalls sehr kleine Brüche verstanden. Die Gleichungen (22) und (35) gehen durch Einführung dieser sehr kleinen Größen, deren höhere Potenzen außer acht zu lassen sind, über in

$$\theta = T - 1 = \frac{1}{2^4 \cdot 5}[1 - 2^2 \cdot 3^4 \varkappa], \quad \tau = t - 1 = -\frac{1}{3^4}[1 - 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \varkappa],$$

$$\sigma = \frac{5}{2^{18} \cdot 7}[11 \cdot 31 - 2 \cdot 3^{10} \varkappa],$$

$$(37) \begin{cases} \sum = \mathfrak{q}^2 \varkappa^2 + \mathfrak{T}^2 \theta^2 + \tau^2 + \mathfrak{s}^2 \sigma^2 = \mathfrak{q}^2 \varkappa^2 + \frac{\mathfrak{T}^2}{2^8 \cdot 5^2}[1 - 2^2 \cdot 3^4 \varkappa]^2 \\ \quad + \frac{\mathfrak{t}^2}{3^8}[1 - 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \varkappa]^2 + \frac{5^2 \cdot \mathfrak{s}^2}{2^{36} \cdot 7^2}[11 \cdot 31 - 2 \cdot 3^{10} \varkappa]^2. \end{cases}$$

Setzt man jetzt $\frac{d\Sigma}{d\varkappa} = 0$, so ergibt sich zur Bestimmung von $\varkappa$ folgende Gleichung des ersten Grades:

$$\varkappa\left[\mathfrak{q}^2 + \frac{3^8}{2^4 \cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 + \frac{2^8 \cdot 5^2}{3^6}\mathfrak{t}^2 + \frac{3^{20} \cdot 5^2}{2^{24} \cdot 7^2}\mathfrak{s}^2\right] = \frac{3^4}{2^6 \cdot 5^2}\mathfrak{T}^2 + \frac{2^4 \cdot 5}{3^7}\mathfrak{t}^2 + \frac{3^{10} \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 31}{2^{25} \cdot 7^2}\mathfrak{s}^2,$$

aus welcher der folgende Wert $\varkappa$, als Minimum der Verfälschung der Quinte, gewonnen wird:

$$\varkappa = \frac{0{\cdot}050625\,\mathfrak{T}^2 + 0{\cdot}0365798\,\mathfrak{t}^2 + 0{\cdot}306169\,\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{q}^2 + 16{\cdot}4025\,\mathfrak{T}^2 + 8{\cdot}7791495\,\mathfrak{t}^2 + 106{\cdot}03497226\,\mathfrak{s}^2} \tag{38}$$

oder auch

$$\varkappa = \frac{2^{19} \cdot 3^{11} \cdot 7^2 \mathfrak{T}^2 + 2^{29} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \mathfrak{t}^2 + 3^{17} \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 31 \cdot \mathfrak{s}^2}{2^{25} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3^7 \mathfrak{q}^2 + 2^{21} \cdot 3^{15} \cdot 7^2 \mathfrak{T}^2 + 2^{33} \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \mathfrak{t}^2 + 2 \cdot 3^{27} \cdot 5^4 \cdot \mathfrak{s}^2}$$

$$= \frac{4550926270464\,\mathfrak{T}^2 + 3288334336000\,\mathfrak{t}^2 + 27522997239375\,\mathfrak{s}^2}{89894839910400\,\mathfrak{q}^2 + 1474500111630336\,\mathfrak{T}^2 + 789200240640000\,\mathfrak{t}^2 + 9531996856238750\,\mathfrak{s}^2}.$$

Dieser Ausdruck ist in hohem Grade lehrreich, denn man gewinnt aus ihm eine sehr vollständige Übersicht über die Temperaturverhältnisse aller Tonsysteme der ersten Klasse, selbst derjenigen, die den extremsten Anforderungen der absoluten Reinheit oder auch der gänzlichen Vernachlässigung jedes beliebigen Intervalles entsprechen; dies gestattet die bisher durch nichts beschränkte Willkürlichkeit der Gewichtsfaktoren $\mathfrak{q}^2$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{s}^2$.

Will man nämlich irgend eine der Konsonanzen besonders bevorzugen, also ganz rein haben, so setzt man die derselben entsprechende

Gewichtszahl unendlich; will man sie hingegen ganz vernachlässigen, so setzt man diese Gewichtszahl gleich Null.

Tun wir zuvörderst das erstere, so ergibt sich

$$(39) \quad \begin{aligned} \mathfrak{q} &= \infty, \quad \varkappa = \frac{0}{1} = 0, \\ \mathfrak{T} &= \infty, \quad \varkappa = \frac{0.050625}{16.4025} = \frac{1}{324}, \\ \mathfrak{t} &= \infty, \quad \varkappa = \frac{0.0365798}{8.7791495} = \frac{1}{240}, \\ \mathfrak{s} &= \infty, \quad \varkappa = \frac{0.306169}{106.035} = \frac{1}{346}. \end{aligned}$$

Diese Formeln dienen vor allem anderen dazu, das Maß der Genauigkeit der Gleichung (38), aus welcher sie hervorgehen und die selbstverständlich nur eine angenäherte sein kann, weil bei ihrer Ableitung die höheren Potenzen von $\varkappa$ weggeworfen wurden, zu beurteilen. Denn die der absoluten Reinheit der Quinte, großen und kleinen Terz und Septime entsprechenden Werte der Verfälschung $\varkappa$ lassen sich auch aus den Urgleichungen der Tonsysteme erster Klasse (22), und zwar mit beliebiger Genauigkeit, dadurch ableiten, daß man der Reihe nach erst q, dann T, dann t und endlich s der Einheit gleich setzt.

Dies gibt aber:

$$(40) \quad \begin{aligned} & q = 1, && \varkappa = 1 - q = 0, \\ \text{Für } T = 1: \quad & q = \sqrt[4]{\frac{80}{81}} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{5} = 0.996899, && \varkappa = \frac{1}{322}, \\ \text{„} \quad t = 1: \quad & q = \sqrt[3]{\frac{80}{81}} = 0.995868, && \varkappa = \frac{1}{242}, \\ \text{„} \quad s = 1: \quad & q = \sqrt[10]{\frac{2^{13} \cdot 7}{3^{10}}} = \frac{2}{3}\sqrt[10]{56} = 0.9970742, && \varkappa = \frac{1}{342}. \end{aligned}$$

Die geringe Verschiedenheit dieser genaueren Werte von $\varkappa$ von den durch die Gleichungen (39) gegebenen dient als Beweis, daß die Formel (38) genügend genau und verläßlich ist.

Die in Bruchform erscheinenden Werte von $\varkappa$ in den Gleichungen (39) ändern sich nicht, wenn man Zähler und Nenner des ersten dieser Brüche mit $\mathfrak{q}^2$, ebenso Zähler und Nenner des zweiten mit $\mathfrak{T}^2$, des dritten mit $\mathfrak{t}^2$, des vierten mit $\mathfrak{s}^2$ multipliziert.

Ferner weiß man, daß, wenn man aus mehreren solchen Brüchen, deren Zähler und Nenner positiv sind, einen neuen Bruch bildet, dessen Zähler die Summe aller Zähler, dessen Nenner die Summe aller Nenner ist, dieser Bruch ein Mittelwert ist zwischen den Brüchen, aus welchen

er auf die angegebene Weise entstanden ist, nämlich größer als der kleinste und kleiner als der größte von ihnen. Dieser Bruch ist aber genau das $\varkappa$ der Formel (38). Es ist mithin für alle möglichen Werte von $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ von 0 bis ∞:

$$\varkappa \gtreqless 0 \quad \text{und zugleich} \quad \varkappa \lesseqgtr \frac{1}{240}.$$

Nun hat man aber $\varkappa = 0$ für das griechische Tonsystem des Pythagoras, mit welchem das chromatische dem mathematischen Ursprunge nach identisch ist. Es ist nämlich das System der reinen Quinten, modifiziert durch die Forderung des geschlossenen Rückkehrens in sich selbst. Ebenso ist $\varkappa = \frac{1}{240}$ nahezu das System Opelts, also das System der reinen kleinen Terzen, modifiziert durch die Forderung der geschlossenen Rückkehr in sich selbst. Diese beiden Systeme stehen daher an den äußersten Grenzen der ganzen Reihe von Tonsystemen erster Klasse, das chromatische mit den am wenigsten, das Opeltsche mit den am meisten temperierten Quinten.

Die Folgerungen aus der Formel (38) sind noch nicht erschöpft. Fassen wir nämlich die daraus abgeleiteten Werte (39) näher ins Auge, so gewahren wir, daß durch beinahe eine und dieselbe Verfälschung der Quinte die große Terz und die Septime absolut rein gemacht werden können, erstere durch $\varkappa = \frac{1}{322}$, letztere durch $\varkappa = \frac{1}{342}$.

Es besteht also zwischen der schönen, heiteren Großterz und der sanften Septime ein besonders inniges Verhältnis, infolgedessen beide zugleich der größeren Reinheit teilhaftig werden und sich auch beide zugleich in heulende Wölfe verwandeln. Diese Umänderung geschieht aber bei der Septime viel rascher als bei der Terz, wovon man sich am besten überzeugt, wenn man die erste und dritte der Gleichungen (22) differenziert, wodurch man erhält:

$$dT = \frac{4.81}{80} q^{8} dq, \quad ds = \frac{10.59049}{57344} q^{9} dq.$$

Da q immer nahe der Einheit und unter derselben ist, so hat man annäherungsweise:

$$dT = 4dq, \quad ds = 10dq,$$

d. h. die Temperatur der Terz ändert sich viermal und die der Septime gar zehnmal so rasch als die Temperatur der Quinte. Wenn sich daher die Verfälschung $\varkappa$ der Quinte nur sehr wenig, z. B. um $\frac{1}{1000}$ von dem Werte $\varkappa = \frac{1}{342}$, für welchen die Septime rein ist, entfernt, so steht diese letztere bereits in der Entfernung $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ von der Reinheit, ist also schon namhaft falsch.

In dieser Übereinstimmung der großen Terz mit der Septime scheint ein Vorteil zu liegen, der darin besteht, daß man, wenn man ein Tonsystem mit reinen Terzen konstruiert, auch beinahe reine Septimen umsonst mit in den Kauf erhält und umgekehrt. Dies ist aber geeignet, die Aufmerksamkeit auf zwei neue Tonsysteme zu lenken, das mit reinen Terzen und das mit reinen Septimen. Ihre aus den Gleichungen (22) für $T = 1$ und $s = 1$ berechneten Temperaturen sind beziehentlich:

$$(41)\quad \begin{aligned} q &= 1 - \frac{1}{322} = \frac{321}{322}, \quad T = 1, \quad t = 1 - \frac{1}{322} = \frac{321}{322}, \quad s = 1 - \frac{1}{570} = \frac{569}{570}, \\ q &= 1 - \frac{1}{342} = \frac{341}{342}, \quad T = 1 + \frac{1}{1422}, \quad t = 1 - \frac{1}{276}, \quad s = 1. \end{aligned}$$

Die Logarithmen der q sind beziehentlich:

$$\log q = -0.0013488,$$
$$\log q = -0.0012725.$$

Diese Zahlen sehen den Rechner viel freundlicher an als die im chromatischen und die im Opeltschen Systeme, und es ist beinahe merkwürdig, daß unter allen Puritanern derjenige, welcher die unbeachtete, aus der modernen Tonkunst ausgestoßene reine Septime in besonderen Schutz nimmt, das beste Tonsystem bekommt, wenn er nur nach Zahlen urteilt.

Um eine möglichst vollständige Übersicht über alle Tonsysteme der ersten Klasse zu gewinnen, ist es aber notwendig, auch die jedenfalls berechtigtere Meinung, daß die sämtlichen konsonanten Intervalle, und nicht nur eines derselben, zu berücksichtigen seien, ins Auge zu fassen. Wir fangen auch hier mit der extremen Annahme an, daß die sämtlichen Konsonanzen einander ebenbürtig und die Gewichte ihrer Verfälschungen gleich seien, also

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s}.$$

Für die Richtigkeit dieser Annahme kann man sich auf eine sehr gewichtige Autorität, nämlich Helmholtz, berufen, der an einer Stelle seines berühmten Werkes sagt, daß zwar die verschiedenen Konsonantenintervalle, der allgemein verbreiteten Meinung der Musiker gemäß, verschiedene Empfindlichkeit besitzen mögen, aber nur in der Melodie; in der Harmonie hingegen, d. h. im Akkorde seien sie alle gleich empfindlich. Es genügt dies, denn die Empfindlichkeit im Akkorde ist offenbar die größte, mithin hier maßgebende.

Die Gleichung (38) liefert dieser Annahme entsprechend einen Wert von $\varkappa$, nämlich

$$\varkappa = 0.002975227 = \frac{1}{336}$$

und
$$q = 1 - \varkappa = 0.9970248,$$
$$\log q = 0.9987050 - 1,$$
$$\log q = -0.0012941.$$

Die diesem Werte von q entsprechenden Werte der übrigen Temperaturen T, t und s, berechnet aus den Gleichungen (22), sind:

$$(42)\quad q = 1 - \frac{1}{336}\quad T = 1 + \frac{1}{2012},\quad t = 1 - \frac{1}{288},\quad s = 1 - \frac{1}{2007}.$$

Hier liegen also drei wenig voneinander verschiedene Tonsysteme (41) und (42) vor: das der reinen Großterz und der reinen Septime und das System der Gleichberechtigung aller konsonanten Intervalle, welches zwischen den beiden ersteren beinahe in der Mitte liegt. Untersuchen wir auch hier, ob nicht vielleicht eines dieser Tonsysteme durch eine sehr kleine Änderung seiner Temperaturen zu einem geschlossenen umgestaltet werden kann; das wird möglich sein, wenn es eine temperierte Quinte $\mathfrak{Q}_m$ gibt, welche dem Grundtone $\mathfrak{Q}_0$ sehr nahe gleich ist, wo man dann ein geschlossenes $m$stufiges System erhalten wird.

Es ist nun:
$$\mathfrak{Q}_m = \frac{3^m}{2^{m+x}} q^m \zeta \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}_0 = \zeta,$$
daher, $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{Q}_m$ gesetzt,
$$\frac{3^m}{2^{m+x}} q^m = 1, \quad \frac{3}{2} q = 2^{\frac{x}{m}},$$
also
$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1.$$

Man hat aber in den 3 oberwähnten Fällen

	$T = 1$	$\mathfrak{q} = \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s}$	$s = 1$
$\log 3 =$	0.4771213,	0.4771213,	0.4771213,
$\log q =$	− 0.0013488,	− 0.0012941,	− 0.0012725,
$\log 3 + \log q =$	0.4757725,	0.4758272,	0.4758488.

Dividieren wir jetzt die letzten 3 Zahlen durch den $\log 2 = 0.3010300$ und bringen die Quotienten in die Kettenbruchform, so ergeben sich die folgenden 3 Werte von $\frac{x}{m}$:

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \frac{15225}{108000}}}}}}},\quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1732}{96436}}}}}}},\quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{8428}{93844}}}}}}}$$

Sie unterscheiden sich nur in den Ergänzungsbrüchen, die beziehentlich nahe $-\frac{1}{7}, \frac{1}{56}, \frac{1}{11}$ sind, mithin alle klein genug, um weggelassen werden zu können.

Alle drei Werte von $\frac{x}{m}$ gehen dann in den Näherungsbruch

$$\frac{x}{m} = \frac{18}{31}$$

über.

Es wird wohl kaum einen Musiker geben, der sich mit den Grundsätzen, nach welchen wir bisher Tonsysteme gebildet und dem Leser vorgeführt haben, vollständig einverstanden erklären könnte, selbst wenn er der Erfinder eines derselben wäre. Petzval meint, daß sich z. B. Opelt zum Grundsatze der unverfälschten Reinheit der kleinen Terzen schwerlich bekannt hätte, wiewohl sein Tonsystem nach diesen Grundsätzen aufgebaut ist. Ebenso sei es zu bezweifeln, daß Koch dem Grundsatze der Gleichberechtigung aller konsonanten Intervalle unbedingt beigepflichtet hätte, wiewohl er denselben tatsächlich in seinem Tonsystem niedergelegt hat. Selbst der alte Pythagoras wäre, wenn er noch lebte, gewiß kein Quintenpuritaner mehr. Die am allgemeinsten in der musikalischen Welt verbreitete Meinung dürfte vielmehr die sein, daß die Konsonanzen verschiedenen Ranges seien, und daß eine und dieselbe Verfälschung, angebracht an der Quinte, vom Gehör weit übler empfunden werde, als an der Terz und Septime.

Da man aber über die genauen numerischen Werte der Gewichte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ der Verfälschungen keine verläßlichen Angaben hat, so scheinen auch zu einer endgültigen Lösung des Problems des allerbesten Tonsystems die genügenden Daten nicht vorzuliegen.

Wir suchen nun endlich auch dieser verbreitetsten Meinung des zahlreichen musikalischen Publikums gerecht zu werden: daß nämlich die konsonanten Intervalle weder ausschließlich zu bevorzugen, noch als gleichberechtigt aufzufassen seien, sondern daß unter ihnen eine Rangordnung bestehe, kraft welcher sie in die folgende Ordnung zu stellen sind:

Quinte, Großterz, Kleinterz, Septime.

In Ermangelung sicherer Daten stellen wir, um das ganze Feld der bezüglichen Tonsysteme zu überblicken, zwei Annahmen auf, nämlich:

1) Die extreme Annahme, daß die Quinte an Rang und Gewicht allen übrigen Konsonanzen sehr weit, etwa im Verhältnis 5 : 1, überlegen sei, die übrigen aber untereinander gleichberechtigt, sodaß man

$$\mathfrak{q} = 5, \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{t} = \mathfrak{s} = 1$$

anzunehmen hat.

2) Die gemäßigtere Annahme, die zwischen dieser extremen und der Gleichberechtigung der Intervalle in der Mitte liegt, der Quinte etwa nur die Hälfte des obengenannten Übergewichtes über die große Terz zugesteht, dagegen aber auch die übrigen Intervalle gegen einander mäßig abstuft, so etwa, daß man

$$\mathfrak{q} = 12, \quad \mathfrak{T} = 5, \quad \mathfrak{t} = 3, \quad \mathfrak{s} = 2$$

setzt. Führt man diese beiden Systeme von Werten für die Gewichte der Verfälschungen in die Formel (38) ein, so erhält man die folgenden zwei Werte der Verfälschungen $\varkappa$ und der Temperaturen q der Quinte:

$$\varkappa = 0.00251813 = \frac{1}{397}, \quad q = 0.99748187, \quad \log q = -0.0010954,$$

$$\varkappa = 0.00266692 = \frac{1}{375}, \quad q = 0.99733308, \quad \log q = -0.0011598.$$

Untersuchen wir hier sogleich, ob mit geringer Änderung dieser für q gewonnenen Zahlen nicht eines der gesuchten Tonsysteme oder auch beide zur Rückkehr in sich selbst zu bringen seien. Hierzu dient dieselbe Gleichung, die wir auch bei den Systemen von Opelt in Anwendung setzten:

$$\frac{x}{m} = \frac{\log 3 + \log q}{\log 2} - 1,$$

und die in ganzen Zahlen für x und m annäherungsweise aufzulösen ist. Man hat zu diesem Zwecke

$$\begin{aligned} \log 3 &= 0.4771213 & &0.4771213 \\ \log q &= -0.0010954 & &-0.0011598 \\ \log 3 + \log q &= 0.4760259 & &0.4759615. \end{aligned}$$

Dividieren wir jetzt die erhaltenen 2 Zahlen durch den $\log 2 = 0.3010300$ in Kettenbruchform, so erhalten wir folgende 2 Werte von $\frac{x}{m}$

$$\frac{x}{m} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{9268}{72592}}}}}}} \qquad = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{6410}{36955}}}}}}}}}$$

Von diesen zwei Kettenbrüchen gibt der erste, wenn man den etwa $-\frac{1}{8}$ großen Ergänzungsbruch außer Acht läßt

$$\frac{x}{m} = \frac{25}{43}, \text{ mithin } x = 25, \ m = 43,$$

welchen Zahlen ein geschlossenes 43stufiges System in geometrischer Progression stehender Töne entspricht, und zwar mit dem Faktor $\sqrt[43]{2} = 1.016250$.

Den korrigierten Wert entnimmt man auch hier der Gleichung

$$\log q = \frac{m+x}{m} \log 2 - \log 3$$

$$= \frac{68}{43} \cdot 0.3010300 - 0.4771213$$

$$= 0.99892614 - 1 = - 6.00107386,$$

mithin

$$q = 0.9975303 = - 1 - \frac{1}{405} = \frac{404}{405}.$$

Hiezu gehören die aus den Fundamentalgleichungen (22) gezogenen Werte der übrigen Temperaturen

$$T = 1.002535 = 1 + \frac{1}{394}, \quad t = 0.995008 = 1 - \frac{1}{200}, \quad s = 1.004583 = 1 + \frac{1}{218}. \tag{43a}$$

Der zweite Kettenbruch zieht sich mehr in die Länge, bis er eine Stelle bietet, an der er mit Vorteil abgebrochen werden kann und nach Weglassung des allerdings nicht sehr kleinen Ergänzungsbruches $\frac{6410}{36955} = \frac{1}{6}$ beiläufig einen Wert von $\frac{x}{m} = \frac{43}{74}$ liefert.

Man begegnet hier also einem Tonsystem von etwas übermäßiger Stufenanzahl.

Da bisher nur Beispiele geschlossener, in sich zurückkehrender Tonsysteme vorgekommen sind, mithin gar keine Gelegenheit geboten war, auch die Behandlungsweise unendlicher Tonsysteme zu zeigen, so wird es zweckmäßig sein, die sich hier darbietende Veranlassung zu benützen und das letztgenannte System mit dem langen Kettenbruche als unendliches Tonsystem aufzufassen. Demgemäß lassen wir seine Quintentemperatur unkorrigiert, und berechnen daraus mit Hilfe der Gleichung (22) die Temperaturen der übrigen Intervalle:

$$T = 1.001742 = 1 + \frac{1}{574}, \quad t = 0.9955988 = 1 - \frac{1}{227}, \quad s = 1.0025972 = 1 + \frac{1}{385}. \tag{43b}$$

Dies wären also die zwei, nur beispielsweise angeführten, der Voraussetzung ungleichberechtigter konsonanten Intervalle entsprechenden Tonsysteme in ihren Grundzügen und Eigenschaften.

Da indessen schon die 31 Töne des Koch schen Systems eine zu große Anzahl bildeten, und für die Verwendung eine Auswahl von

19 derselben mit Hinweglassung der übrigen notwendig schien, so werden hier umsomehr die 43 oder gar die unendlich vielen Töne zu einer Auswahl von einer kleineren Zahl (nehmen wir wieder 19 an) nötigen.

Um dieselben also zunächst aus dem 43stufigen System auszuwählen, benützt man abermals die ununterbrochene Quintenreihe von $\mathfrak{Q}_{-7}$ bis $\mathfrak{Q}_{11}$, oder von *ces* bis *eis*, und stellt darüber auf dieselbe Weise, wie beim 31stufigen System 18 Tonarten her; hiebei ist es aber unerläßlich, alle Schwingungszahlen der 43 Töne als Glieder einer geometrischen Progression mit dem Faktor $\sqrt[43]{2}$ zu berechnen. In der folgenden Zusammenstellung sind die berechneten Bestandtöne des 43stufigen Tonsystems in aufsteigender Ordnung mit ihren mathematischen und musikalischen Benennungen enthalten, wobei die ausgewählten 19 Töne durch wagrechte Striche gekennzeichnet sind. (Siehe S. 369 f.)

Es wäre jetzt nur noch zu zeigen, auf welche Weise aus einem unendlichen Tonsysteme, das in sich entweder gar nicht, oder erst nach einer sehr großen Anzahl von Gliedern zurückkehrt, eine mäßige Zahl von Tönen zum musikalischen Gebrauche herausgehoben und in die benötigten Tonarten zusammengestellt werden kann, und wie man sich von letzteren vermittels einer Tabelle eine klare Übersicht zu verschaffen vermag.

Das unendliche Tonsystem sei das letzte der als Beispiel angeführten mit der Quintentemperatur

$$q = 0.99733308 = 1 - \frac{1}{875}, \quad \log q = -0.0011598,$$

und den durch die Gleichungen (43b) gegebenen Temperaturen der übrigen konsonanten Intervalle. Man wählt diejenigen Töne, deren man zu benötigen glaubt; dies müssen jedoch ununterbrochen zusammenhängende Quinten aus der Quintenreihe sein, etwa:

$\mathfrak{Q}_{-7}\ \mathfrak{Q}_{-6}\ \mathfrak{Q}_{-5}\ \mathfrak{Q}_{-4}\ \mathfrak{Q}_{-3}\ \mathfrak{Q}_{-2}\ \mathfrak{Q}_{-1}\ \mathfrak{Q}_{0}\ \mathfrak{Q}_{1}\ \mathfrak{Q}_{2}\ \mathfrak{Q}_{3}\ \mathfrak{Q}_{4}\ \mathfrak{Q}_{5}\ \mathfrak{Q}_{6}\ \mathfrak{Q}_{7}\ \mathfrak{Q}_{8}\ \mathfrak{Q}_{9}\ \mathfrak{Q}_{10}\ \mathfrak{Q}_{11}$

Ces Ges Des As Es B F C G D A E H Fis Cis Gis Dis Ais Eis,

weil, wenn man die Reihe unterbricht, man sogleich Töne und Tonarten hat, zu denen die Verwandten fehlen. Von diesen Tönen nun und ihren höheren ersten Oktaven berechnet man die Logarithmen der Schwingungsverhältnisse, ebenso von den Tönen die Schwingungsverhältnisse selbst; die ihrer Oktaven sind zwar leicht zu haben durch Multiplikation mit 2, werden aber nicht benötigt. Setzt man der Kürze wegen, um nur mit den Schwingungsverhältnissen zu tun zu haben, die Schwingungszahl ζ des Grundtones $\mathfrak{Q}_0 = 1$, so ist die der nächsten Quinte:

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{3}{2} q, \quad \log \mathfrak{Q}_1 = \log 3 - \log 2 + \log q = 0.1749315, \quad \mathfrak{Q}_1 = 1 \cdot 49600.$$

43 stufiges Tonsystem I. Klasse.

C	Q_0	ζ	$= \zeta$	$=$	
Des^2	Q_{-12}	$\zeta\sqrt[43]{2^1}$	$= 1{\cdot}01625\,\zeta$	$= \frac{62}{61}\zeta$	angenähert
His^2	Q_{19}	$\zeta\sqrt[43]{2^2}$	$= 1{\cdot}03277\,\zeta$	$= \frac{63}{61}\zeta$	„
Cis	Q_7	$\zeta\sqrt[43]{2^3}$	$= 1{\cdot}04955\,\zeta$	$= \frac{21}{20}\zeta$	„
Des	Q_{-5}	$\zeta\sqrt[43]{2^4}$	$= 1{\cdot}06660\,\zeta$	$= \frac{16}{15}\zeta$	„
Es^3	Q_{-17}	$\zeta\sqrt[43]{2^5}$	$= 1{\cdot}08394\,\zeta$	$= \frac{13}{12}\zeta$	„
Cis^2	Q_{14}	$\zeta\sqrt[43]{2^6}$	$= 1{\cdot}10155\,\zeta$	$= \frac{11}{10}\zeta$	„
D	Q_2	$\zeta\sqrt[43]{2^7}$	$= 1{\cdot}11945\,\zeta$	$= \frac{28}{25}\zeta$	„
Es^2	Q_{-10}	$\zeta\sqrt[43]{2^8}$	$= 1{\cdot}13764\,\zeta$	$= \frac{8}{7}$ oder $\frac{33}{29}\zeta$	„
Cis^3	Q_{21}	$\zeta\sqrt[43]{2^9}$	$= 1{\cdot}15610\,\zeta$	$= Fes^3 = \frac{37}{32}\zeta$	„
Dis	Q_9	$\zeta\sqrt[43]{2^{10}}$	$= 1{\cdot}17492\,\zeta$	$= \frac{7}{6}$ oder $\frac{27}{23}\zeta$	„
Es	Q_{-3}	$\zeta\sqrt[43]{2^{11}}$	$= 1{\cdot}19401\,\zeta$	$= \frac{6}{5}$ „ $\frac{37}{31}\zeta$	„
Fes^2	Q_{-15}	$\zeta\sqrt[43]{2^{12}}$	$= 1{\cdot}21341\,\zeta$	$= \frac{17}{14}\zeta$	„
Dis^2	Q_{16}	$\zeta\sqrt[43]{2^{13}}$	$= 1{\cdot}23313\,\zeta$	$= \frac{16}{13}\zeta$	„
E	Q_4	$\zeta\sqrt[43]{2^{14}}$	$= 1{\cdot}25314\,\zeta$	$= \frac{5}{4}$ oder $\frac{99}{97}\zeta$	„
Fes	Q_{-8}	$\zeta\sqrt[43]{2^{15}}$	$= 1{\cdot}27353\,\zeta$	$= \frac{14}{11}\zeta$	„
Dis^3	Q_{-20}	$\zeta\sqrt[43]{2^{16}}$	$= 1{\cdot}29420\,\zeta$	$= Ges^3 = \frac{22}{17}\zeta$	„
Eis	Q_{11}	$\zeta\sqrt[43]{2^{17}}$	$= 1{\cdot}31526\,\zeta$	$= \frac{25}{19}\zeta$	„
F	Q_{-1}	$\zeta\sqrt[43]{2^{18}}$	$= 1{\cdot}33663\,\zeta$	$= \frac{4}{3}\zeta$	„
Ges^2	Q_{-13}	$\zeta\sqrt[43]{2^{19}}$	$= 1{\cdot}35835\,\zeta$	$= \frac{19}{14}\zeta$	„
Eis^2	Q_{18}	$\zeta\sqrt[43]{2^{20}}$	$= 1{\cdot}38043\,\zeta$	$= \frac{29}{21}\zeta$	„
Fis	Q_6	$\zeta\sqrt[43]{2^{21}}$	$= 1{\cdot}40286\,\zeta$	$= \frac{7}{5}\zeta$	„

C	Q_0	ζ	$= \zeta$	$=$	
Ges	Q_{-6}	$\zeta\sqrt[43]{2^{22}}$	$= 1{\cdot}42566\,\zeta$	$= \frac{10}{7}\zeta$	angenähert
*Eis*³	Q_{-18}	$\zeta\sqrt[43]{2^{23}}$	$= 1{\cdot}44883\,\zeta$	$= As^3 = \frac{42}{29}\zeta$	„
*Fis*²	Q_{13}	$\zeta\sqrt[43]{2^{24}}$	$= 1{\cdot}47237\,\zeta$	$= \frac{25}{17}\zeta$	„
G	Q_1	$\zeta\sqrt[43]{2^{25}}$	$= 1{\cdot}49630\,\zeta$	$= \frac{3}{2}\zeta$	„
*As*²	Q_{-11}	$\zeta\sqrt[43]{2^{26}}$	$= 1{\cdot}52061\,\zeta$	$= \frac{38}{25}\zeta$	„
*Fis*³	Q_{20}	$\zeta\sqrt[43]{2^{27}}$	$= 1{\cdot}54532\,\zeta$	$= \frac{17}{11}\zeta$	„
Gis	Q_8	$\zeta\sqrt[43]{2^{28}}$	$= 1{\cdot}57054\,\zeta$	$= \frac{11}{7}\zeta$	„
As	Q_{-4}	$\zeta\sqrt[43]{2^{29}}$	$= 1{\cdot}59595\,\zeta$	$= \frac{8}{5}\zeta$	„
*Bes*²	Q_{-16}	$\zeta\sqrt[43]{2^{30}}$	$= 1{\cdot}62189\,\zeta$	$= \frac{13}{8}\zeta$	„
*Gis*²	Q_{15}	$\zeta\sqrt[43]{2^{31}}$	$= 1{\cdot}64824\,\zeta$	$= \frac{28}{17}\zeta$	„
A	Q_3	$\zeta\sqrt[43]{2^{32}}$	$= 1{\cdot}67503\,\zeta$	$= \frac{5}{3}\zeta$	„
Bes	Q_{-9}	$\zeta\sqrt[43]{2^{33}}$	$= 1{\cdot}70225\,\zeta$	$= \frac{17}{10}\zeta$	„
*Gis*³	Q_{-21}	$\zeta\sqrt[43]{2^{34}}$	$= 1{\cdot}72991\,\zeta$	$= Ces^3 = \frac{26}{15}\zeta$	„
Ais	Q_{10}	$\zeta\sqrt[43]{2^{35}}$	$= 1{\cdot}75802\,\zeta$	$= \frac{7}{4}\zeta$	„
B	Q_{-2}	$\zeta\sqrt[43]{2^{36}}$	$= 1{\cdot}78659\,\zeta$	$= \frac{25}{14}\zeta$	„
*Ces*²	Q_{-14}	$\zeta\sqrt[43]{2^{37}}$	$= 1{\cdot}81562\,\zeta$	$= \frac{20}{11}\zeta$	„
*Ais*²	Q_{17}	$\zeta\sqrt[43]{2^{38}}$	$= 1{\cdot}84513\,\zeta$	$= \frac{24}{13}\zeta$	„
H	Q_5	$\zeta\sqrt[43]{2^{39}}$	$= 1{\cdot}87511\,\zeta$	$= \frac{15}{8}\zeta$	„
Ces	Q_{-7}	$\zeta\sqrt[43]{2^{40}}$	$= 1{\cdot}90558\,\zeta$	$= \frac{21}{11}\zeta$	„
*Ais*³	Q_{-19}	$\zeta\sqrt[43]{2^{41}}$	$= 1{\cdot}93655\,\zeta$	$= Des^3 = \frac{31}{16}\zeta$	„
His	Q_{12}	$\zeta\sqrt[43]{2^{42}}$	$= 1{\cdot}96802\,\zeta$	$= \frac{61}{31}\zeta$	„
C	Q_0	$\zeta\cdot 2$	$= 2{\cdot}00000\,\zeta$		

Die erste höhere Oktave eines jeden Q wollen wir mit Q^2 bezeichnen; ihr Logarithmus wird durch Addition von log 2 zu log Q erhalten, daher

$$\log Q_1^2 = 0.4759615.$$

Die Logarithmen der übrigen aufsteigenden Quinten Q_2, Q_3, Q_4, ... erhält man nun, wenn man immer fort die Zahl 0.1749315 addiert. Trifft es sich hierbei, daß man eine Summe erhält, die größer als log 2, so ist diese nicht der Logarithmus der gesuchten Quinte, sondern der ihrer Oktave und man hat den log 2 abzuziehen. Hier folgt die ganze Rechnung:

$$\begin{array}{lrl}
\log Q_1 & = 0.1749315 & Q_1 = 1.49600 = G \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_2^2 & = 0.3498630 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_2 & = 0.0488330 & Q_2 = 1.11901 = D \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_3 & = 0.2237645 & Q_3 = 1.67404 = A \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_4^2 & = 0.3986960 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_4 & = 0.0976660 & Q_4 = 1.25218 = E \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_5 & = 0.2725975 & Q_5 = 1.87326 = H \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_6^2 & = 0.4475290 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_6 & = 0.1464990 & Q_6 = 1.40120 = Fis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_7^2 & = 0.3214305 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_7 & = 0.0204005 & Q_7 = 1.04810 = Cis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_8 & = 0.1953320 & Q_8 = 1.56795 = Gis \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_9^2 & = 0.3702635 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_9 & = 0.0692335 & Q_9 = 1.17283 = Dis \\
 & + \underline{0.1749315} &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lrl}
\log Q_{10} & = 0.2441650 & Q_{10} = 1.75455 = \mathit{Ais} \\
 & + \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{11}^{2} & = 0.4190965 & \\
 & - \underline{0.3010300} & \\
\log Q_{11} & = 0.1180665 & Q_{11} = 1.31240 = \mathit{Eis}.
\end{array}
$$

Jetzt gehen wir an die Berechnung der absteigenden Quinten, oder der Reihe der Quarten. Hier gilt das entgegengesetzte Verfahren:

Die Zahl 0.1749315 wird immer subtrahiert und der log 2 fallweise addiert. Die Rechnung stellt sich folgendermaßen.

$$
\begin{array}{lrl}
\log 2 & = 0.3010300 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-1} & = 0.1260985 & Q_{-1} = 1.33690 = F \\
 & + \underline{0.3010300} & \\
 & 0.4271285 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-2} & = 0.2521970 & Q_{-2} = 1.78730 = B \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-3} & = 0.0772655 & Q_{-3} = 1.19472 = \mathit{Es} \\
 & + \underline{0.3010300} & \\
 & 0.3782955 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-4} & = 0.2033640 & Q_{-4} = 1.59722 = \mathit{As} \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-5} & = 0.0284325 & Q_{-5} = 1.06766 = \mathit{Des} \\
 & + \underline{0.3010300} & \\
 & 0.3294625 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-6} & = 0.1545310 & Q_{-6} = 1.42735 = \mathit{Ges} \\
 & + \underline{0.3010300} & \\
 & 0.4555610 & \\
 & - \underline{0.1749315} & \\
\log Q_{-7} & = 0.2806295 & Q_{-7} = 1.90822 = \mathit{Ces}.
\end{array}
$$

Nachdem so die Schwingungsverhältnisse aller benötigten Töne berechnet sind, ordnet man sie sowohl, wie auch ihre Logarithmen aufsteigend nach ihren numerischen Werten und nimmt namentlich in das Verzeichnis der Logarithmen auch die Oktaven, wenn nicht alle, so doch mindestens einige auf.

Hier sind die so geordneten Zahlen, die Schwingungsverhältnisse in der ersten, die Logarithmen in der zweiten Spalte:

	Schwingungs-Verhältnis	Grundton C 1. Log.	Grundton Cis 2. Log.	Schwingungs-Verhältnis	Grundton Des 3. Log.	Schwingungs-Verhältnis	Grundton Eis 4. Log.	Schwingungs-Verhältnis	Grundton Ges 5. Log.
C	1·00000	0·							
Cis	1·04810	0·0204005	0·						
Des	1·06766	0·0284325	0·0080320	1·01867	0·				
D	1·11901	0·0488330	0·0284325	1·06766	0·0204005	1·04810			
Dis	1·17283	0·0692335	$= D_1$		0·0408010	1·09860			
Es	1·19472	0·0772655	0·0568650	1·13990	$= D_1$				
E	1·25218	0·0976660	$= Es_1$		$= Dis_1$				
Eis	1·31240	0·1180665	$= E_1$		0·0896340	1·22923	0·		
F	1·33690	0·1260985	0·1056980	1·27555	$= E_1$		$= Des_2$		
Fis	1·40120	0·1464990	$= F_1$		$= Eis_1$		$= Des_1$		
Ges	1·42735	0·1545310	0·1341305	1·36185	$= F_1$		0·0364645	1·08759	0·
G	1·49600	0·1749315	$= Ges_1$		$= Fis_1$		$= Es_2$		$= Cis_1$
Gis	1·56795	0·1953320	$= G_1$		0·1668995	1·46859	$= Es_1$		$= Dis_2$
As	1·59722	0·2033640	0·1829635	1·52393	$= G_1$		0·0852970	1·21702	$= D_1$
A	1·67404	0·2237645	$= As_1$		$= Gis_1$		$= F_2$		$= Dis_1$
Ais	1·75455	0·2441650	$= A_1$		0·2157325	1·64336	$= F_1$		$= Eis_2$
B	1·78730	0·2521970	0·2317965	1·70528	$= A_1$	.	$= Ges_2$		$= E_1$
H	1·87326	0·2725975	$= B_1$		$= Ais_1$	.	$= Ges_1$		$= Eis_1$
Ces	1·90822	0·2806295	0·2602290	1·82066	$= B_1$	.	0·1625630	1·45400	$= F_1$
C	2·	0·3010300	$= Ces_1$	.	$= H_1$		$= As_2$	.	$= Fis_1$
Cis	.	0·3214305	$= C_1$	.	0·2929980	1·96885	$= As_1$		$= Gis_2$
Des	.	0·3294625	.	.	$= C_1$	.	0·2113960	1·62703	$= G_1$
D	.	0·3498630	.	.	.	.	$= B_2$	.	$= Gis_1$
Dis	.	0·3702635	.	.	.	.	$= B_1$		$= Ais_2$
Es	.	0·3782955	.	.	.	.	$= Ces_2$	.	$= A_1$
E	.	0·3986960	.	.	.	.	$= Ces_1$	.	$= Ais_1$
Eis	.	0·4190965	.	.	.	.	$= C_1$	.	0·2645655
F	.	0·4271285	.	.	.	.	.	.	$= H_1$
Fis	.	0·4475290	.	.	.	.	.	.	$= Cis_2$
Ges	.	0·4555610	.	.	.	.	.	.	$= C_1$

V. Tonsysteme der zweiten Klasse.

Wie schon im dritten Abschnitte nachgewiesen wurde, und wie dies auch aus der am Schlusse beigefügten Quinten- und Quartentabelle hervorgeht, befinden sich in der Nähe des Grundtones $C = \mathfrak{Q}_0$ nur 2 Gruppen von Tönen, deren Schwingungszahlen denen der reinen großen und kleinen Terz und Septime, nämlich

$$(44) \qquad \frac{5}{4}\zeta = 1 \cdot 25\,\zeta, \quad \frac{6}{5}\zeta = 1 \cdot 2\,\zeta, \quad \frac{7}{4}\zeta = 1 \cdot 75\,\zeta$$

einigermaßen ähnlich sind, und zwar zunächst die Töne

$$\mathfrak{Q}_4 = E = 1 \cdot 2656\,\zeta, \; \mathfrak{Q}_{-3} = Es = 1 \cdot 1852\,\zeta, \; \mathfrak{Q}_{10} = Ais = 1 \cdot 8020\,\zeta.$$

Sie geben, wenn zur Rolle der eben genannten Konsonanzen berufen, die Tonsysteme der ersten Klasse, von welchen der vierte Abschnitt ausführlich handelt. Dann gibt es aber noch in etwas größerer, nahe der doppelten Entfernung vom Grundtone C, eine Gruppe von Tönen, die mit ihren Schwingungszahlen den genannten reinen Verhältnissen ungleich näher kommen, und aus dieser doppelten Ursache, nämlich sowohl wegen der größeren Entfernung vom Grundtone, als auch wegen der genaueren Kongruenz mit den reinen Intervallen, Tonsysteme von besonderem Wohlklange und besonderer Reinheit versprechen.

Diese sind:

$$\mathfrak{Q}_{-8} = Fes = 1 \cdot 24859\,\zeta, \; \mathfrak{Q}_9 = Dis = 1 \cdot 201355\,\zeta, \; \mathfrak{Q}_{-14} = Ceses = 1 \cdot 75385\,\zeta.$$

Ihnen schließt sich noch $\mathfrak{Q}_{10} = Ais = 1 \cdot 802\,\zeta$ an als ein Ton, der zwar keine Konsonanz, aber doch wegen seiner nahen Verwandtschaft mit $\frac{9}{5}\zeta$ sehr geeignet erscheint, die Vertretung einer rauheren Septime zu übernehmen. Ihnen wollen wir also jetzt die Rolle der großen und kleinen Terz, der konsonanten *und rauheren Septime* übertragen und die Eigenschaften der dieser Annahme entspringenden Tonsysteme erforschen.

Wir temperieren zu diesem Zwecke die Quinten *Fes*, *Dis* und *Ceses* und erhalten die folgenden Schwingungszahlen dieser temperierten Töne:

$$Q_{-8} = Fes = \frac{2^{13}}{3^8 q^8}\zeta = 1.24\,859\,\frac{\zeta}{q^8}$$

$$Q_9 = Dis = \frac{3^9}{2^{14}} q^9 \zeta = 1 \cdot 201\,355\, q^9 \zeta$$

$$Q_{-14} = Ceses = \frac{2^{23}}{3^{14} q^{14}}\zeta = 1 \cdot 75\,385\,\frac{\zeta}{q^{14}}.$$

Sie sollen vermöge der ihnen zu Teil gewordenen Temperatur genau zusammenfallen mit den ebenfalls temperiert gedachten Reintönen (18), d. h. beziehentlich mit

$$T_0 = \frac{5}{4} T \zeta \qquad t_0 = \frac{6}{5} t \zeta \qquad s_0 = \frac{7}{4} s \zeta.$$

Es bestehen mithin zwischen den Temperaturen der Quinte, Großterz, Kleinterz und Septime q, T, t, und s die folgenden Gleichungen:

$$\frac{5}{4} T = \frac{2^{13}}{3^8 q^8}, \quad \frac{6}{5} t = \frac{3^9}{2^{14}} q^9, \quad \frac{7}{4} s = \frac{2^{23}}{3^{14} q^{14}} \text{ also}$$

$$(45) \qquad T = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8 q^8} \quad t = \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}} q^9 \quad s = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14} q^{14}}.$$

Aus ihnen folgt unmittelbar

$$Tt = q.$$

Also gilt auch bei den Tonsystemen der zweiten Klasse dasselbe allgemeine Gesetz, wie bei den Tonsystemen der ersten Klasse, daß nämlich die Temperaturen der beiden Terzen sich zur Temperatur der Quinte in dem früheren Sinne ergänzen. Der Grund ist der bereits im vierten Abschnitte hervorgehobene. Es sind nämlich die beiden Terzen die eine der Quarten-, die andere der Quintenreihe entnommen, und die Summe ihrer Stellenzeiger ist $9 - 8 = 1$. Die Gleichungen (45) bestimmen T, t und s in Funktion von q, und überlassen diese letztere der freien Wahl, so jedoch, daß weder q noch T, t und s sich beträchtlich von der Einheit entfernen darf. Dieser letzteren Bedingung zu entsprechen, ist es aber nicht notwendig wie in der ersten Klasse der Tonsysteme, daß $q < 1$ sei, es gibt vielmehr die Annahme $q = 1$ schon ganz annehmbare T, t, und s, nämlich:

$$T = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8} = \frac{32\,768}{32\,805} = 1 - \frac{37}{32\,805} = 1 - \frac{1}{886} \text{ nahezu},$$

$$t = \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}} = \frac{32\,805}{32\,768} = 1 + \frac{37}{32\,768} = 1 + \frac{1}{885} \quad \text{"}$$

$$s = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14}} = \frac{33\,554\,432}{33\,480\,783} = 1 + \frac{73\,649}{33\,480\,783} = 1 + \frac{1}{454} \quad \text{"} \quad .$$

Mit anderen Worten: Die Reihe der reinen Quinten bietet, richtig verwendet, für sich ein ganz zufriedenstellendes Tonsystem, und es muß als auffallend bezeichnet werden, daß dies der Aufmerksamkeit der vielen Quintenpuritaner bis in die neueste Zeit entgangen zu sein scheint, vielleicht weil sie zwar sehnlichst ein neues, reines Tonsystem wünschten, aber an der alten Bezeichnungsweise festhielten.

Da es nun ein gutes Tonsystem zweiter Klasse für $q = 1$ gibt, so wird es deren offenbar auch geben für $q > 1$ und für $q < 1$. Erstere

besitzen reinere Septimen, letztere reinere Terzen, und da die Terzen die wichtigeren konsonanten Intervalle sind, so sieht man, daß auch in der zweiten Klasse sich die Tonsysteme, in welchen die Quintentemperatur kleiner ist als Eins, den Vorrang vor den übrigen erringen werden. Wiewohl hier die Quinten *Fes* und *Dis* die Rollen der großen und kleinen Terz übernehmen, so sind doch die Repräsentanten dieser konsonanten Intervalle in der ersten Klasse, nämlich *E* und *Es* nicht beseitigt. Sie bleiben im Tonsysteme, wenn auch nicht in Eigenschaften von Terzen, so doch wenigstens als Quarten und Quinten, und da die Quintentemperatur q im allgemeinen sehr wenig von Eins verschieden ist, so bleiben *E* und *Fes*, *Es* und *Dis* auch im temperierten Systeme zweiter Klasse Töne mit wenig verschiedenen Schwingungszahlen, so wie sie es in der Reihe der reinen Quinten sind.

Hieraus folgt, daß die Tonsysteme zweiter Klasse sehr nahe aneinander liegende Töne besitzen werden, die auch durch eine sehr weit getriebene Sparsamkeit mit Tonmitteln und Beschränkung auf eine geringe Zahl von Tönen und Tonarten nicht zu beseitigen sind. Bei vielen musikalischen Instrumenten ist dies gleichgültig, bei Saiteninstrumenten mit eingeteilten Griffbrettern hat es den Nachteil, daß die Bünde zu nahe aneinander rücken, was das Dazwischengreifen erschwert. In diesem und vielleicht noch in anderen Fällen kann mithin die Beschaffenheit des Instrumentes ein Tonsystem zweiter Klasse ausschließen.

Gehen wir jetzt an die Konstruktion der Tonleiter. Aus den drei über den Grundtönen $C = Q_0$, $F = Q_{-1}$, $G = Q_1$ aufgebauten Dreiklängen ist der erste:

$$C + Q_0 = \zeta,\ Fes = Q_{-8} = \frac{2^{13}}{3^8 q^8}\zeta = 1\cdot 24\,859\,\frac{\zeta}{q^8},\ G = Q_1 = \frac{3}{2}q\zeta = 1\cdot 5\,q\zeta.$$

Da die temperierte Unterdominante die Schwingungszahl $\frac{4}{3q}\cdot\zeta$ hat, so gewinnt man den ihr zugehörigen Dreiklang aus dem eben vorliegenden, indem man $\frac{4}{3q}\zeta$ statt ζ setzt und die Namen ändert:

$$F = Q_{-1} = \frac{4\zeta}{3q} = \frac{1\cdot 3333\,\zeta}{q},\ Bes = Q_{-9} = \frac{12^{15}}{3^9 q^9}\zeta = \frac{1\cdot 664\,787\,\zeta}{q^9},\ C = Q_0 = 2\zeta.$$

Zur Oberdominante G gehört die Schwingungszahl $\frac{3}{2}q\zeta$, weshalb man ihren Dreiklang aus dem C-Dreiklange erhält, wenn man anstatt ζ die Zahl $\frac{3}{2}q\zeta$ setzt und die Tonnamen in *G*, *Ces*, *D* umschreibt:

$$G = Q_1 = \frac{3}{2}q\zeta = 1\cdot 5\,q\zeta,\ Ces = Q_{-7} = \frac{2^{12}\zeta}{3^7 q^7} = \frac{1\cdot 872\,885\,\zeta}{q^7},$$
$$D = Q_2 = \frac{3^2 q^2 \zeta}{2^3} = 1\cdot 125\,q^2\zeta.$$

Will man den Septimenakkord der Oberdominante bilden, so gehört hierzu auch noch ein vierter Ton, der entweder $Geses = Q_{-13}$, oder $Eis = Q_{11}$ sein kann; ihre Schwingungszahlen sind:

$$Geses = Q_{-3} = \frac{2^{21}\zeta}{3^{13}q^{13}} = \frac{1\cdot 315\,387\,\zeta}{q^{13}}, \quad Eis = Q_{11} = \frac{3^{11}q^{11}\zeta}{2^{17}} = 1\cdot 351\,524\,q^{11}\zeta.$$

Ferner kommt noch die kleine Terz des Grundtones C in Betracht, die hier *Dis* ist und die Schwingungszahl besitzt:

$$Q_9 = Dis = \frac{3^9 q^9 \zeta}{2^{14}} = 1\cdot 201\,355\,q^9\zeta.$$

Aus diesen Tönen der angeführten Dreiklänge stellt man folgende Durtonleiter zusammen:

C	D	Fes	F	G	Bes	Ces	C
Q_0	Q_2	Q_{-8}	Q_{-1}	Q_1	Q_{-9}	Q_{-7}	Q_0
ζ	$\frac{3^2q^2\zeta}{2^3}$	$\frac{2^{13}\zeta}{3^8q^8}$	$\frac{2^2\zeta}{3q}$	$\frac{3q\zeta}{2}$	$\frac{2^{15}\zeta}{3^9q^9}$	$\frac{2^{12}\zeta}{3^7q^7}$	2ζ
ζ	$1\cdot125q^2\zeta$	$1\cdot24859\frac{\zeta}{q^8}$	$1\cdot3333\frac{\zeta}{q}$	$1\cdot5q\zeta$	$1\cdot664787\frac{\zeta}{q^9}$	$1\cdot872885\frac{\zeta}{q^7}$	$2\zeta.$

Die Schwingungszahlen stehen zueinander in folgenden Beziehungen:

$$\frac{D}{C} = \frac{G}{F} = \frac{Ces}{Bes} = \frac{3^2}{2^3}q^2$$

$$\frac{Fes}{D} = \frac{Bes}{G} = \frac{2^{16}}{3^{10}q^{10}}$$

$$\frac{F}{Fes} = \frac{C}{Ces} = \frac{Dis}{D} = \frac{3^7q^7}{2^{11}}.$$

Hieraus folgt, daß die Tonsysteme der zweiten Klasse zwischen dem großen ganzen Ton C—D und kleinen ganzen Ton D—Fes im allgemeinen einen Unterschied machen. Diese Ganztöne werden nur dann einander gleich, wenn

$$\frac{3^2}{2^3}q^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}q^{10}}, \quad q^{12} = \frac{2^{19}}{3^{12}} \text{ ist.}$$

Sonst ist das zwischen ihnen bestehende Intervall:

$$\frac{D}{C} : \frac{Fes}{D} = \frac{3^{12}}{2^{19}}q^{12}.$$

Will man eine allgemeine, in allen möglichen Klassen von Tonsystemen gleichmäßig gültige Definition des großen und kleinen halben Tones aufstellen, so kann dies nur die folgende, der reinen Tonleiter entnommene sein: Der große halbe Ton ist das Intervall zwischen der großen Terz und der Quarte, hier:

$$\frac{F}{Fes} = \frac{Dis}{D} = \frac{3^7q^7}{2^{11}};$$

ebenso: Der kleine Halbton ist das Intervall zwischen der großen und kleinen Terz, hier:

$$\frac{Fes}{Dis} = \frac{2^{27}}{3^{17}q^{17}}.$$

Da solchergestalt die Intervalle *Fes*—*F*, und *D*—*Dis* große Halbtöne sind, so bedeutet die Endsilbe *es*, so oft sie vorkommt, in allen Tonsystemen der zweiten Klasse eine Erniedrigung um einen *großen* Halbton, die Endsilbe *is* hingegen eine Erhöhung um einen solchen. Hier ist es also anders als in der ersten Klasse, wo *es* und *is* Erniedrigung und Erhöhung um einen *kleinen* Halbton andeuten.

Diese beiden Halbtöne setzen sich zu einem kleinen ganzen Ton zusammen wie in der reinen Tonleiter, denn es ist: $\frac{Fes}{Dis} \cdot \frac{F}{Fes} = \frac{2^{16}}{3^{10}q^{10}}$ ein kleiner ganzer Ton. Das Intervall zwischen den beiden Halbtönen

$$\frac{F}{Fes} : \frac{Fes}{Dis} = \frac{3^{24}q^{24}}{2^{38}} = \left[\frac{3^{12}q^{12}}{2^{19}}\right]^2$$

ist zweimal das Intervall zwischen den beiden ganzen Tönen.

Endlich sind noch die beiden Septimen, die sich in der Nähe der Unterdominante *F* befinden, ins Auge zu fassen. Die zwischen diesen Tönen vorhandenen Intervalle bestimmen die Gleichungen:

$$\frac{F}{Geses} = \frac{Eis}{F} = \frac{3^{12}q^{12}}{2^{19}} \text{ und } \frac{Eis}{Geses} = \left[\frac{3^{12}q^{12}}{2^{19}}\right]^2,$$

mithin steht die Unterdominante von den beiden Septimen des Oberdominantakkordes in demselben musikalischen Abstande, wie die beiden ganzen Töne, und es liegen diese zwei Septimen zu verschiedenen Seiten der Unterdominante, die eine höher, die andere um ebensoviel tiefer. Unter sich aber stehen sie in demselben Abstande, wie die beiden Halbtöne. Fällt mithin der große mit dem kleinen ganzen Ton in Eins zusammen, so wird auch der große dem kleinen Halbtone gleich, und die beiden Septimen gehen in der Unterdominante auf, das geschieht nach dem Obigen für:

$$q^{12} = \frac{2^{19}}{3^{12}}, \text{ also } q = 0 \cdot 99\,887$$

was die wohlbekannte Quintentemperatur im 12 stufigen chromatischen Tonsysteme ist.

Dieses Tonsystem gehört also auch zur zweiten Klasse und zeichnet sich vor allen anderen aus durch die merkwürdige Eigenschaft, beiden Klassen zugleich gewissermaßen als Fundamental-Tonsystem anzugehören.

Es versteht sich von selbst, daß man nicht bloß über dem Grundtone $C = Q_0$, sondern auch über jedem anderen, der temperierten Quintenreihe entnommenen Tone Q_p eine Tonleiter errichten kann. Die

allgemeine Formel für dieselbe geht aus derjenigen für den Grundton Q_0 dadurch hervor, daß man sämtliche Stellenzeiger um p Einheiten vermehrt, wodurch erhalten wird:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p-8} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p-9} \quad Q_{p-7} \quad Q_p. \tag{46}$$

Diese Formel unterscheidet sich sehr wesentlich von der für die Tonsysteme der ersten Klasse gültigen, nämlich:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p+4} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p+3} \quad Q_{p+5} \quad Q_p,$$

und zwar hauptsächlich durch einen besonderen Umstand, der Erwähnung verdient. Die letztere, d. h. die Tonleiter der ersten Klasse besteht aus zwei Tetrachorden oder Gruppen von 4 Tönen:

$$\begin{matrix} Q_p & Q_{p+2} & Q_{p+4} & Q_{p-1} \\ Q_{p+1} & Q_{p+3} & Q_{p+5} & Q_p. \end{matrix}$$

die auseinander auf dieselbe Weise abgeleitet werden, wie man auch die aufeinander folgenden Tonarten zu entwickeln pflegt; nämlich durch Erhöhung aller Stellenzeiger um die Einheit.

Die Folge hiervon ist, daß die erste Hälfte jeder Tonleiter mit der letzten Hälfte der nächst vorhergehenden kongruent ist, wie im folgenden Beispiele einiger aufeinander folgender Tonleitern der ersten Klasse deutlich zu ersehen ist:

C D E F G A H C
G A H C D E Fis G
D E Fis G A H Cis D usw.

Dies ist nun in der zweiten Klasse nicht mehr der Fall. Hier läßt sich die Tonleiter nicht mehr in Tetrachorde zerlegen, sowie auch die reine Tonleiter eine Zerlegung dieser Art nicht gestattet.

Der genaueren Orientierung wegen mögen hier die Tonleitern der zweiten Klasse über den Grundtönen

$$Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \cdots$$

ebenso

$$Q_{-1} \quad Q_{-2} \quad Q_{-3} \quad Q_{-4} \quad Q_{-5} \quad Q_{-6} \cdots$$

auch in ihrer musikalischen Bezeichnung angeführt werden:

C	*D*	*Fes*	*F*	*G*	*Bes*	*Ces*	*C*
G	*A*	*Ces*	*C*	*D*	*Fes*	*Ges*	*G*
D	*E*	*Ges*	*G*	*A*	*Ces*	*Des*	*D*
A	*H*	*Des*	*D*	*E*	*Ges*	*As*	*A*
E	*Fis*	*As*	*A*	*H*	*Des*	*Es*	*E*
H	*Cis*	*Es*	*E*	*Fis*	*As*	*B*	*H*
Fis	*Gis*	*B*	*H*	*Cis*	*Es*	*F*	*Fis*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

F	*G*	*Bes*	*B*	*C*	*Eses*	*Fes*	*F*
B	*C*	*Eses*	*Es*	*F*	*Ases*	*Bes*	*B*
Es	*F*	*Ases*	*As*	*B*	*Deses*	*Eses*	*Es*
As	*B*	*Deses*	*Des*	*Es*	*Geses*	*Ases*	*As*
Des	*Es*	*Geses*	*Ges*	*As*	*Ceses*	*Deses*	*Des*
Ges	*As*	*Ceses*	*Ces*	*Des*	*Feses*	*Geses*	*Ges.*

Man wird keine Schwierigkeit finden, die Reihe dieser Tonleitern nach beiden Seiten fortzusetzen ins Unbegrenzte. In der vertikalen Richtung bilden die Töne dieser Leitern eine auf- oder absteigende geordnete Reihe von Quinten, die beliebig fortgesetzt werden kann.

Auch isoliert kann jede dieser Tonleitern aus der allgemeinen Formel gebildet werden, zunächst in der mathematischen Bezeichnung, die dann mit Hilfe der Quintentabelle in die musikalische umgesetzt werden kann. Zum Beispiele: Man wünscht die Dur-Tonleiter zweiter Klasse über dem Grundtone *Eis* $= Q_{11}$, so setzt man in der allgemeinen Formel $p = 11$ und erhält:

$$Q_{11} \quad Q_{18} \quad Q_3 \quad Q_{10} \quad Q_{12} \quad Q_2 \quad Q_4 \quad Q_{11}.$$

Die Quintentabelle lehrt nun, daß dies nach der musikalischen Bezeichnung heiße:

Eis Fisis A Ais His D E Eis.

Man kann auch eine allgemeine Formel für die Moll-Tonleitern zweiter Klasse aus den Moll-Dreiklängen des Grundtones und der Oberdominante darstellen und wird zu diesem Ende auf folgende Weise vorgehen. Man bildet vor allem den Moll-Dreiklang des Grundtones $Q = C$. Es ist:

$$Q_0 = C = \zeta, \quad Q_9 = Dis = \frac{3^9 q^9 \zeta}{2^{14}} = 1{\cdot}201355 q^9 \zeta, \; Q_1 = G = \frac{3}{2} q \zeta = 1{\cdot}5 q \zeta;$$

hieraus bildet man sodann die Mollakkorde der Unterdominante *F* und der Oberdominante *G* durch Einsetzen der ihnen entsprechenden Schwingungszahlen $\frac{4}{3q}\zeta$ und $\frac{3}{2}q\zeta$ anstatt ζ; sie sind:

$$Q_{-1} = F = \frac{4}{3q}\zeta = 1{\cdot}3333\frac{\zeta}{2}, \; Q_8 = Gis = \frac{3^8 q^8 \zeta}{2^{12}} = 1{\cdot}601806 q^8 \zeta,$$

$$Q_0 = 2\zeta = C,$$

$$Q_1 = G = \frac{3}{3} q \zeta = 1{\cdot}5 q \zeta, \quad Q_{10} = Ais = \frac{3^{10} q^{10}}{2^{15}} \zeta = 1{\cdot}802032 q^{10} \zeta,$$

$$Q_2 = D = \frac{3^2 q^2 \zeta}{2^3} = 1{\cdot}125 q^2 \zeta.$$

Ordnet man endlich die Töne dieser 3 Akkorde nach der Größe ihrer Schwingungszahlen, so bekommt man zunächst die Moll-Tonleiter über dem Grundtone $Q_0 = C$

C	*D*	*Dis*	*F*	*G*	*Gis*	*Ais*	*C*
Q_0	Q_2	Q_9	Q_{-1}	Q_1	Q_8	Q_{10}	Q_0
ζ	$\frac{3^2}{2^3}q^2\zeta$	$\frac{3^9 q^9 \zeta}{2^{14}}$	$\frac{2^2\zeta}{3q}$	$\frac{3}{2}q\zeta$	$\frac{3^8 q^8 \zeta}{2^{12}}$	$\frac{3^{10} q^{10} \zeta}{2^{15}}$	2ζ
ζ	$1{\cdot}125 q^2\zeta$	$1{\cdot}201355 q^9\zeta$	$1.3333\frac{\zeta}{q}$	$1{\cdot}5 q\zeta$	$1{\cdot}601806 q^8\zeta$	$1{\cdot}802032 q^{10}\zeta$	$2\zeta.$

Hieraus folgt die mathematische Formel für die Molltonleiter über dem Grundtone Q_p durch Erhöhung sämtlicher Stellenzeiger um p Einheiten:

$$Q_p \quad Q_{p+2} \quad Q_{p+9} \quad Q_{p-1} \quad Q_{p+1} \quad Q_{p+8} \quad Q_{p+10} \quad Q_p.$$

Es wird auch hier, um den Zusammenhang zwischen den Moll- und Dur-Tonarten klarer ersichtlich zu machen, frommen, einige der Mollskalen in der musikalischen Bezeichnung vorzuführen, etwa die über den Grundtönen Q_0, Q_{-1}, $Q_{-2} \ldots Q_1$, $Q_2 \ldots$ aufgebauten.

C	*D*	*Dis*	*F*	*G*	*Gis*	*Ais*	*C*
F	*G*	*Gis*	*B*	*C*	*Cis*	*Dis*	*F*
B	*C*	*Cis*	*Es*	*F*	*Fis*	*Gis*	*B*
Es	*F*	*Fis*	*As*	*B*	*H*	*Cis*	*Es*
As	*B*	*H*	*Des*	*Es*	*E*	*Fis*	*As*
Des	*Es*	*E*	*Ges*	*As*	*A*	*H*	*Des*
Ges	*As*	*A*	*Ces*	*Des*	*D*	*E*	*Ges*
Ces	*Des*	*D*	*Fes*	*Ges*	*G*	*A*	*Ces*
Fes	*Ges*	*G*	*Bes*	*Ces*	*C*	*D*	*Fes*
Bes	*Ces*	*C*	*Eses*	*Fes*	*F*	*G*	*Bes*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
G	*A*	*Ais*	*C*	*D*	*Dis*	*Eis*	*G*
D	*E*	*Eis*	*G*	*A*	*Ais*	*His*	*D*
A	*H*	*His*	*D*	*E*	*Eis*	*Tibis*	*A*
E	*Fis*	*Fisis*	*A*	*H*	*His*	*Cisis*	*E*
H	*Cis*	*Cisis*	*E*	*Fis*	*Fisis*	*Gisis*	*H*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Ihre Betrachtung und der Vergleich mit den eben angeführten Dur-Tonleitern lehrt, daß es in der zweiten Klasse ganz andere Verhältnisse und ganz andere Verwandtschaften der Tonarten gebe, als in der ersten Klasse. So sind z. B. in allen Tonsystemen der ersten Klasse *C*-Dur und *A*-Moll verwandte Tonarten, und die *C*-Durskala

besteht aus genau denselben Tönen, wie die *A*-Molltonleiter. Von dieser Verwandtschaft ist in den Tonsystemen der zweiten Klasse keine Spur mehr zu entdecken. Denn es ist mit Ausnahme von *D* der *C*-Dur nicht ein einziger in der *A*-Moll-Leiter vorhanden; dagegen zeigt sich *C*-Dur mit *Bes*-Moll, und *A*-Moll mit *His*-Dur verwandt, weil die entsprechenden Tonleitern nur je um einen einzigen Ton voneinander verschieden sind. Eine leichte Untersuchung lehrt, daß die folgenden Dur-Tonarten den unmittelbar unten bezeichneten Molltonarten beziehungsweise verwandt sind in derselben Weise, wie *C*-Dur mit *A*-Moll in der ersten Klasse:

... *As* *Es* *B* *F* *C* *G* *D* *A* *E* *H* *Fis* ... Dur
= ... *Geses* *Deses* *Ases* *Eses* *Bes* *Fes* *Ces* *Ges* *Des* *As* *Es* ... Moll.

Kürzer jedoch und zweckmäßiger drückt man diese Verhältnisse allgemein in der arithmetischen Sprache folgendermaßen aus: In der ersten Klasse der Tonsysteme ist Q_p Dur mit Q_{p+3} Moll verwandt, denn die diesen Tönen entsprechenden Tonleitern:

$$\begin{array}{lllllllll} Q_p & Q_{p+2} & Q_{p+4} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p+3} & Q_{p+5} & Q_p & \text{Dur} \\ Q_{p+3} & Q_{p+5} & Q_p & Q_{p+2} & Q_{p+4} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p+3} & \text{Moll} \end{array}$$

bestehen genau aus denselben Tönen.

In der zweiten Klasse hingegen ist Q_p Dur mit Q_{p-9} Moll verwandt, denn die diesen Tönen angehörigen Leitern nämlich:

$$\begin{array}{lllllllll} Q_p & Q_{p+2} & Q_{p-8} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p-9} & Q_{p-7} & Q_p & \text{Dur} \\ Q_{p-9} & Q_{p-7} & Q_p & Q_{p-10} & Q_{p-8} & Q_{p-1} & Q_{p+1} & Q_{p-9} & \text{Moll} \end{array}$$

weichen bloß in einem Tone, der Q_{p+2} in der Dur- und Q_{p-10} in der Mollskala ist, voneinander ab.

Diese Verschiedenheit in der Verwandtschaft ist aber natürlich nicht die einzige zwischen den Tonsystemen der zwei Klassen bestehende. Diese ist vielmehr eine sehr mannigfache und tiefgreifende, kann jedoch in dieser Abhandlung nicht erschöpfend besprochen werden. Nur soviel mag zur oberflächlichen Orientierung des musikverständigen Lesers hier gesagt sein, daß, wenn er in dem folgenden Schema die ganze Tonsippschaft erster Klasse als nach den Verwandtschaftsgraden gruppiert erkennt

... *G* *D* *A* *E* *H* *Fis* *Cis*
... *Es* *B* *F* *C* *G* *D* *A* *E*
... *Ges* *Des* *As* *Es* *B* *F* *C*,

das ähnliche Schema in der zweiten Klasse folgendermaßen aussieht:

Ases *Eses* *Bes* *Fes* *Ces* *Ges* *Des*
Es *B* *F* *C* *G* *D* *A* *E*
Fis *Cis* *Gis* *Dis* *Ais* *Eis* *His.*

Die in diesen zwei Schematen gleichgelegenen Töne spielen auch in den beiden Klassen der Tonsysteme dieselbe Rolle.

Nimmt man allgemein an, der Musiker brauche $p+1$ Tonleitern in Dur sowohl wie auch in Moll, über den Grundtönen $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots Q_p$, um gute Musik machen zu können, so lehrt die Ansicht der allgemeinen Formeln im vierten Abschnitte für die Dur- und Moll-Skalen über dem Grundtone Q_p und der Vergleich mit jenen über dem Grundtone Q_0, daß hierzu die folgende Reihe fortlaufender Quinten, $p+20$ an der Zahl, notwendig ist:

$$Q_{-9} \quad Q_{-8} \ldots Q_0 \quad Q_1 \quad Q_2 \ldots Q_p \quad Q_{p+1} \ldots Q_{p+10},$$

also um 19 Töne mehr als Tonarten und Leitern. Hiebei sind überdies die Septimen noch gar nicht in Betracht gezogen und müssen genommen werden, wie sie in der betreffenden Tonart vorhanden sind. Dies leidet eine Ausnahme bei geschlossenen Tonsystemen, bei welchen auch hier ein sehr bedeutendes Ersparnis an Tonmitteln erzielt werden kann. So oft es nämlich gelingt, ein $(p+1)$ stufiges geschlossenes Tonsystem aufzufinden, genügt dasselbe vollkommen zur Aufstellung von $p+1$ Moll- und Dur-Tonleitern, die mit allen Intervallen gleichmäßig versehen sind.

Es entsteht also die nicht unwichtige Frage: Gibt es geschlossene Tonsysteme der zweiten Klasse, und welche sind ihre Stufenzahlen? Diese Frage zu beantworten erwäge man, daß in einem $(p+1)$stufigen geschlossenen Tonsysteme die Bestandtöne eine geometrische Progression bilden:

$$\zeta \quad \alpha\zeta \quad \alpha^2\zeta \quad \alpha^3\zeta \ldots \alpha^p\zeta, \quad \text{wo} \quad \alpha^{p+1} = 2 \quad \text{ist.}$$

Ein jedes in der Tonleiter vorkommende Intervall erhält von den $p+1$ Stufen, in welche die Oktave zerfällt, eine bestimmte, notwendigerweise ganze Zahl. Das kleinste der in einer Tonleiter zweiter Klasse vorkommende Intervall ist nun vermöge der kurz vorher angestellten Betrachtungen das zwischen einem großen und kleinen ganzen Ton vorhandene. Angenommen, es eigne sich k Tonstufen an, der kleine Halbton hingegen nehme von diesen Stufen m für sich in Anspruch, so bekommt der große Halbton dem oben Gesagten nach $(m+2k)$ Stufen. Der kleine ganze Ton erhält, weil er aus den beiden Halbtönen zusammengesetzt ist, $(2m+2k)$ Stufen. Also besitzt der große ganze Ton die Stufenzahl $2m+3k$.

In der Tonleiter zweiter Klasse kommen, sowie in der reinen Tonleiter, 3 große ganze, 2 kleine ganze, und 2 große Halbtöne vor; sie erhalten zusammen genommen $12m + 17k$ Stufen, oder $12(m + k) + 5k$ an der Zahl. Sie machen auch eine Oktave aus, man hat daher die Gleichung:

$$p + 1 = 12(m + k) + 5k, \tag{47}$$

in welcher für k und m beliebige ganze und positive Werte gesetzt werden können.

Wir setzen erstens $k = 0$, so ergibt sich die erste Gattung der geschlossenen Tonsysteme der zweiten Klasse, die für

$$m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots$$
$$p + 1 = 12 \quad 24 \quad 36 \quad 48 \ldots \text{stufig}$$

ausfallen; sie sind alle von dem 12stufigen chromatischen Systeme nicht verschieden, welches mithin auch in der zweiten Klasse für sich eine Gattung darstellt.

Die zweite Gattung geschlossener Tonsysteme erhält man für $k = 1$; sie besitzen beziehentlich für

$$m = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \ldots$$
$$p + 1 = 12(m + 1) + 5 = 17 \quad 29 \quad 41 \quad 53 \quad 65 \quad 77 \quad 89 \quad 101 \ldots \text{Stufen.}$$

Die ihnen entsprechenden Quintentemperaturen q erhält man, wenn man der Reihe nach setzt:

$$Q_0 = Q_{17} \quad Q_{29} \quad Q_{41} \quad Q_{53} \quad Q_{65} \quad Q_{77},$$

d. h.

$$1 = 0{\cdot}962169\, q^{17}, 0{\cdot}975296\, q^{29}, 0{\cdot}988602\, q^{41}, 1{\cdot}00209\, q^{53}, 1{\cdot}015762\, q^{65}, 1{\cdot}029620\, q^{77},$$

woraus

$$q = 1{\cdot}002236,\ 1{\cdot}000863,\ 1{\cdot}000278,\ 0{\cdot}999961,\ 0{,}999759,\ 0{\cdot}999621 \text{ usw.}$$

folgt.

Eine dritte Gattung geschlossener Tonsysteme liefert die Annahme $k = 2$, der die Stufenzahl: $p + 1 = 12(m + 2) + 10$ entspricht, welcher nun wieder für

$$m = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \ldots$$
$$p + 1 = 12(m + 2) + 10 = 34 \quad 46 \quad 58 \quad 70 \quad 82 \quad 94 \quad 106 \quad 118 \quad 130 \ldots$$

stufige Tonsysteme entsprechen. Sie sind nicht alle von den der zweiten Gattung angehörigen verschieden, das 34stufige ist vielmehr identisch mit dem 17stufigen, das 58-, 82-, 106-, 130 ... stufige be-

ziehentlich identisch mit dem 29-, 41-, 53-, 65stufigen zweiter Gattung, so daß als wesentlich zur dritten Gattung gehörig die den Annahmen

$$m = 1,\quad 3,\quad 5,\quad 7\ldots 2n+1$$

entsprechenden übrig bleiben, und also die Formel, welche nur Tonsysteme dritter Gattung liefert, geschrieben werden kann:

$$p+1 = 24(n+2)-2.$$

In der Tat ergibt diese für die folgenden Werte von n die entsprechenden Stufenzahlen:

$$\begin{aligned} n &= 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ \ldots,\\ p+1 = 24(n+2)-2 &= 46,\quad 70,\quad 94,\quad 118,\quad 142,\quad 166,\ \ldots,\end{aligned}$$

welche Tonsysteme der dritten Gattung angehören, die unter den zur zweiten Gattung zählenden nicht angetroffen werden. Sie können alle als in die zweite Gattung interpolierte Tonsysteme betrachtet werden.

Das 46stufige fällt seiner Quintentemperatur, mithin auch seinen übrigen Eigenschaften nach zwischen das 17- und 29stufige zweiter Gattung, das 70stufige zwischen das 29- und das 41stufige, das 94-stufige zwischen das 41- und 53stufige, das 118stufige zwischen das 53- und 65stufige zweiter Gattung. Wenn mithin die Quintentemperatur q des 53stufigen Tonsystems vielleicht für zu klein, die des 65stufigen dagegen aus irgend einem Grunde als zu hoch erachtet werden sollte, so bietet sich zunächst das 118stufige Tonsystem als möglicherweise entsprechend an.

Die Quintentemperaturen q dieser geschlossenen Tonsysteme dritter Gattung erhält man wieder, wenn man der Reihe nach tetzt:

$$Q_0 = \quad Q_{46},\quad Q_{70},\quad Q_{94},\quad Q_{118},$$

das heißt $\quad 1 = 0.938400q^{46},\quad 0.964180q^{70},$

woraus $\quad q = 1.0002536,\quad 1.000521$

berechnet wird. Nun wäre eine vierte Gattung geschlossener Tonsysteme an der Reihe, erhalten durch die Voraussetzung $k=3$, der die Stufenzahl

$$p+1 = 12(m+4)+3$$

entspricht. Diese Systeme zählen beziehentlich:

$$\begin{aligned} m &= 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots\\ p+1 = 12(m+4)+3 &= 51,\ 63,\ 75,\ 87,\ 99,\ 111,\ 123,\ 135,\ 147,\ 159,\ 171,\ \ldots\end{aligned}$$

Stufen. Von ihnen ist das 51-, 87-, 123-, 159stufige mit dem 17-, 29-, 41-, 53-, ... stufigen der zweiten Gattung identisch. Die übrigen

sind zwischen die Tonsysteme zweiter Gattung zu zweien und zweien eingeschoben.

So fortschreitend und der Reihe nach $k = 4, 5, 6, \ldots$ annehmend bekäme man eine 5., 6., 7., ... usw. Gattung geschlossener Tonsysteme von immerfort zunehmenden Stufenzahlen, die zum Teil sich zwischen dieselben einschieben. Begreiflicherweise behaupten die früheren vor den späteren Gattungen angehörigen Tonsysteme unter übrigens gleichen Umständen wegen der namhaft geringeren Stufenzahl den Vorzug, der übrigens in dem Falle, wo man alle Töne zu verwenden nicht in der Lage ist, an Bedeutung sehr verlieren kann, und auch dann wirklich verliert, wenn man wegen der Einrichtung der Tastatur von der geschlossenen Beschaffenheit des Tonsystems keinen Gebrauch machen kann.

Wir wollen nun mit einigen Tonsystemen, in welchen die Summe der Quadrate aller mit ihren Gewichtszahlen multiplizierten Verfälschungen der konsonanten Intervalle ein Minimum ist, einige Bekanntschaft suchen, so wie wir dies bei dem Tonsysteme der ersten Klasse getan haben, bemerken aber hier, daß man gerade wie bei den Tonsystemen erster Klasse für die Septime eine doppelte Wahl treffen kann. So wie sich nämlich dort als Septimen von *C* zwei Töne, nämlich *B* und *Ais* darbieten, von welchen der erste diese Stelle im 12stufigen Systeme wirklich übernimmt, während sich für die große Mehrzahl der übrigen Tonsysteme erster Klasse *Ais* besser verwerten läßt, so verhält sich die Sache in der zweiten Klasse auch. Es bieten sich als Septimen dar erstens die vierzehnte vom Grundtone *C* gezählte Quarte *Ceses*; wählt man sie, so ergeben sich für die Temperaturen der konsonanten Hauptintervalle die Gleichungen (45), d. h.

$$T = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8 q^8}, \quad t = \frac{5 \cdot 3^8 q^9}{2^{15}}, \quad s = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14} \cdot q^{14}}.$$

Man kann aber noch einem anderen Tone die Rolle der Septime übertragen, nämlich der neununddreißigsten vom Grundtone *C* aus gezählten Quinte, deren musikalischer Name *Eisisisisis* ist. Die Schwingungszahl dieses Reintones entnimmt man der Quintentabelle, welche $Q_{39} = \frac{3^{39}}{2^{61}} = 1.757515\zeta$ ist.

Geht man nun von den reinen Tönen zu temperierten über, so erhält einerseits die 39. Quinte den Faktor q^{39}, während andererseits die reine Septime mit der Schwingungszahl $\frac{7}{4}\zeta$ in die temperierte $\frac{7}{4}s\zeta$ übergeht. Man hat also hier:

$$\frac{7}{4}s = \frac{3^{39}}{2^{61}} \cdot q^{39} \quad \text{oder} \quad s = \frac{3^{39}}{7 \cdot 2^{59}} q^{39}.$$

Diese zweite Septime ist viel weiter vom Grundtone entfernt als die erste, erweist sich also nur brauchbar bei solchen Tonsystemen, die eine sehr bedeutende Stufenzahl oder einen sehr großen Tonreichtum besitzen.

Setzen wir jetzt, von den Temperaturen zu den Verfälschungen übergehend,

$$q = 1 + \varkappa, \quad T = 1 + \theta, \quad t = 1 + \tau, \quad s = 1 + \sigma;$$

führen wir diese Werte in die obigen Formeln ein und lassen, weil $\varkappa$ der Natur der Sache nach einen sehr kleinen Bruch vorstellt, die höheren Potenzen desselben weg, so ergeben sich für die Verfälschungen der Hauptintervalle folgende Gleichungen:

$$\theta = \frac{2^{15}}{5 \cdot 3^8}\left[-\frac{37}{2^{15}} - 8\varkappa\right],$$

$$\tau = \frac{5 \cdot 3^8}{2^{15}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9\varkappa\right],$$

$$\sigma = \frac{2^{25}}{7 \cdot 3^{14}}\left[\frac{73649}{2^{25}} - 14\varkappa\right]$$

oder, wenn die 39. Quinte als Septime beliebt wird:

$$\sigma = \frac{3^{39}}{7 \cdot 2^{59}}\left[\frac{17329886895011851}{3^{39}} + 39\varkappa\right].$$

Nennen wir jetzt die Gewichte der Verfälschungen der Quinte, großen Terz, kleinen Terz, Septime beziehentlich $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$, so ist die Summe der Quadrate, die ein Minimum werden soll, folgende:

$$\sum = \mathfrak{q}^2\varkappa^2 + \mathfrak{T}^2\theta^2 + \mathfrak{t}^2\tau^2 + \mathfrak{s}^2\sigma^2,$$

und man hat im Falle des Minimums $\frac{d\sum}{d\varkappa} = 0$ oder, da

$$\frac{d\theta}{d\varkappa} = -\frac{2^{18}}{5 \cdot 3^8}, \quad \frac{d\tau}{d\varkappa} = \frac{5 \cdot 3^{10}}{2^{15}}, \quad \frac{d\sigma}{d\varkappa} = -\frac{2^{26}}{3^{14}},$$

bezw. wenn die zweite Septime vorgezogen wird,

$$\frac{d\sigma}{d\varkappa} = \frac{39 \cdot 3^{39}}{7 \cdot 2^{59}}$$

ist, eine der folgenden zwei Bestimmungsgleichungen für $\varkappa$

$$\mathfrak{q}^2\varkappa + \frac{2^{33}\mathfrak{T}^2}{5^2 3^{16}}\left[\frac{37}{2^{15}} + 8\varkappa\right] + \frac{5^2 \cdot 3^{18}\mathfrak{t}^2}{2^{30}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9\varkappa\right] - \frac{2^{51}\mathfrak{s}^2}{7 \cdot 3^{28}}\left[\frac{73649}{2^{25}} - 14\varkappa = 0\right.$$

oder für den Fall der zweiten Septime

$$\mathfrak{q}^2\varkappa + \frac{2^{33}\mathfrak{T}^2}{2^2 \cdot 3^{16}}\left[\frac{37}{2^{15}} + 8\varkappa\right] + \frac{5^2 \cdot 3^{18}\mathfrak{t}^2}{2^{30}}\left[\frac{37}{5 \cdot 3^8} + 9\varkappa\right]$$
$$+ \frac{39 \cdot 3^{78}\mathfrak{s}^2}{7^2 \cdot 2^{118}}\left[\frac{17329886895011851}{3^{39}} + 39\varkappa\right] = 0.$$

Durch die Auflösung dieser beiden Gleichungen gewinnt man die vorteilhafteste Verfälschung der Quinte, welche das wohlklingendste Tonsystem gibt, ausgedrückt durch eine der folgenden beiden Formeln:

$$\varkappa = -\frac{2^{48}\cdot 3^{12}\cdot 7\cdot 37\mathfrak{T}^2 + 5^3\cdot 3^{36}\cdot 7\cdot 37\mathfrak{t}^2 - 2^{56}\cdot 5^2\cdot 73649\mathfrak{s}^2}{2^{30}\cdot 3^{28}\cdot 5^2\, 7\mathfrak{q}^2 + 2^{66}\cdot 3^{12}\cdot 7\mathfrak{T}^2 + 5^4\cdot 3^{48}\cdot 7\mathfrak{t}^2 + 2^{82}\cdot 5^2\cdot 7\mathfrak{s}^2},$$

(48) oder für den Fall der entlegeneren Septime:

$$\varkappa = -\frac{2^{136}\cdot 7^2\cdot 37\mathfrak{T}^2 + 2^{88}\cdot 3^{36}\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 37\mathfrak{t}^2 + 3^{56}\cdot 5^2\cdot 13\cdot 17329886895011851\mathfrak{s}^2}{2^{118}\cdot 3^{16}\cdot 5^2\cdot 7^2\mathfrak{q}^2 + 2^{154}\cdot 7^2\mathfrak{T}^2 + 2^{88}\cdot 3^{36}\cdot 5^4\cdot 7^2\mathfrak{t}^2 + 3^{96}\cdot 5^2\cdot 13^2\mathfrak{s}^2}.$$

Wenden wir uns zuvörderst an die erste dieser beiden Formeln, welche *Ceses* als die Septime von *C* auffaßt, und setzen wir in derselben erst $\mathfrak{q}$, dann $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{t}$ und zuletzt $\mathfrak{s}$ unendlich, gewissermaßen nach dem Tonsysteme fragend, in welchem einmal die Quinte, dann die große Terz, sodann die kleine Terz und schließlich die Septime rein und untemperiert sind, so erhält man diesen vier Annahmen entsprechend

$$\begin{aligned}
&\text{für } \mathfrak{q} = \infty, && \varkappa = 0,\\
&\text{„} \quad \mathfrak{T} = \infty, && \varkappa = -\frac{37}{2^{18}} = -\frac{37}{262144} = -\frac{1}{7085},\\
&\text{„} \quad \mathfrak{t} = \infty, && \varkappa = -\frac{37}{5\cdot 3^{10}} = -\frac{37}{295245} = -\frac{1}{7980},\\
&\text{„} \quad \mathfrak{s} = \infty, && \varkappa = \frac{73649}{7\cdot 2^{26}} = \frac{73649}{469762048} = +\frac{1}{6378}.
\end{aligned}$$

Bei den Tonsystemen, welche das entlegenere *Eis*[5] als Septime erwählen, gestalten sich die Werte, welche die zweite Formel (48) gibt, in den obigen vier Fällen folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\text{für } \mathfrak{q} = \infty, && \varkappa = 0,\\
&\text{„} \quad \mathfrak{T} = \infty, && \varkappa = -\frac{37}{2^{18}} = -\frac{1}{7085},\\
&\text{„} \quad \mathfrak{t} = \infty, && \varkappa = -\frac{37}{9\cdot 3^{10}} = -\frac{1}{7980},\\
&\text{„} \quad \mathfrak{s} = \infty, && \varkappa = \frac{17329886895011851}{3^{40}\cdot 13} = -\frac{1}{9120}.
\end{aligned}$$

In beiden Fällen sind also die ersten drei Werte von $\varkappa$ gleich, nur für $\mathfrak{s} = \infty$ sind sie verschieden.

Multipliziert man Zähler und Nenner der ersten dieser vier verschiedenen Werte von $\varkappa$ mit $\mathfrak{q}^2$, des zweiten mit $\mathfrak{T}^2$, des dritten mit $\mathfrak{t}^2$ des vierten mit $\mathfrak{s}^2$, addiert sodann alle Zähler der auf diese Weise gewonnenen Brüche und auch alle Nenner, konstruiert hieraus einen Bruch, dessen Zähler die Summe aller Zähler und dessen Nenner die Summe aller Nenner ist, so erhält man bekanntlich einen Mittelwert

zwischen den vier vorliegenden Werten von x, der größer ist als der kleinste und kleiner als der größte derselben. Dieser Mittelwert ist aber offenbar der allgemeine Wert der zweiten Formel (48) für x selbst, mithin ist in allen Tonsystemen zweiter Klasse, welche *Eis*[5] zur Septime erwählen, die Verfälschung der Quinte x zwischen folgenden sehr eng aneinander liegenden Grenzen eingeschlossen:

$$-\frac{1}{7085} < x < 0.$$

Und läßt man die Verfälschung x von Null aus allmählich nach der negativen Seite abnehmen, so begegnet man zuert dem Werte $x = -\frac{1}{9120}$, welcher das Tonsystem der reinen Septime gibt; dann kommt man zu dem Werte $x = -\frac{1}{7980}$, welchem das Tonsystem der reinen Kleinterzen entspricht, schließlich gelangt man zu $x = -\frac{1}{7085}$, zu dem das Tonsystem der Großterzen gehört, und mit welchem Werte von x die Reihe derjenigen Werte geschlossen ist, die überhaupt aus der Formel (48) für die verschiedensten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}$ gezogen werden können.

Ein Tonsystem mit sehr reiner Quinte, verfälscht nämlich nur mit $\frac{1}{25382}$ der Schwingungszahl haben wir bei Bildung der Gattungen geschlossener Tonsysteme zweiter Klasse in dem 53stufigen System kennen gelernt; es gehört zu den Systemen, welche *Ceses* als Septime haben. Diese scheinen mithin von allen Werten von x von Null an bis $x = -\frac{1}{9120}$ Besitz zu nehmen, und von da geht erst der Bereich derjenigen Tonsysteme an, für welche *Eis*[5] als Septime dient. Hieraus geht hervor, daß sich die Grenzen der Werte von x für die in Rede stehenden Tonsysteme noch enger zusammenziehen lassen; man hat nämlich

$$-\frac{1}{7085} < x < -\frac{1}{9120}.$$

Um zu untersuchen, zwischen welchen Grenzen die Verfälschungen der übrigen Intervalle, nämlich θ, τ und σ enthalten sind, wenn x zwischen den oben angegebenen Grenzen bleibt, setzt man für x zuerst eine, dann die andere seiner beiden Grenzen in die Formeln für θ, τ und σ ein und berechnet die Werte dieser letzteren. Man gewinnt so

$$\text{für } x = -\frac{1}{7085}, \quad \theta = 0, \quad \tau = -\frac{1}{7085}, \quad \sigma = -\frac{1}{811},$$

$$\text{„} \quad x = -\frac{1}{9120}, \quad \theta = -\frac{1}{3973}, \quad \tau = \frac{1}{7082}, \quad \sigma = 0.$$

Während also zwischen diesen Grenzen die große Terz immer ein wenig zu tief bleibt um eine Größe, welche $\frac{1}{3973}$ nicht überschreitet, ist die kleine Terz anfangs ungefähr um die Hälfte dieses Betrages zu tief und wird dann um gleichviel zu hoch. Die Septime bleibt immer zu tief, aber auch nur um einen sehr geringen Bruchteil ihrer Schwingungszahl.

Der bloße Anblick der kleinen gebrochenen Werte, die aus den Formeln (48) gewonnen werden, lehrt, daß es unter den Tonsystemen zweiter Klasse und vorzugsweise unter denjenigen, die sich der entlegenen Septime Eis^5 bedienen, sehr reine, wohlklingende gibt, bei welchen die Verfälschung der konsonanten Intervalle nur beiläufig $\frac{1}{8000}$ der Schwingungszahl beträgt, also selbst mit den allerfeinsten Beobachtungsmitteln nicht mehr wahrnehmbar ist. Diese Reinheit kommt aber leider teuer zu stehen, indem ein sehr beträchtlicher Aufwand an Tonmitteln damit verknüpft ist und durch die jedermann zu Gebote stehenden Stimmmittel nicht zu erreichen ist und, wenn zufällig erreicht, auf keine Weise vom menschlichen Ohr beurteilt werden kann.

Suchen wir nun einige dieser Tonsysteme mehr im besonderen kennen zu lernen. Das mit vollkommen reinen Quinten ist bereits oben angeführt worden, wobei wir gesehen haben, daß es ein sehr brauchbares Tonsystem sei, welches nur um $\frac{1}{886}$ temperierte Terzen enthält.

Das 53stufige System haben wir als ein solches kennen gelernt, welches die Quinte nur um den sehr kleinen Bruchteil $\frac{1}{25882}$ zu tief nimmt. Man hat also in diesem 53stufigen System $q = \frac{25881}{25882}$.

Rechnet man hiezu die Temperaturen der übrigen konsonanten Intervalle nach den Formeln (45), so erhält man

$$T = \frac{1229}{1230} = 1 - \frac{1}{1230}, \quad t = \frac{1293}{1292} = 1 + \frac{1}{1292}, \quad s = \frac{364}{363} = 1 + \frac{1}{363}.$$

Der Anblick dieser Zahlen lehrt, daß man hier ein Tonsystem hat, welches bescheidene Ansprüche vollkommen befriedigen kann. Es verbindet mit beinahe ganz reinen Quinten eine große und kleine Terz, die 10- bis 12mal reiner sind als die Terzen des chromatischen Systems. Die Septime ist wohl um etwas, einem feinen Gehöre bereits Merkliches zu hoch, sie verträgt dies aber viel besser als eine gleich große Verfälschung in entgegengesetzter Richtung, was in der Natur dieses konsonanten Intervalles zu liegen scheint, sowie auch ein geringes

Schweben dieses Intervalles dem psychischen Charakter desselben sehr gut entspricht und dem Wohlklang keinen Eintrag tut. Petzval hielt es daher der Mühe wert, dieses unstreitig sehr brauchbare System zweiter Klasse einer ausführlichen Berechnung zu unterwerfen. Da es ein geschlossenes 53stufiges Tonsystem ist, so sind seine nach der Größe der Schwingungszahlen geordneten Töne im musikalischen Sinne äquidistant, d. h. diese Schwingungszahlen bilden eine geometrische Progression, deren erstes Glied ζ und deren Exponent $\sqrt[53]{2}$ ist. Die von Petzval berechnete Tabelle ist die nachstehende. In der zweiten Spalte befinden sich die musikalischen Namen der Tonstufen, in der dritten ihre arithmetischen Benennungen, in der vierten die Logarithmen der Schwingungszahlen, in der fünften die Schwingungszahlen selbst in Form von Dezimalbrüchen, in der sechsten ihre einfachsten angenäherten Werte in Form eines gewöhnlichen Bruches, in der siebenten die Logarithmen der reziproken Werte der Schwingungszahlen, oder was dasselbe ist, die Logarithmen der Saitenlängen, die Saitenlänge für C gleich Eins genommen, endlich in der achten die Saitenlängen selbst. (Siehe S. 392 f.)

In diesem 53stufigen Tonsysteme besitzt der große ganze Ton 9 Stufen, der kleine ganze Ton 8 Stufen, der große Halbton hat 5 Stufen, der kleine Halbton hat deren 3, der große und kleine Halbton geben zusammen $5 + 3 = 8$, also einen kleinen Ganzton, wie es sein muß. Die Schwingungszahlen dieser verschiedenen Fundamental-Intervalle sind von den in der reinen Tonleiter vorhandenen nur außerordentlich wenig verschieden. So hat der aus 3 Stufen bestehende Halbton das Schwingungsverhältnis mit $1.040014 = \frac{26}{25}$, während in der reinen Tonleiter dieser Halbton $\frac{25}{24} = 1.041667$ ist; der große Halbton, der aus fünf Stufen zusammengesetzt ist, hat die Schwingungszahl 1.067577, eine Zahl, die sich von dem Schwingungsverhältnisse in der reinen Tonleiter, nämlich $\frac{15}{16} = 1.066667$ noch weniger unterscheidet. Mit noch größerer Genauigkeit sind die beiden Ganztöne in diesem System wiedergegeben, nämlich der kleine $= 1.110295$, was beinahe genau $\frac{10}{9}$, und der große $= 1.124911$, was beinahe genau $\frac{9}{8}$ ist. Die beiden Terzen sind von genügender, Quinte und Quarte aber von ausgezeichneter Reinheit. An brauchbaren Intervallen verschiedener Art, die durch einfache Brüche ausgedrückt sind, ist ein namhafter Überfluß vorhanden. Daran, daß die Septime etwas stärker temperiert ist, wird wohl kein Musiker Anstand nehmen, weil ja ein jeder dieses Intervall mißachtet und nicht einmal für eine Konsonanz gelten läßt.

53 stufiges Tonsystem II. Klasse.

r			$\log \sqrt[53]{2^r} =$	$\sqrt[53]{2^r} =$		Saitenlänge	
0	*C*	Q_0	0·0000000	1·000000	1	1·00000	
1	*His*	Q_{12}	0·0056798	1·013164	$\frac{77}{76}$	0·98701	
2	*Ais*³	Q_{24}	0·0113596	1·026501	$\frac{39}{38}$	0·97418	
3	*Es*³	Q_{-17}	0·0170394	1·040014	$\frac{26}{25}$	0·96153	
4	*Des*	Q_{-5}	0·0227192	1.053705	$\frac{39}{37}$	0·94903	
5	*Cis*	Q_7	0·0283991	1·067577		0·93670	
6	*His*²	Q_{14}	0·034078	1·081630		0·92453	
7	*Fes*³	Q_{-22}	0·0397587	1·095869		0 91252	
8	*Es*²	Q_{-10}	0·0454385	1·110295		0·90066	
9	*D*	Q_2	0·0511183	1·124911	$\frac{9}{8}$	0·88896	
10	*Cis*²	Q_{14}	0·0567981	1·139720		0·87741	
11	*His*³	Q_{26}	0·0624779	1·154723		0·86601	*Ges*⁴ $= Q_{-27}$
12	*Fes*²	Q_{-15}	0·0681577	1·169924		0·85476	
13	*Es*	Q_{-3}	0·0738375	1·185325	$\frac{31}{26}$	0·84365	
14	*Dis*	Q_9	0·0795174	1·200929	$\frac{6}{5}$	0·83269	
15	*Cis*³	Q_{21}	0·0851972	1·216739		0·82187	
16	*Ges*³	Q_{-20}	0·0908770	1·232756		0·81119	
17	*Fes*	Q_{-8}	0·0965568	1·248984		0·80065	
18	*E*	Q_4	0·1022366	1·265426		0·79025	
19	*Dis*²	Q_{16}	0·1079164	1·282084		0·77998	
20	*As*⁴	Q_{-25}	0·1135962	1·298961		0·76985	*Cis*⁴ $= Q_{28}$
21	*Ges*²	Q_{-13}	0·1192760	1·316061		0·75984	
22	*F*	Q_{-1}	0·1249558	1·333385		0·74997	
23	*Eis*	Q_{11}	0·1306356	1·350939		0·74023	
24	*Dis*³	Q_{23}	0·1363154	1·368723		0·73061	
25	*As*³	Q_{-18}	0·1419953	1·386741		0·72112	

r			$\log \sqrt[53]{2^r} =$	$\sqrt[53]{2^r} =$		Saitenlänge	
26	*Ges*	Q_{-6}	0·1476751	1·404996		0·71175	
27	*Fis*	Q_{6}	0·1533549	1·423491		0·70250	
28	*Eis²*	Q_{18}	0·1590347	1·442230		0·69337	
29	*Bes³*	Q_{-23}	0·1647145	1·461216		0·68436	
30	*As²*	Q_{-11}	0·1703943	1·480452		0·67547	
31	*G*	Q_{1}	0·1760741	1·499941		0·66669	
32	*Fis²*	Q_{13}	0·1817540	1·519686		0·65803	
33	*Eis³*	Q_{25}	0·1874338	1·539692		0·64948	$Ces^4 = Q_{-28}$
34	*Bes²*	Q_{-16}	0·1931136	1·559960		0·64104	
35	*As*	Q_{-4}	0·1987934	1·580496		0·63271	
36	*Gis*	Q_{8}	0·2044732	1·601302	$\frac{8}{5}$	0·62449	
37	*Fis³*	Q_{20}	0·2101530	1·622382	$\frac{13}{8}$	0·61638	
38	*Ces³*	Q_{-21}	0·2158328	1·643739		0·60837	
39	*Bes*	Q_{-9}	0·2215126	1·665377		0·60046	
40	*A*	Q_{3}	0·2271925	1·687301		0·59266	
41	*Gis²*	Q_{15}	0·2328723	1·709512		0·58496	
42	*Fis⁴*	Q_{27}	0·2385521	1·732017		0·57736	$Des^4 = Q_{-26}$
43	*Ces²*	Q_{-14}	0·2442319	1·754817		0·56986	
44	*B*	Q_{-2}	0·2499116	1·777917		0·56246	
45	*Ais*	Q_{10}	0·2555914	1·801323		0·55515	
46	*Gis³*	Q_{22}	0·2612713	1·825036		0·54793	
47	*Des³*	Q_{-19}	0·2669511	1·849060		0·54082	
48	*Ces*	Q_{-7}	0·2726309	1·873402		0·53379	
49	*H*	Q_{5}	0·2783108	1·898064		0·52685	
50	*Ais²*	Q_{17}	0·2839906	1·923050		0·52001	
51	*Gis⁴*	Q_{29}	0·2896704	1·948365		0·51325	$Es^4 = Q_{-24}$
52	*Des²*	Q_{-12}	0·2953502	1·974014		0·50658	
53	*C*	Q_{0}	0·3010300	2·000000		0·50000	

Es ist noch die Frage zu beantworten, auf welche Weise die Namen der 53 Tonstufen bestimmt worden sind. Es reicht hierzu die Kenntnis der folgenden zwei Umstände aus. Erstens hat der ganze Ton neun Stufen; hieraus folgt, daß die von *C* aus gezählte neunte Stufe den Namen *D* tragen wird, von da aus heißt die neunte, also von *C* aus die neunzehnte Stufe *E*, von da aus weitere je neun Stufen gezählt, gibt *N*⁰ 27 *Fis*, ebenso *N*⁰ 36 *Gis*, *N*⁰ 45 *Ais*; die 54te ist aber gleichbedeutend mit der ersten Stufe und heißt *His*. Der zweite Umstand ist, daß die Silbe *is*, zu irgend einem Tone hinzugesetzt, eine Erhöhung um genau einem großen Halbton, also um 5 Stufen bedeutet; man zähle also von *C* aus 5, 10, 15, 20, 25, usw. Stufen, und man erhält der Reihe nach die Töne: *Cis*, *Cisis*, Cis^3, Cis^4 usf. Auf dieselbe Weise erhält man von *D* je 5 Stufen zählend *Dis*, *Disis*, Dis^3, Dis^4, usf. Endlich bedeutet die angefügte Endsilbe *es* eine Erniedrigung um 5 Stufen; daher man nach rückwärts fünf Stufen zählend jedesmal die Endsilbe *es* mit anfügen kann. Zudem weiß man, daß die große Terz aus einem großen und einem kleinen Ganzton zusammengesetzt ist, also $9 + 8 = 17$ Stufen hat; die kleine Terz besteht aus einem großen ganzen und aus einem kleinen Halbton, hat also $9 + 5 = 14$ Stufen; die Quinte ist zusammengesetzt aus einer großen und einer kleinen Terz, befindet sich daher auf der $17 + 14 = 31$ten Stufe, dorthin setze man also *G* usw.

Hat man sich diesen ganzen Reichtum von 53 Tönen an irgend einem Instrumente, wie Orgel oder Harmonium verschafft, so hat man 53 Dur- und Molltonarten, bei welchen man im Quintenzirkel herumwandern kann, und es ist nicht notwendig, sich die Töne in einer Tabelle zurechtzulegen, um in derselben ersichtlich zu machen, über welche Intervalle man in einer jeden Tonart verfügt, weil man in allen Tonarten alle Intervalle hat. Kann man aus irgend einer Ursache von allen 53 Tönen nicht Gebrauch machen, muß man sich vielmehr auf eine geringere Anzahl beschränken, so ist es unerläßlich, sich diesen Vorrat zum musikalischen Gebrauche gewählter Töne, die eine zusammenhängende Quintenreihe zu bilden haben, tabellarisch zurechtzulegen.

Zur Beurteilung jedoch, welche geringste Anzahl von Tönen hinreiche, um gute Musik machen und namentlich die Meisterwerke neuerer Tonsetzer vortragen zu können, bieten die bisher gewonnenen Einsichten nicht genügenden Anhalt, und ist es notwendig sich einige, wenn auch nur oberflächliche Kenntnisse der Harmonielehre zu verschaffen. Nur ist die gewöhnliche Harmonielehre, wie sie in verschiedenen Werken über diesen Gegenstand angetroffen wird, bloß für das 12stufige Tonsystem gültig; für denjenigen, der sich einen weit größeren Ton-

reichtum gestatten kann, und darunter sogar neue Konsonanzen wie die reine Septime, ist sie zu enge gehalten und muß notwendig eine Erweiterung erfahren. Petzval hat sich denn auch zu diesem Ende mit den *mathematischen Grundsätzen, welche zur Bildung einer neuen Harmonielehre* nötig sind, befaßt. Von diesen Arbeiten ist indessen der größte Teil verloren gegangen, und bilden die gefundenen handschriftlichen Aufzeichnungen nur einzelne Bruchstücke davon.

Im Zusammenhange mit dieser Harmonielehre steht auch die von ihm ersonnene *rationelle Tastatur*, von welcher, weil sie sich gleichfalls auf die vorgetragene Theorie bezieht, und weil Petzval diesen Gegenstand in seinen Vorträgen mit besonderer Vorliebe zu behandeln pflegte, einiges im nächsten Abschnitte Platz finden mag.

VI. Die rationelle Tastatur.

Es ist eine allgemein anerkannte Tatsache, daß, wenn man aus einer beträchtlichen Anzahl von Elementen beliebiger Art die mannigfaltigsten Kombinationen zu machen und Gruppen zu zweien, dreien, vieren usf. auf die verschiedenste Weise zu bilden hat, man Sorge tragen muß, sich diese Elemente auf die vorteilhafteste Weise, zum bequemen Gebrauche geordnet, zurechtzulegen. Dies ist vorzugsweise mit den zum musikalischen Gebrauche bestimmten Tönen der Fall. Die rationellste Anordnung derselben kann dann auch als das Urbild einer rationellen Tastatur betrachtet werden.

Petzval bezeichnet diejenige als die rationelle Tastatur, welche die geringste Anzahl möglichst bequemer Fingersätze in den verschiedenen Tonarten, in denen Musikstücke auf derselben vorgetragen werden, zuläßt. Sie hat zu der Tastatur des gebräuchlichen Klaviers sozusagen den direkten Gegensatz zu bilden. Denn während bei diesem Instrumente zu dem Vorrate von zwölf Tönen, der eine wahre Tonarmut genannt werden muß, nicht weniger als 12 verschiedene, meist sehr unbequeme Fingersätze benötigt werden, braucht man bei allen Tonsystemen der ersten Klasse nur *einen einzigen* sehr bequemen Fingersatz, wenn man die rationelle Tastatur annimmt. Sie ist so beschaffen, daß, wenn man ein Musikstück in irgend einer Tonart einstudiert hat, man es auch in allen übrigen Tonarten, wie viele deren im Tonsysteme auch sein mögen, ohne Schwierigkeit und genau mit denselben Bewegungen der Hand abspielen kann.

Diese rationelle Tastatur oder vielmehr das geometrische Urbild, sozusagen der Grundriß derselben, wird auf eine höchst einfache Weise gebildet. Man schreibt nämlich die bekannte Quintenreihe in horizon-

taler Richtung auf, vom Grundtone *C* nach rechts und links ins Unbegrenzte fortgesetzt:

... *Ges*, *Des*, *As*, *Es*, *B*, *F*, *C*, *G*, *D*, *A*, *E*, *H*, *Fis*, *Cis*, *Gis*

und zeichnet in derselben vom Grundtone angefangenen jeden zweiten Ton nach Belieben aus, z. B. durch Unterstreichen. Aus den auf diese Weise bezeichneten Tönen bildet man eine besondere erste Reihe:

(I) ... *Fes*, *Ges*, *As*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Fis*, *Gis*, *Ais*, *His*, ...

aus den übrigen eine besondere zweite Reihe:

(II) ... *Ces*, *Des*, *Es*, *F*, *G*, *A*, *H*, *Cis*, *Dis*, *Eis*, ...

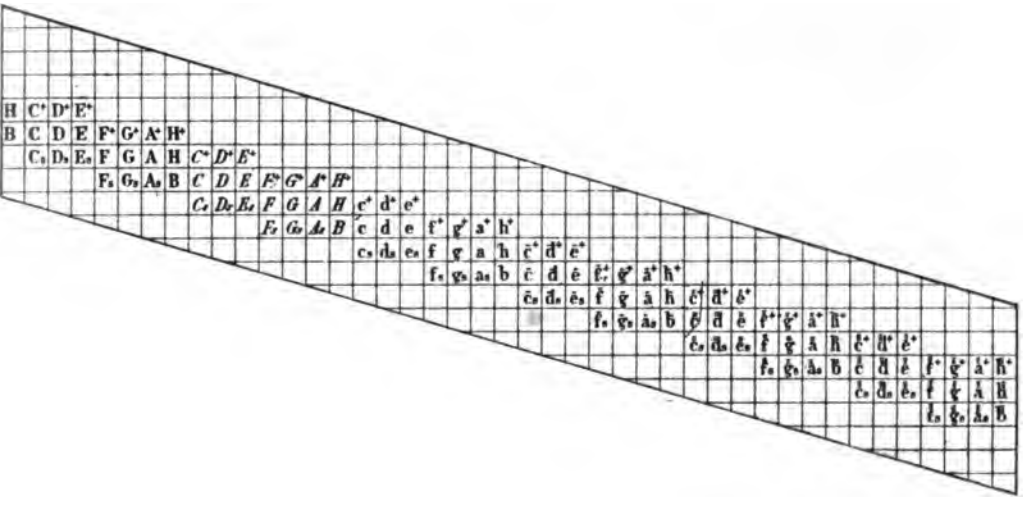
Diese zwei Reihen schreibt man nun abwechselnd untereinander, so jedoch, daß, wenn in einer hinzuzuschreibenden Reihe *C* vorkommt, dies unter *Cis* der nächst vorhergehenden Reihe zu stellen ist. Kommt aber in der nächst aufzuschreibenden Reihe *Ces* vor, so hat es unter *C* seinen Platz einzunehmen.

Man erhält auf diese Weise eine Art Abbildung der rationellen Tastatur, welche allen Tonsystemen der ersten Klasse gemeinsam ist und in allen Tonarten nur einen einzigen Fingersatz hat. Hiervon überzeugt man sich leicht auf folgende Weise: In der Reihe reiner Quinten ist das musikalische Intervall zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Tönen ausgedrückt durch die Zahl $\frac{3}{2}$, und geht man nicht zu dem nächst folgenden, sondern zu dem zweiten über, so besteht zwischen diesem und dem zweitfolgenden ein Intervall von $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, oder wenn man sich die Töne der Quintenreihe auf die erste Oktave zurückgeführt denkt, das Intervall $\frac{9}{8}$ gleich einem großen Ganzton. Hieraus folgt, daß in jeder der beiden Reihen I und II die Töne äquidistant und je um einen ganzen Ton voneinander verschieden sind.

Zeichnet man nun in der angeführten Weise die rationelle Tastatur auf, nämlich:

Cis,	*Dis*,	*Eis*,														
C,	*D*,	*E*,	*Fis*,	*Gis*,	*Ais*,	*His*,										
Ces,	*Des*,	*Es*,	*F*,	*G*,	*A*,	*H*,	*Cis*,	*Dis*,	*Eis*,							
			Fes,	*Ges*,	*As*,	*B*,	*C*,	*D*,	*E*,	*Fis*,	*Gis*,	*Ais*,	*His*,			
							Ces,	*Des*,	*Es*,	*F*,	*G*,	*A*,	*H*,	*Cis*,	*Dis*,	...
										Fes,	*Ges*,	*As*,	*B*,	*C*,	*D*,	...
														Ces,	*Des*,	...,

so sind auch in der vertikalen Richtung die Töne der übereinander geschriebenen Reihen äquidistant und je um einen kleinen Halbton voneinander verschieden. Hieraus folgt nun unmittelbar, daß je zwei Tonpaare, welche in demselben horizontalen und in demselben vertikalen Abstande sich befinden, auch in demselben musikalischen Abstande



stehen werden. Die beigedruckte schematische Anordnung stellt die *rationelle Tastatur der Tonsysteme I. Klasse* dar. Stellt z. B. das erste Tonpaar eine große Terz vor, so wird das zweite auch eine große Terz sein; da dies aber von zwei beliebigen Tonpaaren gesagt werden kann, so gilt es allgemein für eine jede geometrische Gestalt. Alle Tongruppen nämlich, welche in der Tastatur durch gerade Linien zusammengezogen, kongruente geometrische Figuren bilden, besitzen auch, die Tonhöhe abgerechnet, gleichzeitig oder hintereinander angeschlagen einerlei Klang.

Da auf dieser Tastatur ein jedes Tonstück in allen Tonarten einerlei geometrische Gestalt hat, und da die Tonleiter ebenfalls ein kleines Musikstück ist, ja dasselbe auch von jedem Akkorde gesagt werden kann, so haben Tonleiter und Akkorde hier allenthalben einerlei Form, und es kann jedes dieser Tongebilde durch eine *Patrone* dargestellt werden.

Alle Dur-Tonleitern besitzen dann eine Patrone gemeinschaftlich, und wo immer man dieselbe auf die rationelle Tastatur legen mag, stets wird man durch die Fenster der Patrone eine richtige Durtonleiter heraussehend erblicken. In gleicher Weise gehören zu den Moll-Tonleitern die bekanntlich anders im Aufsteigen und anders im Absteigen gebildet werden, zwei Patronen und zu einem jeden der in der Musik gebräuchlichen, sei es konsonanten oder dissonanten Akkorde, je eine Patrone.

Die Anzahl der in der Musik gebrauchten Akkorde ist nun allerdings außerordentlich groß, und man würde ziemlich viele Patronen gebrauchen, wenn man einen jeden Akkord durch eine solche darstellen wollte. Sie haben aber nicht alle dieselbe Wichtigkeit, insbesondere war dies nicht der Fall für Petzvals Vorträge, in welchen er nicht eine vollständige Harmonielehre geben wollte, sondern nur zu zeigen bestrebt war, daß irgend ein von ihm berechnetes Tonsystem die praktischen Bedürfnisse der Musik befriedige.

Er hat daher aus den Akkorden die allerwichtigsten drei- und vierstimmigen, die im allgemeinen musikalischen Gebrauche stehen, auserlesen, und für jede eine Patrone gebildet, und alle diese Patronen in einem einzigen Blatte vereinigt und mit der üblichen musikalischen Nomenklatur und kontrapunktischen Bezeichnung versehen, wie dies aus der beigedruckten Abbildung zu ersehen ist.[1])

Diese Patronensammlung erspart hier viel Worte, weil der wissenschaftlich gebildete Leser mit Hilfe derselben und der rationellen Tastatur sogleich erkennt, was in jeder Tonart Moll- und Dur-Dreiklang, Sextakkord, Quartsextakkord, verminderter Quintakkord usw. bedeute. Zudem dienen diese Blätter auch dazu, gewisse Probleme der Harmonielehre mit großer Leichtigkeit durch die unmittelbare Anschauung zu lösen, ein Tonstück aus einer Tonart in eine beliebige andere zu übertragen, zu jedem gegebenen Gesange oder einer Melodie die vierstimmige Akkordbegleitung zu finden usf.

Mittels der rationellen Tastatur und der dazu gehörigen Patronensammlung gewinnt man aber nur eine allgemeine Kenntnis der Eigenschaften der Tonsysteme der ersten Klasse. Der intelligente Musiker und besonders derjenige, der von einem neuen Tonsysteme Gebrauch zu machen wünscht, kann sich mit einer solchen nicht begnügen, denn es liegt ihm ja ob, sich sein nach diesem Tonsystem ausgeführtes Instrument selber zu stimmen oder mindestens die Anleitung dazu zu geben.

Er muß sich daher mit den besonderen Eigenschaften des Tonsystems, das er zum praktischen Gebrauche gewählt und aus gewichtigen Gründen allen anderen vorgezogen hat, innigst befreunden, den musikalischen Abstand je zweier derselben in einer jeden Tonart muß er in Zahlen anzugeben wissen, und muß auch die zu demselben gehörige Saitenlänge kennen, und allenfalls auch imstande sein Fragen zu beantworten, wie die folgenden: Gibt es in irgend einer Tonart einen Akkord 6, 7, 9, 11 und in welcher? Dazu ist aber unerläßlich, daß

---

1) In der Abbildung hat man sich die schraffierten Felder ausgeschnitten zu denken; die so entstandenen Löcher nennt Petzval die „Fenster."

Patronen für Tonsysteme I. Klasse.

Tonleitern

Durtonleiter

Tonica

Mediante

Unterdomin.

Oberdomina.

Leiton

Molltonleiter aufsteigend

Molltonleiter absteigend

Duraccorde

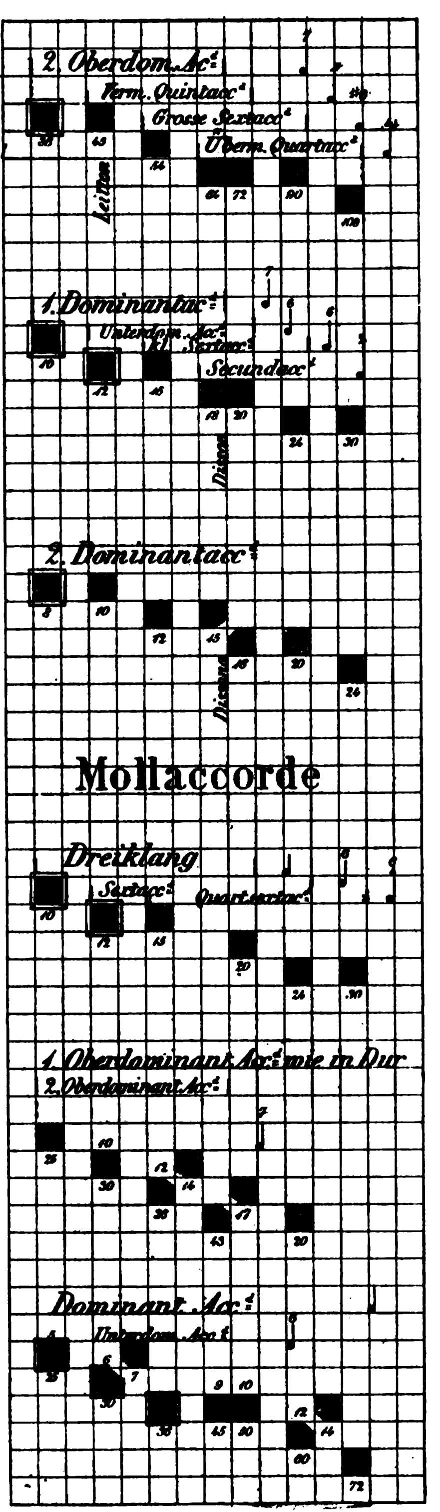
Dreiklang

Sextacc.

Quartsextacc.

1. Oberdominant Acc.

Erf v Petzval 1870



man sich wenigstens diejenigen Töne des erwählten Tonsystems, die man praktisch zu verwenden wünscht, die im Bilde der rationellen Tastatur ersichtlichen, 21 an der Zahl, mit ihren Schwingungsverhältnissen tabellarisch so geordnet vorführe, daß man mit einem einzigen Blicke den in jeder Tonart zur Verfügung stehenden Tonreichtum zu untersuchen imstande ist. Petzval hat zu diesem Ende eine zweckmäßige Anordnung in 3 Tabellen getroffen, von welchen die erste das geschlossene 31stufige Tonsystem darstellt, nämlich das Tonsystem der *gleichberechtigten Intervalle.* (S. 401.) Die zweite Tabelle enthielt das ebenfalls geschlossene 43stufige Tonsystem, die dritte aber ein unendliches Tonsystem, welches seinen Eigenschaften nach zwischen dem 31stufigen und dem 43stufigen enthalten ist; diese letzten beiden Tabellen sind verloren gegangen. Sie haben alle drei vorausgesetzt, daß man sich zum musikalischen Gebrauche von dem vorhandenen Tonreichtume von beziehentlich 31, 43 und unendlich vielen Tönen nur 21, wie sie in der Tastatur vorkommen, ausgewählt habe.

Die vorhandene Tabelle enthält also in einer horizontalen Reihe unten die Tonstufen des Systems, hier 31, und darunter die Schwingungsverhältnisse in zwei verschiedenen Gestalten: als Dezimalbruch und als ein demselben möglichst nahe kommender gewöhnlicher Bruch; darüber sind die Tonarten in der ersten Vertikallinie bezeichnet mit großen deutschen Frakturbuchstaben, an welche sich in horizontaler Reihe alle diejenigen Töne anschließen, die in dieser Tonart verwendet werden können in der ihnen zugewiesenen Ordnung und dem, dem Intervalle entsprechenden Abstande, welcher numerisch durch die unter einem jeden derselben vorhandene Zahl ausgedrückt ist.

Diese Töne sind durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, so zwar, daß z. B. c^+ so viel wie *cis*, g^+ so viel wie *gis*, usf., c_s so viel wie *ces* usw. bedeudet. Die Hauptkonsonanzen, kleine Terz, große Terz, Quinte, Septime und Oktave sind mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, um leichter kenntlich zu sein. Damit diese Tabelle auch zur Einteilung des Griffbrettes bei solchen musikalischen Instrumenten, die derlei besitzen, dienen kann, ist eine eigene Spalte mit der Überschrift Saitenlänge eröffnet. Durch die Ziffern I, II ... VIII ist zugleich an der unteren Seite die Dur-, an der oberen die Moll-Tonleiter bezeichnet, so daß man auch aus dieser Tabelle, wie aus der rationellen Tastatur und der angefügten Patronensammlung, alle Tonleitern und die konsonannten Akkorde unmittelbar ablesen kann.

Links von der Tabelle stehen die charakteristischen Hauptmerkmale des Tonsystems, welches durch dieselbe dargestellt ist, d. h. die Temperaturen der konsonanten Intervalle in gewöhnlicher Bruchform,

31 stufiges Tonsystem I. Klasse.

Molltonleiter	I					II			III					IV					V			VI					VII					VIII
Saitenlängen	1·00000	0·97789	0·95626	0·93512	0·91444	0·89422	0·87446	0·85512	0·83621	0·81772	0·79964	0·78196	0·76467	0·74776	0·73122	0·71505	0·69925	0·68378	0·66867	0·65388	0·63942	0·62528	0·61146	0·59794	0·58472	0·57179	0·55914	0·54678	0·53469	0·52287	0·51131	0·50000
$q = \frac{334}{335}$ $T = \frac{2213}{2212}$ $t = \frac{290}{291}$ $s = \frac{1593}{1594}$ **Tonarten**	$\mathfrak{F}_s$		f		f^+	g_s		g		g^+	$\mathbf{A}_s$		a		a^+	b		h	$\mathbf{C}_s$	h^+	c		c^+	d_s		**D**			e_s		e	$\mathbf{F}_s$
	$\mathfrak{C}_s$		c		c^+	d_s		d		d^+	$\mathbf{E}_s$		e	f_s	e^+	f		f^+	$\mathbf{G}_s$		g		g^+	a_s		**A**			b		h	$\mathbf{C}_s$
	$\mathfrak{G}_s$		g		g^+	a_s		a		a^+	**B**		h	c_s	h^+	c		c^+	$\mathbf{D}_s$		d		d^+	e_s		**E**	f_s		f		f^+	$\mathbf{G}_s$
	$\mathfrak{D}_s$		d		d^+	e_s		e	$\mathbf{F}_s$	e^+	**F**		f^+	g_s		g		g^+	$\mathbf{A}_s$		a		a^+	b		**H**	c_s		c		c^+	$\mathbf{D}_s$
	$\mathfrak{A}_s$		a		a^+	b		h	$\mathbf{C}_s$	h^+	**C**		c^+	d_s		d		d^+	$\mathbf{E}_s$		e	f_s	e^+	f		$\mathbf{F}^+$	g_s		g		g^+	$\mathbf{A}_s$
	$\mathfrak{E}_s$		e	f_s	e^+	f		f^+	$\mathbf{G}_s$		**G**		g^+	a_s		a		a^+	**B**		h	c_s	h^+	c		$\mathbf{C}^+$	d_s		d		d^+	$\mathbf{E}_s$
	$\mathfrak{B}$		h	c_s	h^+	c		c^+	$\mathbf{D}_s$		**D**		d^+	e_s		e	f_s	e^+	**F**		f^+	g_s		g		$\mathbf{G}^+$	a_s		a		a^+	**B**
	$\mathfrak{F}$		f^+	g_s		g		g^+	$\mathbf{A}_s$		**A**		a^+	b		h	c_s	h^+	**C**		c^+	d_s		d		$\mathbf{D}^+$	e_s		e	f_s	e^+	**F**
	$\mathfrak{C}$		c^+	d_s		d		d^+	$\mathbf{E}_s$		**E**	f_s	e^+	f		f^+	g_s		**G**		g^+	a_s		a		$\mathbf{A}^+$	b		h	c_s	h^+	**C**
	$\mathfrak{G}$		g^+	a_s		a		a^+	**B**		**H**	c_s	h^+	c		c^+	d_s		**D**		d^+	e_s		e	f_s	$\mathbf{E}^+$	f		f^+	g_s		**G**
	$\mathfrak{D}$		d^+	e_s		e	f_s	e^+	**F**		$\mathbf{F}^+$	g_s		g		g^+	a_s		**A**		a^+	b		h	c_s	$\mathbf{H}^+$	c		c^+	d_s		**D**
	$\mathfrak{A}$		a^+	b		h	c_s	h^+	**C**		$\mathbf{C}^+$	d_s		d		d^+	e_s		**E**	f_s	e^+	f		f^+	g_s		g		g^+	a_s		**A**
	$\mathfrak{E}$	f_s	e^+	f		f^+	g_s		**G**		$\mathbf{G}^+$	a_s		a		a^+	b		**H**	c_s	h^+	c		c^+	d_s		d		d^+	e_s		**E**
	$\mathfrak{H}$	c_s	h^+	c		c^+	d_s		**D**		$\mathbf{D}^+$	e_s		e	f_s	e^+	f		$\mathbf{F}^+$	g_s		g		g^+	a_s		a		a^+	b		**H**
	$\mathfrak{F}^+$	g_s		g		g^+	a_s		**A**		$\mathbf{A}^+$	b		h	c_s	h^+	c		$\mathbf{C}^+$	d_s		d		d^+	e_s		e	f_s	e^+	f		$\mathbf{F}^+$
	$\mathfrak{C}^+$	d_s		d		d^+	e_s		**E**	f_s	$\mathbf{E}^+$	f		f^+	g_s		g		$\mathbf{G}^+$	a_s		a		a^+	b		h	c_s	h^+	c		$\mathbf{C}^+$
	$\mathfrak{G}^+$	a_s		a		a^+	b		**H**	c_s	$\mathbf{H}^+$	c		c^+	d_s		d		$\mathbf{D}^+$	e_s		e	f_s	e^+	f		f^+	g_s		g		$\mathbf{G}^+$
	$\mathfrak{D}^+$	e_s		e	f_s	e^+	f		$\mathbf{F}^+$	g_s		g		g^+	a_s		a		$\mathbf{A}^+$	b		h	c_s	h^+	c		c^+	d_s		d		$\mathbf{D}^+$
	$\mathfrak{A}^+$	b		h	c_s	h^+	c		$\mathbf{C}^+$	d_s		d		d^+	e_s		e	f_s	$\mathbf{E}^+$	f		f^+	g_s		g		g^+	a_s		a		$\mathbf{A}^+$
	$\mathfrak{E}^+$	f		f^+	g_s		g		$\mathbf{G}^+$	a_s		a		a^+	b		h	c_s	$\mathbf{H}^+$	c		c^+	d_s		d		d^+	e_s		e		$\mathbf{E}^+$
	$\mathfrak{H}^+$	c		c^+	d_s		d		$\mathbf{D}^+$	e_s		e		e^+	f		f^+	g_s		g		g^+	a_s		a		a^+	b		h		$\mathbf{H}^+$
Stufen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Schwingungs-verhältnisse	1·00000	1·02261	1·04574	1·06938	1·09356	1·11829	1·14357	1·16943	1·19587	1·22291	1·25057	1·27884	1·30776	1·33733	1·36757	1·39849	1·43010	1·46245	1·49551	1·52933	1·56391	1·59928	1·63544	1·67242	1·71023	1·74890	1·78845	1·82889	1·87024	1·91258	1·95578	2·00000
nahe	1	$\frac{45}{44}$	$\frac{23}{22}$	$\frac{77}{72}$	$\frac{31}{29}$	$\frac{19}{17}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{23}{18}$	$\frac{17}{13}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{26}{19}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{19}{13}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{26}{17}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{53}{31}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{59}{33}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{21}{11}$	$\frac{88}{45}$	2
Durtonleiter	I Tonica					II					III Mediante			IV Unterdominante					V Oberdominante					VI					VII Leiton			VIII

namentlich die Temperatur q der Quinte, die T der großen Terz, t der kleinen Terz und s der Septime. Die ganz gleiche Anordnung hatten auch die beiden anderen Tabellen.

Sowie dies aus den beiden verloren gegangen hervorging, so zeigt auch die vorhandene, daß nicht alle Tonarten sämtliche konsonanten Intervalle besitzen, namentlich fehlt zu den Grundtönen *Fes*, *Ces*, *Ges* die kleine Terz; man wird daher aus *Fes*-, *Ces*- und *Ges*-Moll nicht spielen können, und es sind mithin diese Tonarten reine Dur-Tonarten. Ebenso fehlt zu den Grundtönen *Dis*, *Ais*, *Eis* und *His* die große Terz; es sind also die Tonarten *Dis*, *Ais*, *Eis* und *His* spezifische Molltonarten. Die übrigen Grundtöne von *Des* angefangen bis *Gis*, 14 an der Zahl, haben sowohl große als kleine Terzen. Man hat daher den genügenden Vorrat von 14 Tonarten, die nach Belieben Dur oder Moll sein können. Desgleichen ist ersichtlich, daß man nur bei 11 der 21 Tonarten, die sich in jener Tabelle befinden, reine Septimen hat; die übrigen müssen sich mit einem dissonanten Stellvertreter begnügen.

Außer der hier vorgeführten rationellen Tastatur für die Tonsysteme der ersten Klasse hat Petzval vermutlich auch eine solche für die Tonsysteme der zweiten Klasse hergestellt, die indessen verloren gegangen zu sein scheint. Die Vermutung gründet sich darauf, daß sich zwei Patronen für diese Tastatur gefunden haben: Tonleitern und Akkorde zweiter Klasse mit lateinischem Grundtone, und Tonleitern und Akkorde zweiter Klasse mit gotischem Grundtone. Diese Tastaturen samt den Patronen hat Petzval hauptsächlich zu seinen Studien über die Bildung der Akkorde und die mathematischen Grundsätze, welche zur Bildung einer neuen Harmonielehre nötig sind, benützt.

Die Tastatur für die Tonsysteme erster Klasse hat Petzval überdies im Jahre 1870 an einem Klavier praktisch durchgeführt. In seiner ausgedehnten Sommerwohnung auf dem Kahlenberge bei Wien hatte er nämlich auch eine vollständig eingerichtete mechanische Werkstätte, in welcher er mit großer Geschicklichkeit allerhand Instrumente und Behelfe für seine verschiedenen Studien und physikalischen Versuche herstellte — die von ihm geschliffenen Linsen für optische Instrumente hatten einen Weltruf. So hatte er also auch einen fertigen, leeren Klavierkasten für das 31stufige Tonsystem (mit 21 ausgewählten Tönen für die Oktave) eingerichtet, mit Saiten bespannt, und die von ihm ersonnene Tastatur selbst hergestellt und eingebaut. Er pflegte seine Hörer gelegentlich in seine Wohnung einzuladen und trug ihnen als Beispiel zu seinen Vorträgen verschiedene Musikstücke vor, an denen er praktisch erwies, wie einfach das Spiel einerseits sei, und

wie man andererseits an Instrumenten mit festen Tönen durch Erweiterung der Tonreihe die Unreinheiten vermeiden und einen höheren Wohlklang zu erzielen vermag.

Aber er pflegte zu sagen, daß weder eine verbesserte Tastatur noch auch eines der von ihm berechneten tonreicheren Tonsysteme Eingang finden werde. „Denn das tonarme, 12stufige widersteht doch allen Angriffen hinlänglich durch die bloße Trägheit der Massen, und derjenige, welcher sich die unfruchtbare Aufgabe stellen würde, dasselbe zu verdrängen, und wenn auch durch ein besseres zu ersetzen, würde einen hoffnungslosen Kampf unternehmen müssen nicht nur mit den vielen Millionen in ihrer Ruhe gestörten Musikern, die den Erdball bevölkern, sondern auch mit den noch zahlreicheren Millionen musikalischer Instrumente, in denen das chromatische System verkörpert ist, und die in Form von Kisten, Schachteln, Röhren usw. mit hölzerner und blecherner Halsstarrigkeit sich einem jeden Versuche, ein besseres Tonsystem einzuführen, widersetzen würden. Wären daher die bitteren Vorwürfe auch alle begründet, die dem chromatischen System von Seite seiner heftigsten Gegner gemacht werden, wäre es wirklich wahr, daß es den Sänger zwinge, der Klavierbegleitung zuliebe falsch zu singen, den Violinspieler falsch zu geigen, daß es das Gehör ganzer Völker verderbe und als alleinige Ursache zu betrachen sei, daß die moderne Musik alles Sangbare allmählig ganz verliert und in einen barbarischen Lärm der Instrumentalmassen mehr und mehr ausartet, so müßte man sich diesem betrübenden, aber unabänderlichen Sachverhalte eben fügen, und diesen musikalischen Katzenjammer in stoischem Gleichmute als einen integrierenden Bestandteil des Fluches der Erbsünde ansehen, von dem sich das Menschengeschlecht nimmer befreien kann."

Diese pessimistische Vorraussage Petzvals dürfte sich indessen nicht verwirklichen, vielmehr deuten insbesondere die späteren Bestrebungen anderer auf das Gegenteil hin. So hat 14 Jahre später (1884) Jankó den gleichen Gedanken hinsichtlich des einheitlichen Fingersatzes mit seiner Klaviatur ausgeführt, mit der Abweichung, daß die Tasten nicht in drei sondern in sechs Reihen, und zwar stufenförmig über einander angeordnet sind. Da aber diese Klaviatur für ein 12-stufiges System eingerichtet ist, so stellt sie sich eigentlich nur als eine auf eine bequeme Hand- und Fingerhaltung abzielende Verbesserung des gebräuchlichen Klavieres dar.

Zu den Tasteninstrumenten dagegen, die auch für eine reine Stimmung eingerichtet sind, gehören:

Das Harmonium von Appun, (das sogenannte mathematische Harmonium) mit 36 Stufen (1868), das Bosanquetsche Harmonium

mit 53 Stufen (1875), das Enharmonium des Japaners Tanaka mit 20 Stufen (1890), das Harmonium von Steiner (1891) und zuletzt das Harmonium von Eitz mit 52 Stufen in jeder Oktave. Das letztere Instrument, welches sich im Institute für theoretische Physik der Universität Berlin befindet, ist wegen seiner zwar sinnreichen aber sehr verwickelten Klaviatur vom spieltechnischen Standpunkte aus schwer zu behandeln, dagegen für wissenschaftliche Zwecke ganz vorzüglich geeignet.

Diese Bestrebungen weisen wohl deutlich darauf hin, daß man die Sache keineswegs auf sich beruhen läßt; auch dürfen wir daraus mit einiger Sicherheit den Schluß ziehen, daß man nicht eher ruhen werde, bis nicht etwas Vollkommeneres aber genügend Einfaches gefunden sein wird. Und wenn auch nach der praktisch-musikalischen Seite (z. B. in betreff der Notenschrift) noch manche Ergänzung nötig sein wird, so werden doch Petzvals Untersuchungen ihren Wert behalten, und wird er doch immer als Führer dienen können.

A. Reihe der reinen Quinten.

Q_0	$1 = 1{\cdot}000000$	*C*	Q_{22}	$\frac{3^{22}}{2^{34}} = 1{\cdot}826618$	*Gis*³	Q_{44}	$\frac{3^{44}}{2^{69}} = 1{\cdot}668266$	*Dis*⁶
Q_1	$\frac{3}{2} = 1{\cdot}500000$	*G*	Q_{23}	$\frac{3^{23}}{2^{36}} = 1{\cdot}369963$	*Dis*³	Q_{45}	$\frac{3^{45}}{2^{71}} = 1{\cdot}251200$	*Ais*⁶
Q_2	$\frac{3^2}{2^3} = 1{\cdot}125000$	*D*	Q_{24}	$\frac{3^{24}}{2^{38}} = 1{\cdot}027472$	*Ais*³	Q_{46}	$\frac{3^{46}}{2^{72}} = 1{\cdot}876800$	*Eis*⁶
Q_3	$\frac{3^3}{2^4} = 1{\cdot}687500$	*A*	Q_{25}	$\frac{3^{25}}{2^{39}} = 1{\cdot}541209$	*Eis*³	Q_{47}	$\frac{3^{47}}{2^{74}} = 1{\cdot}407600$	*His*⁶
Q_4	$\frac{3^4}{2^6} = 1{\cdot}265625$	*E*	Q_{26}	$\frac{3^{26}}{2^{41}} = 1{\cdot}155906$	*His*³	Q_{48}	$\frac{3^{48}}{2^{76}} = 1{\cdot}055700$	*Fis*⁶
Q_5	$\frac{3^5}{2^7} = 1{\cdot}898437$	*H*	Q_{27}	$\frac{3^{27}}{2^{42}} = 1{\cdot}733860$	*Fis*³	Q_{49}	$\frac{3^{49}}{2^{77}} = 1{\cdot}583550$	*Cis*⁷
Q_6	$\frac{3^6}{2^9} = 1{\cdot}423828$	*Fis*	Q_{28}	$\frac{3^{28}}{2^{44}} = 1{\cdot}300395$	*Cis*⁴	Q_{50}	$\frac{3^{50}}{2^{79}} = 1{\cdot}187662$	*Gis*⁷
Q_7	$\frac{3^7}{2^{11}} = 1{\cdot}067871$	*Cis*	Q_{29}	$\frac{3^{29}}{2^{45}} = 1{\cdot}950592$	*Gis*⁴	Q_{51}	$\frac{3^{51}}{2^{80}} = 1{\cdot}781493$	*Dis*⁷
Q_8	$\frac{3^8}{2^{12}} = 1{\cdot}601806$	*Gis*	Q_{30}	$\frac{3^{30}}{2^{47}} = 1{\cdot}462944$	*Dis*⁴	Q_{52}	$\frac{3^{52}}{2^{82}} = 1{\cdot}336120$	*Ais*⁷
Q_9	$\frac{3^9}{2^{14}} = 1{\cdot}201354$	*Dis*	Q_{31}	$\frac{3^{31}}{2^{49}} = 1{\cdot}097208$	*Ais*⁴	Q_{53}	$\frac{3^{53}}{2^{84}} = 1{\cdot}002090$	*Eis*⁷
Q_{10}	$\frac{3^{10}}{2^{15}} = 1{\cdot}802032$	*Ais*	Q_{32}	$\frac{3^{32}}{2^{50}} = 1{\cdot}645812$	*Eis*⁴	Q_{54}	$\frac{3^{54}}{2^{85}} = 1{\cdot}503135$	*His*⁷
Q_{11}	$\frac{3^{11}}{2^{17}} = 1{\cdot}351524$	*Eis*	Q_{33}	$\frac{3^{33}}{2^{52}} = 1{\cdot}234359$	*His*⁴	Q_{55}	$\frac{3^{55}}{2^{87}} = 1{\cdot}127351$	*Fis*⁷
Q_{12}	$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{\cdot}013643$	*His*	Q_{34}	$\frac{3^{34}}{2^{53}} = 1{\cdot}851539$	*Fis*⁴	Q_{56}	$\frac{3^{56}}{2^{88}} = 1{\cdot}691027$	*Cis*⁸
Q_{13}	$\frac{3^{13}}{2^{20}} = 1{\cdot}520464$	*Fis*²	Q_{35}	$\frac{3^{35}}{2^{55}} = 1{\cdot}388654$	*Cis*⁵	Q_{57}	$\frac{3^{57}}{2^{90}} = 1{\cdot}268270$	*Gis*⁸
Q_{14}	$\frac{3^{14}}{2^{22}} = 1{\cdot}140348$	*Cis*²	Q_{36}	$\frac{3^{36}}{2^{57}} = 1{\cdot}041490$	*Gis*⁵	Q_{58}	$\frac{3^{58}}{2^{91}} = 1{\cdot}902405$	*Dis*⁸
Q_{15}	$\frac{3^{15}}{2^{23}} = 1{\cdot}710523$	*Gis*²	Q_{37}	$\frac{3^{37}}{2^{58}} = 1{\cdot}562236$	*Dis*⁵	Q_{59}	$\frac{3^{59}}{2^{93}} = 1{\cdot}426804$	*Ais*⁸
Q_{16}	$\frac{3^{16}}{2^{25}} = 1{\cdot}282892$	*Dis*²	Q_{38}	$\frac{3^{38}}{2^{60}} = 1{\cdot}171677$	*Ais*⁵	Q_{60}	$\frac{3^{60}}{2^{95}} = 1{\cdot}070103$	*Eis*⁸
Q_{17}	$\frac{3^{17}}{2^{26}} = 1{\cdot}924338$	*Ais*²	Q_{39}	$\frac{3^{39}}{2^{61}} = 1{\cdot}757515$	*Eis*⁵	Q_{61}	$\frac{3^{61}}{2^{96}} = 1{\cdot}605154$	*His*⁸
Q_{18}	$\frac{3^{18}}{2^{28}} = 1{\cdot}443253$	*Eis*²	Q_{40}	$\frac{3^{40}}{2^{63}} = 1{\cdot}318136$	*His*⁵	Q_{62}	$\frac{3^{62}}{2^{98}} = 1{\cdot}203866$	*Fis*⁸
Q_{19}	$\frac{3^{19}}{2^{30}} = 1{\cdot}082440$	*His*²	Q_{41}	$\frac{3^{41}}{2^{64}} = 1{\cdot}977205$	*Fis*⁵	Q_{63}	$\frac{3^{63}}{2^{99}} = 1{\cdot}805799$	*Cis*⁹
Q_{20}	$\frac{3^{20}}{2^{31}} = 1{\cdot}623660$	*Fis*²	Q_{42}	$\frac{3^{42}}{2^{66}} = 1{\cdot}482903$	*Cis*⁶	Q_{64}	$\frac{3^{64}}{2^{101}} = 1{\cdot}354349$	*Gis*⁹
Q_{21}	$\frac{3^{21}}{2^{33}} = 1{\cdot}217745$	*Cis*³	Q_{43}	$\frac{3^{43}}{2^{68}} = 1{\cdot}112177$	*Gis*⁶	Q_{65}	$\frac{3^{65}}{2^{103}} = 1{\cdot}015762$	*Dis*⁹

A. Reihe der reinen Quinten.

Q_{66}	$\frac{3^{66}}{2^{104}} = 1{\cdot}523643$	*Ais*^{9}	Q_{88}	$\frac{3^{88}}{2^{139}} = 1{\cdot}391557$	*Eis*^{12}	Q_{110}	$\frac{3^{110}}{2^{174}} = 1{\cdot}270921$	*His*^{15}
Q_{67}	$\frac{3^{67}}{2^{106}} = 1{\cdot}142732$	*Eis*^{9}	Q_{89}	$\frac{3^{89}}{2^{141}} = 1{\cdot}043667$	*His*^{12}	Q_{111}	$\frac{3^{111}}{2^{175}} = 1{\cdot}906382$	*Fis*^{15}
Q_{68}	$\frac{3^{68}}{2^{107}} = 1{\cdot}714098$	*His*^{9}	Q_{90}	$\frac{3^{90}}{2^{142}} = 1{\cdot}565501$	*Fis*^{12}	Q_{112}	$\frac{3^{112}}{2^{177}} = 1{\cdot}429786$	*Cis*^{16}
Q_{69}	$\frac{3^{69}}{2^{109}} = 1{\cdot}285573$	*Fis*^{9}	Q_{91}	$\frac{3^{91}}{2^{144}} = 1{\cdot}174126$	*Cis*^{13}	Q_{113}	$\frac{3^{113}}{2^{179}} = 1{\cdot}072340$	*Gis*^{16}
Q_{70}	$\frac{3^{70}}{2^{110}} = 1{\cdot}928360$	*Cis*^{10}	Q_{92}	$\frac{3^{92}}{2^{145}} = 1{\cdot}761189$	*Gis*^{13}	Q_{114}	$\frac{3^{114}}{2^{180}} = 1{\cdot}608510$	*Dis*^{16}
Q_{71}	$\frac{3^{71}}{2^{112}} = 1{\cdot}446270$	*Gis*^{10}	Q_{93}	$\frac{3^{93}}{2^{147}} = 1{\cdot}320892$	*Dis*^{13}	Q_{115}	$\frac{3^{115}}{2^{182}} = 1{\cdot}206382$	*Ais*^{16}
Q_{72}	$\frac{3^{72}}{2^{114}} = 1{\cdot}084702$	*Dis*^{10}	Q_{94}	$\frac{3^{94}}{2^{148}} = 1{\cdot}981338$	*Ais*^{13}	Q_{116}	$\frac{3^{116}}{2^{183}} = 1{\cdot}809573$	*Eis*^{16}
Q_{73}	$\frac{3^{73}}{2^{115}} = 1{\cdot}627054$	*Ais*^{10}	Q_{95}	$\frac{3^{95}}{2^{150}} = 1{\cdot}486003$	*Eis*^{13}	Q_{117}	$\frac{3^{117}}{2^{185}} = 1{\cdot}357180$	*His*^{16}
Q_{74}	$\frac{3^{74}}{2^{117}} = 1{\cdot}220290$	*Eis*^{10}	Q_{96}	$\frac{3^{96}}{2^{152}} = 1{\cdot}114502$	*His*^{13}	Q_{118}	$\frac{3^{118}}{2^{187}} = 1{\cdot}017885$	*Fis*^{16}
Q_{75}	$\frac{3^{75}}{2^{118}} = 1{\cdot}830436$	*His*^{10}	Q_{97}	$\frac{3^{97}}{2^{153}} = 1{\cdot}671754$	*Fis*^{13}	Q_{119}	$\frac{3^{119}}{2^{188}} = 1{\cdot}526828$	*Cis*^{17}
Q_{76}	$\frac{3^{76}}{2^{120}} = 1{\cdot}372827$	*Fis*^{10}	Q_{98}	$\frac{3^{98}}{2^{155}} = 1{\cdot}253815$	*Cis*^{14}	Q_{120}	$\frac{3^{120}}{2^{190}} = 1{\cdot}145121$	*Gis*^{17}
Q_{77}	$\frac{3^{77}}{2^{122}} = 1{\cdot}029620$	*Cis*^{11}	Q_{99}	$\frac{3^{99}}{2^{156}} = 1{\cdot}880723$	*Gis*^{14}	Q_{121}	$\frac{3^{121}}{2^{191}} = 1{\cdot}717681$	*Dis*^{17}
Q_{78}	$\frac{3^{78}}{2^{123}} = 1{\cdot}544430$	*Gis*^{11}	Q_{100}	$\frac{3^{100}}{2^{158}} = 1{\cdot}410542$	*Dis*^{14}	Q_{122}	$\frac{3^{122}}{2^{193}} = 1{\cdot}288261$	*Ais*^{17}
Q_{79}	$\frac{3^{79}}{2^{125}} = 1{\cdot}158322$	*Dis*^{11}	Q_{101}	$\frac{3^{101}}{2^{160}} = 1{\cdot}057906$	*Ais*^{14}	Q_{123}	$\frac{3^{123}}{2^{194}} = 1{\cdot}932391$	*Eis*^{17}
Q_{80}	$\frac{3^{80}}{2^{126}} = 1{\cdot}737484$	*Ais*^{11}	Q_{102}	$\frac{3^{102}}{2^{161}} = 1{\cdot}586860$	*Eis*^{14}	Q_{124}	$\frac{3^{124}}{2^{196}} = 1{\cdot}449293$	*His*^{17}
Q_{81}	$\frac{3^{81}}{2^{128}} = 1{\cdot}303113$	*Eis*^{11}	Q_{103}	$\frac{3^{103}}{2^{163}} = 1{\cdot}190145$	*His*^{14}	Q_{125}	$\frac{3^{125}}{2^{198}} = 1{\cdot}086970$	*Fis*^{17}
Q_{82}	$\frac{3^{82}}{2^{129}} = 1{\cdot}954669$	*His*^{11}	Q_{104}	$\frac{3^{104}}{2^{164}} = 1{\cdot}785217$	*Fis*^{14}	Q_{126}	$\frac{3^{126}}{2^{199}} = 1{\cdot}630455$	*Cis*^{18}
Q_{83}	$\frac{3^{83}}{2^{131}} = 1{\cdot}466002$	*Fis*^{11}	Q_{105}	$\frac{3^{105}}{2^{166}} = 1{\cdot}338913$	*Cis*^{15}	Q_{127}	$\frac{3^{127}}{2^{201}} = 1{\cdot}222841$	*Gis*^{18}
Q_{84}	$\frac{3^{84}}{2^{133}} = 1{\cdot}099501$	*Cis*^{12}	Q_{106}	$\frac{3^{106}}{2^{168}} = 1{\cdot}004184$	*Gis*^{15}	Q_{128}	$\frac{3^{128}}{2^{202}} = 1{\cdot}834262$	*Dis*^{18}
Q_{85}	$\frac{3^{85}}{2^{134}} = 1{\cdot}649252$	*Gis*^{12}	Q_{107}	$\frac{3^{107}}{2^{169}} = 1{\cdot}506277$	*Dis*^{15}	Q_{129}	$\frac{3^{129}}{2^{204}} = 1{\cdot}375696$	*Ais*^{18}
Q_{86}	$\frac{3^{86}}{2^{136}} = 1{\cdot}236939$	*Dis*^{12}	Q_{108}	$\frac{3^{108}}{2^{171}} = 1{\cdot}129708$	*Ais*^{15}	Q_{130}	$\frac{3^{130}}{2^{206}} = 1{\cdot}031772$	*Eis*^{18}
Q_{87}	$\frac{3^{87}}{2^{137}} = 1{\cdot}855409$	*Ais*^{12}	Q_{109}	$\frac{3^{109}}{2^{172}} = 1{\cdot}694562$	*Eis*^{15}	Q_{131}	$\frac{3^{131}}{2^{207}} = 1{\cdot}547658$	*His*^{18}

A. Reihe der reinen Quinten.

Q_{132}	$\frac{3^{132}}{2^{209}} = 1{\cdot}160744$	Fis^{18}	Q_{154}	$\frac{3^{154}}{2^{244}} = 1{\cdot}060118$	Cis^{22}	Q_{176}	$\frac{3^{176}}{2^{278}} = 1{\cdot}936431$	Gis^{25}
Q_{133}	$\frac{3^{133}}{2^{210}} = 1{\cdot}741116$	Cis^{19}	Q_{155}	$\frac{3^{155}}{2^{245}} = 1{\cdot}590177$	Gis^{22}	Q_{177}	$\frac{3^{177}}{2^{280}} = 1{\cdot}452323$	Dis^{25}
Q_{134}	$\frac{3^{134}}{2^{212}} = 1{\cdot}305837$	Gis^{19}	Q_{156}	$\frac{3^{156}}{2^{247}} = 1{\cdot}192632$	Dis^{22}	Q_{178}	$\frac{3^{178}}{2^{282}} = 1{\cdot}089242$	Ais^{25}
Q_{135}	$\frac{3^{135}}{2^{213}} = 1{\cdot}958755$	Dis^{19}	Q_{157}	$\frac{3^{157}}{2^{248}} = 1{\cdot}788949$	Ais^{22}	Q_{179}	$\frac{3^{179}}{2^{283}} = 1{\cdot}633863$	Eis^{25}
Q_{136}	$\frac{3^{136}}{2^{215}} = 1{\cdot}469066$	Ais^{19}	Q_{158}	$\frac{3^{158}}{2^{250}} = 1{\cdot}341712$	Eis^{22}	Q_{180}	$\frac{3^{180}}{2^{285}} = 1{\cdot}225397$	His^{25}
Q_{137}	$\frac{3^{137}}{2^{217}} = 1{\cdot}101800$	Eis^{19}	Q_{159}	$\frac{3^{159}}{2^{252}} = 1{\cdot}006284$	His^{22}	Q_{181}	$\frac{3^{181}}{2^{286}} = 1{\cdot}838096$	Fis^{25}
Q_{138}	$\frac{3^{138}}{2^{218}} = 1{\cdot}652700$	His^{19}	Q_{160}	$\frac{3^{160}}{2^{253}} = 1{\cdot}509426$	Fis^{22}	Q_{182}	$\frac{3^{182}}{2^{288}} = 1{\cdot}378572$	Cis^{26}
Q_{139}	$\frac{3^{139}}{2^{220}} = 1{\cdot}239525$	Fis^{19}	Q_{161}	$\frac{3^{161}}{2^{255}} = 1{\cdot}132069$	Cis^{23}	Q_{183}	$\frac{3^{183}}{2^{290}} = 1{\cdot}033929$	Gis^{26}
Q_{140}	$\frac{3^{140}}{2^{221}} = 1{\cdot}859287$	Cis^{20}	Q_{162}	$\frac{3^{162}}{2^{256}} = 1{\cdot}698104$	Gis^{23}	Q_{184}	$\frac{3^{184}}{2^{291}} = 1{\cdot}550894$	Dis^{26}
Q_{141}	$\frac{3^{141}}{2^{223}} = 1{\cdot}394465$	Gis^{20}	Q_{163}	$\frac{3^{163}}{2^{258}} = 1{\cdot}273578$	Dis^{23}	Q_{185}	$\frac{3^{185}}{2^{293}} = 1{\cdot}163170$	Ais^{26}
Q_{142}	$\frac{3^{142}}{2^{225}} = 1{\cdot}045849$	Dis^{20}	Q_{164}	$\frac{3^{164}}{2^{259}} = 1{\cdot}910367$	Ais^{23}	Q_{186}	$\frac{3^{186}}{2^{294}} = 1{\cdot}744755$	Eis^{26}
Q_{143}	$\frac{3^{143}}{2^{226}} = 1{\cdot}568774$	Ais^{20}	Q_{165}	$\frac{3^{165}}{2^{261}} = 1{\cdot}432775$	Eis^{23}	Q_{187}	$\frac{3^{187}}{2^{296}} = 1{\cdot}308566$	His^{26}
Q_{144}	$\frac{3^{144}}{2^{228}} = 1{\cdot}176580$	Eis^{20}	Q_{166}	$\frac{3^{166}}{2^{263}} = 1{\cdot}074581$	His^{23}	Q_{188}	$\frac{3^{188}}{2^{297}} = 1{\cdot}962850$	Fis^{26}
Q_{145}	$\frac{3^{145}}{2^{229}} = 1{\cdot}764870$	His^{20}	Q_{167}	$\frac{3^{167}}{2^{264}} = 1{\cdot}611872$	Fis^{23}	Q_{189}	$\frac{3^{189}}{2^{299}} = 1{\cdot}472137$	Cis^{27}
Q_{146}	$\frac{3^{146}}{2^{231}} = 1{\cdot}323653$	Fis^{20}	Q_{168}	$\frac{3^{168}}{2^{266}} = 1{\cdot}208904$	Cis^{24}	Q_{190}	$\frac{3^{190}}{2^{301}} = 1{\cdot}104103$	Gis^{27}
Q_{147}	$\frac{3^{147}}{2^{232}} = 1{\cdot}985479$	Cis^{21}	Q_{169}	$\frac{3^{169}}{2^{267}} = 1{\cdot}813356$	Gis^{24}	Q_{191}	$\frac{3^{191}}{2^{302}} = 1{\cdot}656154$	Dis^{27}
Q_{148}	$\frac{3^{148}}{2^{234}} = 1{\cdot}489109$	Gis^{21}	Q_{170}	$\frac{3^{170}}{2^{269}} = 1{\cdot}360017$	Dis^{24}	Q_{192}	$\frac{3^{192}}{2^{304}} = 1{\cdot}242116$	Ais^{27}
Q_{149}	$\frac{3^{149}}{2^{236}} = 1{\cdot}116832$	Dis^{21}	Q_{171}	$\frac{3^{171}}{2^{271}} = 1{\cdot}020013$	Ais^{24}	Q_{193}	$\frac{3^{193}}{2^{306}} = 1{\cdot}863174$	Eis^{27}
Q_{150}	$\frac{3^{150}}{2^{237}} = 1{\cdot}675248$	Ais^{21}	Q_{172}	$\frac{3^{172}}{2^{272}} = 1{\cdot}530019$	Eis^{24}	Q_{194}	$\frac{3^{194}}{2^{307}} = 1{\cdot}397380$	His^{27}
Q_{151}	$\frac{3^{151}}{2^{239}} = 1{\cdot}256436$	Eis^{21}	Q_{173}	$\frac{3^{173}}{2^{274}} = 1{\cdot}147514$	His^{24}	Q_{195}	$\frac{3^{195}}{2^{309}} = 1{\cdot}048035$	Fis^{27}
Q_{152}	$\frac{3^{152}}{2^{240}} = 1{\cdot}884654$	His^{21}	Q_{174}	$\frac{3^{174}}{2^{275}} = 1{\cdot}721272$	Fis^{24}	Q_{196}	$\frac{3^{196}}{2^{310}} = 1{\cdot}572053$	Cis^{28}
Q_{153}	$\frac{3^{153}}{2^{242}} = 1{\cdot}413490$	Fis^{21}	Q_{175}	$\frac{3^{175}}{2^{277}} = 1{\cdot}290954$	Cis^{25}	Q_{197}	$\frac{3^{197}}{2^{312}} = 1{\cdot}179039$	Gis^{28}

B. Reihe der reinen Quarten.

Q_0	$1 = 1{\cdot}000000$	*C*	Q_{-22}	$\frac{2^{35}}{3^{22}} = 1{\cdot}094919$	*Fes*³	Q_{-44}	$\frac{2^{70}}{3^{44}} = 1{\cdot}198849$	*Bes*⁶
Q_{-1}	$\frac{2^{2}}{3^{1}} = 1{\cdot}333333$	*F*	Q_{-23}	$\frac{2^{37}}{3^{23}} = 1{\cdot}459892$	*Bes*³	Q_{-45}	$\frac{2^{72}}{3^{45}} = 1{\cdot}598465$	*Es*⁷
Q_{-2}	$\frac{2^{4}}{3^{2}} = 1{\cdot}777777$	*B*	Q_{-24}	$\frac{2^{39}}{3^{24}} = 1{\cdot}946523$	*Es*⁴	Q_{-46}	$\frac{2^{73}}{3^{46}} = 1{\cdot}065643$	*As*⁷
Q_{-3}	$\frac{2^{5}}{3^{3}} = 1{\cdot}185185$	*Es*	Q_{-25}	$\frac{2^{40}}{3^{25}} = 1{\cdot}297682$	*As*⁴	Q_{-47}	$\frac{2^{75}}{3^{47}} = 1{\cdot}420858$	*Des*⁷
Q_{-4}	$\frac{2^{7}}{3^{4}} = 1{\cdot}580246$	*As*	Q_{-26}	$\frac{2^{42}}{3^{26}} = 1{\cdot}730243$	*Des*⁴	Q_{-48}	$\frac{2^{77}}{3^{48}} = 1{\cdot}894477$	*Ges*⁷
Q_{-5}	$\frac{2^{8}}{3^{5}} = 1{\cdot}053497$	*Des*	Q_{-27}	$\frac{2^{43}}{3^{27}} = 1{\cdot}153495$	*Ges*⁴	Q_{-49}	$\frac{2^{78}}{3^{49}} = 1{\cdot}262984$	*Ces*⁷
Q_{-6}	$\frac{2^{10}}{3^{6}} = 1{\cdot}404663$	*Ges*	Q_{-28}	$\frac{2^{45}}{3^{28}} = 1{\cdot}537994$	*Ces*⁴	Q_{-50}	$\frac{2^{80}}{3^{50}} = 1{\cdot}683979$	*Fes*⁷
Q_{-7}	$\frac{2^{12}}{3^{7}} = 1{\cdot}872885$	*Ces*	Q_{-29}	$\frac{2^{46}}{3^{29}} = 1{\cdot}025329$	*Fes*⁴	Q_{-51}	$\frac{2^{81}}{3^{51}} = 1{\cdot}122653$	*Bes*⁷
Q_{-8}	$\frac{2^{13}}{3^{8}} = 1{\cdot}248590$	*Fes*	Q_{-30}	$\frac{2^{48}}{3^{30}} = 1{\cdot}367105$	*Bes*⁴	Q_{-52}	$\frac{2^{83}}{3^{52}} = 1{\cdot}496871$	*Es*⁸
Q_{-9}	$\frac{2^{15}}{3^{9}} = 1{\cdot}664786$	*Bes*	Q_{-31}	$\frac{2^{50}}{3^{31}} = 1{\cdot}822807$	*Es*⁵	Q_{-53}	$\frac{2^{85}}{3^{53}} = 1{\cdot}995828$	*As*⁸
Q_{-10}	$\frac{2^{16}}{3^{10}} = 1{\cdot}109857$	*Es*²	Q_{-32}	$\frac{2^{51}}{3^{32}} = 1{\cdot}215205$	*As*⁵	Q_{-54}	$\frac{2^{86}}{3^{54}} = 1{\cdot}330552$	*Des*⁸
Q_{-11}	$\frac{2^{18}}{3^{11}} = 1{\cdot}479810$	*As*²	Q_{-33}	$\frac{2^{53}}{3^{33}} = 1{\cdot}620273$	*Des*⁵	Q_{-55}	$\frac{2^{88}}{3^{55}} = 1{\cdot}774069$	*Ges*⁸
Q_{-12}	$\frac{2^{20}}{3^{12}} = 1{\cdot}973080$	*Des*²	Q_{-34}	$\frac{2^{54}}{3^{34}} = 1{\cdot}080182$	*Ges*⁵	Q_{-56}	$\frac{2^{89}}{3^{56}} = 1{\cdot}182712$	*Ces*⁸
Q_{-13}	$\frac{2^{21}}{3^{13}} = 1{\cdot}315387$	*Ges*²	Q_{-35}	$\frac{2^{56}}{3^{35}} = 1{\cdot}440243$	*Ces*⁵	Q_{-57}	$\frac{2^{91}}{3^{57}} = 1{\cdot}576950$	*Fes*⁸
Q_{-14}	$\frac{2^{23}}{3^{14}} = 1{\cdot}753849$	*Ces*²	Q_{-36}	$\frac{2^{58}}{3^{36}} = 1{\cdot}920324$	*Fes*⁵	Q_{-58}	$\frac{2^{92}}{3^{58}} = 1{\cdot}051300$	*Bes*⁸
Q_{-15}	$\frac{2^{24}}{3^{15}} = 1{\cdot}169233$	*Fes*²	Q_{-37}	$\frac{2^{59}}{3^{37}} = 1{\cdot}280216$	*Bes*⁵	Q_{-59}	$\frac{2^{94}}{3^{59}} = 1{\cdot}401733$	*Es*⁹
Q_{-16}	$\frac{2^{26}}{3^{16}} = 1{\cdot}558977$	*Bes*²	Q_{-38}	$\frac{2^{61}}{3^{38}} = 1{\cdot}706954$	*Es*⁶	Q_{-60}	$\frac{2^{96}}{3^{60}} = 1{\cdot}868978$	*As*⁹
Q_{-17}	$\frac{2^{27}}{3^{17}} = 1{\cdot}039318$	*Es*³	Q_{-39}	$\frac{2^{62}}{3^{39}} = 1{\cdot}137969$	*As*⁶	Q_{-61}	$\frac{2^{97}}{3^{61}} = 1{\cdot}245985$	*Des*⁹
Q_{-18}	$\frac{2^{29}}{3^{18}} = 1{\cdot}385757$	*As*³	Q_{-40}	$\frac{2^{64}}{3^{40}} = 1{\cdot}517293$	*Des*⁶	Q_{-62}	$\frac{2^{99}}{3^{62}} = 1{\cdot}661314$	*Ges*⁹
Q_{-19}	$\frac{2^{31}}{3^{19}} = 1{\cdot}847676$	*Des*³	Q_{-41}	$\frac{2^{65}}{3^{41}} = 1{\cdot}011528$	*Ges*⁶	Q_{-63}	$\frac{2^{100}}{3^{63}} = 1{\cdot}107542$	*Ces*⁹
Q_{-20}	$\frac{2^{32}}{3^{20}} = 1{\cdot}231784$	*Ges*³	Q_{-42}	$\frac{2^{67}}{3^{42}} = 1{\cdot}348705$	*Ces*⁶	Q_{-64}	$\frac{2^{102}}{3^{64}} = 1{\cdot}476723$	*Fes*⁹
Q_{-21}	$\frac{2^{34}}{3^{21}} = 1{\cdot}642379$	*Ces*³	Q_{-43}	$\frac{2^{69}}{3^{43}} = 1{\cdot}798273$	*Fes*⁶	Q_{-65}	$\frac{2^{104}}{3^{65}} = 1{\cdot}968964$	*Bes*⁹

B. Reihe der reinen Quarten.

Q_{-66}	$\frac{2^{105}}{3^{66}}=1·312643$	*Es*[10]	Q_{-88}	$\frac{2^{140}}{3^{88}}=1·437238$	*As*[13]	Q_{-110}	$\frac{2^{175}}{3^{110}}=1·573661$	*Des*[16]
Q_{-67}	$\frac{2^{107}}{3^{67}}=1·750191$	*As*[10]	Q_{-89}	$\frac{2^{142}}{3^{89}}=1·916318$	*Des*[13]	Q_{-111}	$\frac{2^{176}}{3^{111}}=1·049107$	*Ges*[16]
Q_{-68}	$\frac{2^{108}}{3^{68}}=1·166794$	*Des*[10]	Q_{-90}	$\frac{2^{143}}{3^{90}}=1·277545$	*Ges*[13]	Q_{-112}	$\frac{2^{178}}{3^{112}}=1·398809$	*Ces*[16]
Q_{-69}	$\frac{2^{110}}{3^{69}}=1·555725$	*Ges*[10]	Q_{-91}	$\frac{2^{145}}{3^{91}}=1·703394$	*Ces*[13]	Q_{-113}	$\frac{2^{180}}{3^{113}}=1·865079$	*Fes*[16]
Q_{-70}	$\frac{2^{111}}{3^{70}}=1·037150$	*Ces*[10]	Q_{-92}	$\frac{2^{146}}{3^{92}}=1·135596$	*Fes*[13]	Q_{-114}	$\frac{2^{181}}{3^{114}}=1·243386$	*Bes*[16]
Q_{-71}	$\frac{2^{113}}{3^{71}}=1·382867$	*Fes*[10]	Q_{-93}	$\frac{2^{148}}{3^{93}}=1·514128$	*Bes*[13]	Q_{-115}	$\frac{2^{183}}{3^{115}}=1·657848$	*Es*[17]
Q_{-72}	$\frac{2^{115}}{3^{72}}=1·843822$	*Bes*[10]	Q_{-94}	$\frac{2^{149}}{3^{94}}=1·009418$	*Es*[14]	Q_{-116}	$\frac{2^{184}}{3^{116}}=1·105232$	*As*[17]
Q_{-73}	$\frac{2^{116}}{3^{73}}=1·229215$	*Es*[11]	Q_{-95}	$\frac{2^{151}}{3^{95}}=1·345891$	*As*[14]	Q_{-117}	$\frac{2^{186}}{3^{117}}=1·473643$	*Des*[17]
Q_{-74}	$\frac{2^{118}}{3^{74}}=1·638953$	*As*[11]	Q_{-96}	$\frac{2^{153}}{3^{96}}=1·794522$	*Des*[14]	Q_{-118}	$\frac{2^{188}}{3^{118}}=1·964857$	*Ges*[17]
Q_{-75}	$\frac{2^{119}}{3^{75}}=1·092635$	*Des*[11]	Q_{-97}	$\frac{2^{154}}{3^{97}}=1·196348$	*Ges*[14]	Q_{-119}	$\frac{2^{189}}{3^{119}}=1·309905$	*Ces*[17]
Q_{-76}	$\frac{2^{121}}{3^{76}}=1·456847$	*Ges*[11]	Q_{-98}	$\frac{2^{156}}{3^{98}}=1·595131$	*Ces*[14]	Q_{-120}	$\frac{2^{191}}{3^{120}}=1·746540$	*Fes*[17]
Q_{-77}	$\frac{2^{123}}{3^{77}}=1·942463$	*Ces*[11]	Q_{-99}	$\frac{2^{157}}{3^{99}}=1·063420$	*Fes*[14]	Q_{-121}	$\frac{2^{192}}{3^{121}}=1·164360$	*Bes*[17]
Q_{-78}	$\frac{2^{124}}{3^{78}}=1·294975$	*Fes*[11]	Q_{-100}	$\frac{2^{159}}{3^{100}}=1·417894$	*Bes*[14]	Q_{-122}	$\frac{2^{194}}{3^{122}}=1·552480$	*Es*[18]
Q_{-79}	$\frac{2^{126}}{3^{79}}=1·726634$	*Bes*[11]	Q_{-101}	$\frac{2^{161}}{3^{101}}=1·890525$	*Es*[15]	Q_{-123}	$\frac{2^{195}}{3^{123}}=1·034986$	*As*[18]
Q_{-80}	$\frac{2^{127}}{3^{80}}=1·151089$	*Es*[12]	Q_{-102}	$\frac{2^{162}}{3^{102}}=1·260350$	*As*[15]	Q_{-124}	$\frac{2^{197}}{3^{124}}=1·379982$	*Des*[18]
Q_{-81}	$\frac{2^{129}}{3^{81}}=1·534785$	*As*[12]	Q_{-103}	$\frac{2^{164}}{3^{103}}=1·680467$	*Des*[15]	Q_{-125}	$\frac{1^{199}}{3^{125}}=1·839976$	*Ges*[18]
Q_{-82}	$\frac{2^{130}}{3^{82}}=1·023190$	*Des*[12]	Q_{-104}	$\frac{2^{165}}{3^{104}}=1·120311$	*Ges*[15]	Q_{-126}	$\frac{2^{200}}{3^{126}}=1·226651$	*Ces*[18]
Q_{-83}	$\frac{2^{132}}{3^{83}}=1·364254$	*Ges*[12]	Q_{-105}	$\frac{2^{167}}{3^{105}}=1·493748$	*Ces*[15]	Q_{-127}	$\frac{2^{202}}{3^{127}}=1·635534$	*Fes*[18]
Q_{-84}	$\frac{2^{134}}{3^{84}}=1·819005$	*Ces*[12]	Q_{-106}	$\frac{2^{169}}{3^{106}}=1·991664$	*Fes*[15]	Q_{-128}	$\frac{2^{203}}{3^{128}}=1·090356$	*Bes*[18]
Q_{-85}	$\frac{2^{135}}{3^{85}}=1·212670$	*Fes*[12]	Q_{-107}	$\frac{2^{170}}{3^{107}}=1·327776$	*Bes*[15]	Q_{-129}	$\frac{2^{205}}{3^{129}}=1 453808$	*Es*[19]
Q_{-86}	$\frac{2^{137}}{3^{86}}=1·616893$	*Bes*[12]	Q_{-108}	$\frac{2^{172}}{3^{108}}=1·770368$	*Es*[16]	Q_{-130}	$\frac{2^{207}}{3^{130}}=1·938411$	*As*[19]
Q_{-87}	$\frac{2^{138}}{3^{87}}=1·077929$	*Es*[13]	Q_{-109}	$\frac{2^{173}}{3^{109}}=1·180245$	*As*[16]	Q_{-131}	$\frac{2^{208}}{3^{131}}=1·292274$	*Des*[19]

B. Reihe der reinen Quarten.

Q_{-132}	$\frac{2^{210}}{3^{132}} = 1{\cdot}723032$	Ges^{19}	Q_{-154}	$\frac{2^{245}}{3^{154}} = 1{\cdot}886582$	Ces^{22}	Q_{-176}	$\frac{2^{279}}{3^{176}} = 1{\cdot}032827$	Fes^{25}
Q_{-133}	$\frac{2^{211}}{3^{133}} = 1{\cdot}148688$	Ces^{19}	Q_{-155}	$\frac{2^{246}}{3^{155}} = 1{\cdot}257721$	Fes^{22}	Q_{-177}	$\frac{2^{281}}{3^{177}} = 1{\cdot}377103$	Bes^{25}
Q_{-134}	$\frac{2^{213}}{3^{134}} = 1{\cdot}531584$	Fes^{19}	Q_{-156}	$\frac{2^{248}}{3^{156}} = 1{\cdot}676961$	Bes^{22}	Q_{-178}	$\frac{2^{283}}{3^{178}} = 1{\cdot}836138$	Es^{26}
Q_{-135}	$\frac{2^{214}}{3^{135}} = 1{\cdot}021056$	Bes^{19}	Q_{-157}	$\frac{2^{249}}{3^{157}} = 1{\cdot}117974$	Es^{23}	Q_{-179}	$\frac{2^{284}}{3^{179}} = 1{\cdot}224092$	As^{26}
Q_{-136}	$\frac{2^{216}}{3^{136}} = 1{\cdot}361408$	Es^{20}	Q_{-158}	$\frac{2^{251}}{3^{158}} = 1{\cdot}490632$	As^{23}	Q_{-180}	$\frac{2^{286}}{3^{180}} = 1{\cdot}632123$	Des^{26}
Q_{-137}	$\frac{2^{218}}{3^{137}} = 1{\cdot}815211$	As^{20}	Q_{-159}	$\frac{2^{253}}{3^{159}} = 1{\cdot}987510$	Des^{23}	Q_{-181}	$\frac{2^{287}}{3^{181}} = 1{\cdot}088082$	Ges^{26}
Q_{-138}	$\frac{2^{219}}{3^{138}} = 1{\cdot}210140$	Des^{20}	Q_{-160}	$\frac{2^{254}}{3^{160}} = 1{\cdot}325006$	Ges^{23}	Q_{-182}	$\frac{2^{289}}{3^{182}} = 1{\cdot}450776$	Ces^{26}
Q_{-139}	$\frac{2^{221}}{3^{139}} = 1{\cdot}613521$	Ges^{20}	Q_{-161}	$\frac{2^{256}}{3^{161}} = 1{\cdot}766675$	Ces^{23}	Q_{-183}	$\frac{2^{291}}{3^{183}} = 1{\cdot}934368$	Fes^{26}
Q_{-140}	$\frac{2^{222}}{3^{140}} = 1{\cdot}075680$	Ces^{20}	Q_{-162}	$\frac{2^{257}}{3^{162}} = 1{\cdot}177783$	Fes^{23}	Q_{-184}	$\frac{2^{292}}{3^{184}} = 1{\cdot}289578$	Bes^{26}
Q_{-141}	$\frac{2^{224}}{3^{141}} = 1{\cdot}434240$	Fes^{20}	Q_{-163}	$\frac{2^{259}}{3^{163}} = 1{\cdot}570378$	Bes^{23}	Q_{-185}	$\frac{2^{294}}{3^{185}} = 1{\cdot}719438$	Es^{27}
Q_{-142}	$\frac{2^{226}}{3^{142}} = 1{\cdot}912321$	Bes^{20}	Q_{-164}	$\frac{2^{260}}{3^{164}} = 1{\cdot}046919$	Es^{24}	Q_{-186}	$\frac{2^{295}}{3^{186}} = 1{\cdot}146292$	As^{27}
Q_{-143}	$\frac{2^{227}}{3^{143}} = 1{\cdot}274880$	Es^{21}	Q_{-165}	$\frac{2^{262}}{3^{165}} = 1{\cdot}395892$	As^{24}	Q_{-187}	$\frac{2^{297}}{3^{187}} = 1{\cdot}528389$	Des^{27}
Q_{-144}	$\frac{2^{229}}{3^{144}} = 1{\cdot}699841$	As^{21}	Q_{-166}	$\frac{2^{264}}{3^{166}} = 1{\cdot}861189$	Des^{24}	Q_{-188}	$\frac{2^{298}}{3^{188}} = 1{\cdot}018926$	Ges^{27}
Q_{-145}	$\frac{2^{230}}{3^{145}} = 1{\cdot}133227$	Des^{21}	Q_{-167}	$\frac{2^{265}}{3^{167}} = 1{\cdot}240792$	Ges^{24}	Q_{-189}	$\frac{2^{300}}{3^{189}} = 1{\cdot}358568$	Ces^{27}
Q_{-146}	$\frac{2^{232}}{3^{146}} = 1{\cdot}510969$	Ges^{21}	Q_{-168}	$\frac{2^{267}}{3^{168}} = 1{\cdot}654390$	Ces^{24}	Q_{-190}	$\frac{2^{302}}{3^{190}} = 1{\cdot}811424$	Fes^{27}
Q_{-147}	$\frac{2^{233}}{3^{147}} = 1{\cdot}007313$	Ces^{21}	Q_{-169}	$\frac{2^{268}}{3^{169}} = 1{\cdot}102927$	Fes^{24}	Q_{-191}	$\frac{2^{303}}{3^{191}} = 1{\cdot}207616$	Bes^{27}
Q_{-148}	$\frac{2^{235}}{3^{148}} = 1{\cdot}343084$	Fes^{21}	Q_{-170}	$\frac{2^{270}}{3^{170}} = 1{\cdot}470569$	Bes^{24}	Q_{-192}	$\frac{2^{305}}{3^{192}} = 1{\cdot}610155$	Es^{28}
Q_{-149}	$\frac{2^{237}}{3^{149}} = 1{\cdot}790779$	Bes^{21}	Q_{-171}	$\frac{2^{272}}{3^{171}} = 1{\cdot}960759$	Es^{25}	Q_{-193}	$\frac{2^{306}}{3^{193}} = 1{\cdot}073436$	As^{28}
Q_{-150}	$\frac{2^{238}}{3^{150}} = 1{\cdot}193852$	Es^{22}	Q_{-172}	$\frac{2^{273}}{3^{172}} = 1{\cdot}307172$	As^{25}	Q_{-194}	$\frac{2^{308}}{3^{194}} = 1{\cdot}431249$	Des^{28}
Q_{-151}	$\frac{2^{240}}{3^{151}} = 1{\cdot}591803$	As^{22}	Q_{-173}	$\frac{2^{275}}{3^{173}} = 1{\cdot}742897$	Des^{25}	Q_{-195}	$\frac{2^{310}}{3^{195}} = 1{\cdot}908332$	Ges^{28}
Q_{-152}	$\frac{2^{241}}{3^{152}} = 1{\cdot}061202$	Des^{22}	Q_{-174}	$\frac{2^{276}}{3^{174}} = 1{\cdot}161931$	Ges^{25}	Q_{-196}	$\frac{2^{311}}{3^{196}} = 1{\cdot}272221$	Ces^{28}
Q_{-153}	$\frac{2^{243}}{3^{153}} = 1{\cdot}414936$	Ges^{22}	Q_{-175}	$\frac{2^{278}}{3^{175}} = 1{\cdot}549241$	Ces^{25}	Q_{-197}	$\frac{2^{313}}{3^{197}} = 1{\cdot}696295$	Fes^{28}

Über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen.

Von H. Hahn, G. Herglotz und K. Schwarzschild.

In einem während des letzten Winters unter der Leitung von F. Klein abgehaltenen Seminar über Hydraulik haben wir über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen berichtet. Es ist das ein Gegenstand von weitgehender praktischer Bedeutung und zugleich von großem theoretischem Interesse, der aber von den Technikern wesentlich nur nach der praktischen Seite hin erforscht und von Physikern und Mathematikern wohl nicht nach Gebühr gewürdigt ist. Wir glauben daher in der Absicht der Vermittlung und Anregung die folgende Darstellung trotz ihres zum Teil referierenden, zum Teil vorläufigen Charakters veröffentlichen zu sollen.

1. Allgemeines. — Wenn ein sehr breiter Strom von der Tiefe h in einem gleichförmigen Bett unter der Neigung i zu Tale fließt, so wird man diese Wasserbewegung im Sinne der klassischen Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten behandeln, indem man ein Strömen der Flüssigkeit in parallelen Fäden mit einer der Stromrichtung parallelen Geschwindigkeit u voraussetzt und u von der Tiefe y unter der Oberfläche abhängen läßt. Die Grundgleichungen von Stokes liefern dann die Bedingung stationären Strömens:

$$\frac{du}{dt} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + g \sin i = 0,$$

wo μ den Reibungskoeffizienten des Wassers und g die Schwere bedeutet. Fügt man als Randbedingungen hinzu, daß am Boden die Flüssigkeit ruht ($u = 0$ für $y = h$) und daß an der Oberfläche keine Reibung stattfindet $\left(\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ für } y = 0\right)$, so erhält man sofort das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in dem Strome:

$$u = \frac{g \sin i}{\mu} \frac{(h^2 - y^2)}{2}.$$

Setzt man in diese Formel den Reibungskoeffizienten des Wassers ($\mu = 0.018$ im c. g. s. System) ein, die Neigung $\sin i = 0.0001$ und die Tiefe $h = 400$ cm entsprechend den Verhältnissen im Mittellauf unsrer Ströme, so folgt für die Geschwindigkeit u an der Oberfläche der kolossale Betrag von 436 m/sec. Da die wirkliche Oberflächengeschwindigkeit unter diesen Umständen rund 1 m/sec. beträgt, so erhellt, daß in einem natürlichen Stromlauf eine Reibungskraft von ganz

anderer Größenordnung, als die gewöhnliche molekulare Reibung des Wassers, wirksam sein muß. Man kann diese Reibung auf nichts anderes zurückführen, als auf das Durcheinanderströmen aller Flüssigkeitsfäden, die sogen. *Turbulenz der Wasserbewegung*.

Es ist neben anderen von Reynolds[1]) durch Beobachtung von Farbenbändern in fließendem Wasser, von Couette[2]) durch Beobachtung der Dämpfung schwingender Flüssigkeitsbehälter festgestellt worden, daß die Laminarbewegung, das Strömen in parallelen Fäden, instabil wird, sobald die Geschwindigkeit der Strömung einen gewissen, mit wachsenden Dimensionen des Gefäßes abnehmenden Betrag überschreitet. Von der mathematischen Seite ist die Frage der Stabilität der Laminarbewegung von Lord Rayleigh und Lord Kelvin angegriffen worden. Rayleigh[3]) untersucht wesentlich reibungslose Flüssigkeiten, welche leider keine Kontinuitätsschlüsse auf das Verhalten reibender Flüssigkeiten gestatten, da die reibende Flüssigkeit an der Wand haftet, die reibungslose an ihr mit endlicher Geschwindigkeit gleitet. Lord Kelvin[4]) behandelt zwar direkt reibende Flüssigkeiten und kommt zu dem Schluß, daß es sich bei der Instabilität der Laminarbewegung um den merkwürdigen Fall handle, wo die unendlich kleinen Schwingungen um die Ausgangsbewegung stabil sind und erst Größen zweiter Ordnung, endliche Schwingungen die Instabilität herbeiführen. Doch kann sein Beweis keineswegs als zwingend angesehen werden, und so ist die ganze Frage von der mathematischen Seite aus als eine noch völlig offene zu bezeichnen.

Verzichtet man aber auf eine Erklärung des Entstehens der Turbulenz und sucht die Erscheinungen voll ausgebildeter Turbulenz, wie sie beim wirklichen Strömen in Röhren, Kanälen und Flüssen auftreten, zu erfassen und zu beschreiben, so sind es *die Untersuchungen von* Boussinesq, die hier am weitesten vordringen. (Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. d. Sciences. Tome 23. Paris 1877 und Théorie de l'Écoulement tourbillonant et tumultueux des liquides. Gauthier-Villars. Paris 1897.) Daß dieselben so wenig gekannt sind und z. B. in dem neuesten schönen Treatise on Hydraulics von Bovey (2. Auflage. Newyork 1902) nicht einmal zitiert werden, mag daran liegen, daß Herr Boussinesq sich einer aprioristisch-deduktiven Darstellungsweise bedient, für die das Gebiet noch nicht reif erscheint. Wir sind im folgenden bemüht, dieselbe durch eine möglichst induktive zu ersetzen.

1) London. Philos. Transactions. 174. (1883.)
2) Annales de Physique et de Chimie. (6.) 21. 1890.
3) Scientific papers. Vol. I, pag. 474. Vol. III, pag. 17, 575. Vol. IV, pag. 78, 210.
4) Philos. Mag. (5) 24. (1887) und Brit. Associat. Report. (1880).

Boussinesq zerlegt die wirklichen Geschwindigkeiten der Wasserteilchen U, V, W in mittlere Geschwindigkeiten u, v, w plus unregelmäßigen und rasch veränderlichen „turbulenten" Zusatzgeschwindigkeiten u', v', w'. *Die Wirkung dieser turbulenten Zusatzgeschwindigkeiten besteht nach Boussinesq darin, daß für die mittleren Geschwindigkeiten Differentialgleichungen gelten, welche mit den klassischen Differentialgleichungen für reibende Flüssigkeiten genau übereinstimmen, nur daß statt der Reibungskonstanten μ eine viel größere und je nach Art und Größe der turbulenten Zusatzgeschwindigkeiten von Fall zu Fall und von Ort zu Ort veränderliche Reibungskonstante ε eintritt.* Man hätte also z. B. für einen in der x-Richtung gleichförmig und stationär durch ein Bett von unveränderlichem Querschnitt fließenden Strom — ein Fall, auf den wir uns durchweg beschränken — die Differentialgleichung:

$$0 = \sin i \cdot g + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right), \tag{2}$$

wobei ε mit der Stelle im Querschnitt, mit y und z veränderlich wäre.

Die Differentialgleichungen für die mittleren Geschwindigkeiten einer turbulenten Strömung müssen eine reine Konsequenz der ursprünglichen hydrodynamischen Gleichungen für die Invidivualgeschwindigkeiten der einzelnen Wasserteilchen sein. Boussinesq sucht eine solche Ableitung wirklich durchzuführen und scheint die Ursache der vermehrten scheinbaren Reibung bei Turbulenz in der eigentlichen Reibung der Turbulenz selbst, in der stärkeren Verwandlung von Strömungsenergie in Wärme infolge der vielen raschen Geschwindigkeitswechsel zu suchen. H. A. Lorentz hat gezeigt[1]), daß diese Art der Ableitung nicht richtig sein kann und daß die vermehrte scheinbare Reibung durch den Transport und Austausch von Bewegungsgröße bedingt wird, der zwischen den einzelnen Stellen des Stromquerschnitts bei turbulenter Bewegung stattfindet. Man kann die Schwierigkeit des hier vorliegenden noch ungelösten Problems durch einen Vergleich mit der Gastheorie verdeutlichen und schärfer isolieren. Man spalte den Druck analog den Geschwindigkeiten in einen mittleren Teil p und einen turbulenten Teil p', nenne ferner E' die mittlere Energie der turbulenten Zusatzbewegung und bezeichne allgemein durch einen Querstrich den Mittelwert einer räumlich rasch wechselnden Größe über ein geeignet kleines Gebiet. Dann kann man aus den hydrodynamischen Grundgleichungen durch einfache Mittelwertbildungen folgende Sätze ableiten unter der alleinigen Voraussetzung, daß die mittleren Geschwindigkeiten u, v, w und die Mittelwerte über die Produkte und Quadrate der turbulenten

1) Verslagen der Akad. van Wetenschapen. Amsterdam 6 (1897).

Geschwindigkeiten $\overline{u'v'}$, $\overline{u'^2}$ usw. räumlich und zeitlich hinreichend langsam veränderlich sind:

$$\frac{du}{dt} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3}$$

$$\tfrac{2}{3} E' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\left(\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial y} + v' \frac{\partial p'}{\partial x}}\right) \tag{4}$$

$$\tfrac{4}{3} E' \frac{\partial u}{\partial x} = -\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}}. \tag{5}$$

In der Gastheorie[1]) gelangt man zu völlig analogen Gleichungen, wobei an Stelle der Terme $\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial y} + v' \frac{\partial p'}{\partial x}}$ und $\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}}$ die durch die Zusammenstöße der Moleküle erfolgenden zeitlichen Änderungen der Werte von $\overline{u'v'}$ und $\overline{u'^2}$ stehen, welche wir durch $\frac{D\overline{u'v'}}{Dt}$ und $\frac{D\overline{u'^2}}{Dt}$ bezeichnen wollen. Aus einer eingehenden Diskussion des Mechanismus der Zusammenstöße läßt sich dort der Nachweis erbringen, daß die Beziehungen gelten:

$$\frac{D\overline{u'v'}}{Dt} = -\varkappa \overline{u'v'}$$

$$\frac{D\overline{u'^2}}{Dt} = -\varkappa\left(\overline{u'^2} - \tfrac{2}{3}E'\right),$$

und damit folgen dann unmittelbar durch Einsetzen in (3), (4), (5) die bekannten Gleichungen für eine reibende Flüssigkeit, wobei der Reibungskoeffizient der Energie E' der unregelmäßigen Bewegung der Moleküle, d. i. der Temperatur proportional wird. In unserem Falle würde also die Aufgabe bleiben, die Relationen:

$$\left(\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial y} + v' \frac{\partial p'}{\partial x}}\right) = \varkappa \overline{u'v'}$$

und

$$\overline{u' \frac{\partial p'}{\partial x}} = \varkappa\left(\overline{u'^2} - \tfrac{2}{3}E'\right)$$

nachzuweisen. Es läßt sich denken, daß dies in Analogie zur Gastheorie geschehen könnte, indem man sich die Turbulenz in Gestalt von zahlreichen die Flüssigkeiten durchziehenden Wirbelkugeln vorstellte, deren Bewegungen und Zusammenstöße zu studieren wären.

Im folgenden nehmen wir jedenfalls mit Boussinesq für die turbulente Bewegung die Gültigkeit der hydrodynamischen Gleichungen bei variablem Reibungskoeffizienten ε als gegeben an. Unter ε haben wir

1) Vgl. Kirchhoff, Vorlesungen über Wärme. S. 178 ff.

dabei eine der Energie der turbulenten Bewegung proportionale Größe zu verstehen und wollen uns daher erlauben, ε kurz als „Turbulenz" zu bezeichnen. Wir sehen unsere weitere Aufgabe darin, aus den vorhandenen Beobachtungen auf Grund der Differentialgleichung (2) die Werte von ε abzuleiten und auf diese Weise Aufklärung über das Verhalten der Turbulenz zu gewinnen.

Worüber wir zugleich Orientierung suchen, ist die Randbedingung, der die Flüssigkeit an den Wänden unterworfen ist. Zwar kann kein Zweifel bestehen, daß die letzten Flüssigkeitsteilchen an der Wand ruhen, auf der andern Seite zeigen aber schon rohe Beobachtungen, daß der Absturz der Geschwindigkeit in Röhren und Kanälen von Werten, die in bezug auf die Größenordnung der Mittelgeschwindigkeit entsprechen, auf Null erst in unmittelbarster Nachbarschaft der Wand erfolgt (auf Strecken von 1—2 cm bei Leitungen von 50—100 cm Durchmesser). Es empfiehlt sich daher, mit Herrn Boussinesq auf die Analyse dieses letzten Absturzes zu verzichten und der Flüssigkeit eine Randgeschwindigkeit u_0 zuzuschreiben. Die Wirkung der Wand kommt dann zum Ausdruck in der reibenden Kraft $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}$, welche sie auf die Flüssigkeit ausübt, und welche wesentlich nur eine Funktion von u_0 und der Rauhigkeit der Wand sein kann. Bezeichnet n die äußere Normale der Wand, so hat man daher eine Grenzbedingung der Form vorauszusetzen:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi(u_0) = 0. \tag{2a}$$

Es sind im ganzen die beiden Funktionen ε und φ, die wir aus den Beobachtungen zu bestimmen haben.

2. **Das verfügbare Beobachtungsmaterial** ist von zweierlei Art. Einmal liegen zahlreiche Experimente über die Ergiebigkeit oder — was dasselbe ist — die *mittlere Geschwindigkeit* in Röhren, Kanälen und Flüssen vor. Es scheint, daß die beste Zusammenfassung der Ergebnisse solcher Versuche durch die Potenzenformel:

$$\bar{u} = c \cdot h^{\lambda} i^{\mu} \tag{6}$$

gegeben wird, wobei i (nahe genug $= \sin i$) das Gefälle, h der „hydraulische Radius" (Querschnitt dividiert durch benetzten Umfang) ist und c einen mit der Rauhigkeit der Wandung abnehmenden Koeffizienten bedeutet. Als Einheiten benutzen wir Meter und Sekunde. Für offene Kanäle hat man nahe: $\lambda = {}^2/_3$, $\mu = {}^1/_2$ und $c = 100$ (für Zementbekleidung) bis $c = 30$ (für bewachsene Erddurchstiche). Für Röhren hat man $\lambda = 0{,}59$—$0{,}66$, $\mu = 0{,}51$—$0{,}58$ und $c = 30$ bis 60. (S. Bovey,

l. c. pag. 153 u. 253.) Die ältere *Chézysche Formel*, welche $\lambda = \mu = 1/2$ setzte, gibt für engere Intervalle eine erträgliche Annäherung.

Zweitens findet sich ein sehr wertvolles Beobachtungsmaterial in den Versuchen von Bazin über die *Verteilung der Strömungsgeschwindigkeiten* auf die einzelnen Punkte des Querschnitts verschieden geformter Wasserleitungen.[1])

3. Eindimensionale Probleme. a) Der unendlich breite offene Kanal. — In einem Kanal, dessen Breite groß gegen die Tiefe ist, wird die Geschwindigkeit u nur abhängig von der Tiefe unter der Oberfläche. Zählen wir die y-Koordinate vertikal nach unten, so vereinfacht sich die Differentialgleichung (2) hier zu:

$$0 = ig + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Integriert man von einer Stelle y_0 aus, für welche $\frac{\partial u}{\partial y}$ verschwindet, so erhält man:

$$\varepsilon = \frac{ig(y_0 - y)}{\frac{\partial u}{\partial y}}, \tag{8}$$

woraus man bei beobachteter Geschwindigkeitsverteilung u sofort die Turbulenz ε berechnen kann. Nun hat Bazin die Geschwindigkeit u in Kanälen von 0,08 bis 0,38 m Tiefe bei Neigungen von 0,0015 bis 0,009 von der Oberfläche weg bis wenige cm über dem Boden messend verfolgt und festgestellt, daß die Geschwindigkeit u mit der Tiefe y unter der Oberfläche von dem maximalen Oberflächenwert u_m an abnimmt nach der parabolischen Formel:

$$u = u_m - 20\sqrt{ih} \cdot \frac{y^2}{h^2}. \tag{9}$$

Hieraus folgt: $y_0 = 0$ und durch Einsetzen in (8):

$$\varepsilon = \frac{g}{40} \cdot h \cdot \sqrt{hi}, \tag{10}$$

woraus vor allem die Tatsache zu entnehmen ist: *Im breiten Kanal ist die Turbulenz konstant über den ganzen Querschnitt.*

Für die Randgeschwindigkeit folgt:

$$u_0 = u_m - 20\sqrt{ih}.$$

1) Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. d. Sc. Tome 19. Paris (1865) und Tome 32 (1902). Diese beiden Publikationen werden weiterhin als B_1 und B_2 bezeichnet. Der ersteren ist ein Atlas beigegeben, auf den sich die Zitate Planche Nr. ... beziehen.

Wir bilden weiter die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$. Es ist:

$$\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u\,dy = u_m - \frac{20}{3}\sqrt{hi} = u_0 + \frac{40}{3}\cdot\sqrt{hi}.$$

Dieses Resultat ist anzuschließen an die Beobachtungen über die mittlere Geschwindigkeit in Kanälen. Adoptiert man hier zunächst die Chézysche Formel:

$$\bar{u} = c\sqrt{hi},$$

so folgt:

(11) $$u_0 = \sqrt{B}\cdot\sqrt{hi}, \quad \sqrt{B} = c - \frac{40}{3}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Randbedingung (2a) ein, so findet man:

(12) $$\varphi(u_0) = \frac{g}{B}u_0^2.$$

Damit sind die beiden gesuchten Funktionen ε und φ aus den Beobachtungen bestimmt. Den Wert von ε kann man noch in der Form schreiben:

(13) $$\varepsilon = \frac{g}{40}\cdot\frac{h\cdot u_0}{\sqrt{B}}.$$

So folgen die anschaulichen Resultate: *Der Widerstand der Wand ist gleich dem Quadrat der Randgeschwindigkeit, multipliziert mit einer bei wachsender Rauhigkeit der Wand wachsenden Konstanten (c nimmt mit wachsender Rauhigkeit ab). Die Turbulenz ist proportional der Wurzel aus dieser Konstanten, der Randgeschwindigkeit und der Tiefe des Kanals.* Es sind gerade diese Sätze, welche Herr Boussinesq als an sich plausible Hypothesen an die Spitze seiner Theorie stellt, was manchen Leser stutzig gemacht haben mag. Wir sehen hier, wie diese Sätze direkt aus den Beobachtungen folgen und wie die vorhandenen Beobachtungen gerade genügen und nur genügen, um sie abzuleiten und damit das, was in dem allgemeinen Ansatz noch willkürlich blieb, festzulegen.

Die Verhältnisse komplizieren sich, wenn man statt der Chézyschen Formel die allgemeine Formel: $\bar{u} = ch^\lambda i^\mu$ für die mittlere Geschwindigkeit einführt. Es zeigt sich dann sogar, daß ein Widerspruch mit Bazins Resultaten über die Geschwindigkeitsverteilung eintritt, der sich in Strenge nur aufheben ließe, wenn man den Widerstand der Wand außer von u_0 noch von ε abhängig machte. Doch wird eine Vermittlung gebildet durch den Ansatz:

$$\varphi(u_0) = \frac{g}{B}u_0^{1/\mu}$$

$$\varepsilon = \frac{g}{3B}h u_0^{\frac{1-\mu}{\mu}}\frac{1}{cB^{-\mu}h^{\lambda-\mu}-1},$$

aus welchem einerseits die Formel $\bar{u} = ch^{\lambda} i^{\mu}$, andererseits die Formel für die Verteilung der Geschwindigkeiten:

$$u = u_m - \tfrac{3}{2}(ip)^{\mu}(ch^{\lambda-\mu} - B^{\mu})\frac{y^2}{h^2}$$

hervorgeht, welch letztere für einen Wert von μ sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$ und $\lambda - \mu = \frac{1}{6}$ bei der geringen Variation von h, die bei Bazins Beobachtungen (B_1 pag. 229) erfolgte, durch geeignete Wahl von B in praktisch völlig genügende Übereinstimmung mit dessen Resultaten zu bringen ist.

b) **Die kreisförmige Röhre.** — Hängt die Geschwindigkeit nur vom Abstand r von der Röhrenmitte ab, so geht die Differentialgleichung (2) über in:

$$0 = ig + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon r \frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{14}$$

Da für $r = 0$ aus Symmetriegründen $\frac{\partial u}{\partial r}$ verschwinden muß, so folgt durch Integration:

$$\varepsilon = -\frac{igr}{2\frac{\partial u}{\partial r}}, \tag{15}$$

woraus bei bekannter Geschwindigkeitsverteilung wiederum ε abzulesen ist.

Bazin hat seine Versuche über die Geschwindigkeitsverteilung in Röhren sehr nahe durch die Formel (B_1 pag. 242)

$$u = u_m - 20\sqrt{R \cdot i}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \tag{16}$$

darstellen können (R Röhrenradius). Es folgt daraus:

$$\varepsilon = \frac{g}{120} i^{1/2} R^{3/2} \cdot \frac{R}{r}.$$

Ein zuverlässiges Resultat ist dieser Formel zu entnehmen: *Die Turbulenz nimmt gegen die Wand einer Kreisröhre hin stark ab.* Hingegen ist nach der Mitte der Röhre zu ε als Quotient der beiden abnehmenden Größen r und $\frac{\partial u}{\partial r}$ immer schlechter bestimmbar, und man wird für kleine r in der obigen Formel nur eine bedeutungslose Extrapolation zu sehen haben.

In der Tat ergibt sich ein plausibleres Resultat für die Röhrenmitte, wenn man statt auf die Bazinsche Formel (16) auf dessen Beobachtungen selbst zurückgeht. Herr Bazin findet (vergl. B_2) für eine Röhre von 0,4 m Radius die folgenden Geschwindigkeiten:

$\frac{r}{R}$ =	0,000	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	0,9375,
$\frac{u}{\bar{u}}$ =	1,1675	1,1605	1,1475	1,1258	1,0923	1,0473	1,0008	0,9220	0,8465.

Trägt man diese Werte graphisch auf, verbindet sie durch eine glatte Kurve und entnimmt dieser den Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial r}$, so erhält man aus (15) die folgenden Werte von ε (in einer willkürlichen Einheit)

$\frac{r}{R}$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,93,
ε	1,7	1,5	1,6	1,2	0,7	0,5.

Wie man sieht, *bleibt die Turbulenz über etwa* $^2/_3$ *des Röhrenradius von der Mitte aus konstant, um erst an der Wand rapide abzusinken.*

Bildet man nach Formel (16) die mittlere Geschwindigkeit und zieht für letztere die Chézysche Formel heran, so findet man analog wie oben einen dem Quadrat der Randgeschwindigkeit proportionalen Reibungswiderstand, was in diesem zweiten Falle nicht näher ausgeführt werden soll. (Vgl. Boussinesq, Théorie de l'écoulement I § 14, 15).

4. Zweidimensionale Probleme. — Ist der Querschnitt des Wasserlaufs so beschaffen, daß u nicht als Funktion einer Variabeln betrachtet werden kann, so wird es etwas schwieriger, aus der Verteilung von u die Verteilung von ε abzuleiten. Es handelt sich dann um die Bestimmung von ε aus der (für ε linearen) Differentialgleichung:

$$0 = ig + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{17}$$

oder:

$$0 = ig + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Zeichnet man die Linien $u = \text{const.}$ für in gleichen Intervallen fortschreitende Werte der Konstanten auf, bildet die orthogonalen Trajektorien derselben und führt ein krummliniges Koordinatensystem ein, dessen eine Koordinate u selbst ist, während die andere t auf jeder orthogonalen Trajektorie konstant ist, so hat man für das Linienelement:

$$ds^2 = p^2 du^2 + q^2 dt^2,$$

wobei p dem Abstand zweier Linien $u = \text{const.}$, q dem Abstand zweier benachbarter orthogonaler Trajektorien proportional ist. In diesem Koordinatensystem nimmt die Differentialgleichung für ε die einfache Form an:

$$0 = ig + \frac{1}{pq}\frac{\partial}{\partial u}\left(\varepsilon \frac{q}{p}\right),$$

deren Integral ist:

$$\varepsilon = -ig\frac{p}{q}\int pq\,du. \tag{18}$$

Will man die Abstände der Linien $u = \text{const.}$ und ihrer orthogonalen Trajektorien nicht zeichnerisch bestimmen, so kann man sich statt dessen der Formeln bedienen:

$$(19)\ p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}, \quad q = p \cdot \sigma, \quad \log \sigma = \int du \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

Die Willkürlichkeit der Integrationskonstante auf jeder einzelnen Trajektorie $t = \text{const.}$, welche im allgemeinen der Lösung der Differentialgleichung (17) anhaftet, wird in Praxi dadurch behoben, daß jedes Mal ein Punkt maximaler Geschwindigkeit im Querschnitt vorhanden ist, für welchen $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}$ ist und für welchen man ε aus:

$$0 = ig + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

bestimmen muß, wenn man keine Unstetigkeiten für $\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$ oder $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$ erhalten will. Mit anderen Worten: Die Unbestimmtheit der Lösung der Differentialgleichung wird in Praxis durch die Forderung, daß die Lösung im Punkte maximaler Geschwindigkeit stetig sein soll, beseitigt.

So einfach es im Prinzip scheint, für eine Reihe von Werten von x oder y die beobachteten Werte von u aufzutragen, aus einer durch sie gelegten Kurve $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ abzulesen und dann die beiden Integrationen (19) und (18) mechanisch etwa mit 2stelliger Genauigkeit auszuführen, so hat diese Aufgabe doch in Praxi ihre Schwierigkeiten, da namentlich gegen den Rand des Querschnitts zu die Interpolation und Extrapolation der beobachteten Werte u sehr willkürlich wird, weil die Beobachtungen stets einige *cm* von der Wand aufhören.

a) **Gedeckte Kanäle.** Bazin hat von zweidimensionalen Problemen nur einen Fall untersucht, bei welchem das Wasser ohne freie Oberfläche und von allen Seiten durch feste Wände eingeschlossen war, er hat die Geschwindigkeitsverteilung in *geschlossenen rechteckigen Kanälen* gemessen (B_1, pag. 168. Séries Nr. 51 u. 52). Wir haben auf die Mittelwerte seiner Versuche für einen Kanal von 0,8 *m* Breite und 0,5 *m* Höhe, die auf Planche XVIII in Fig. 7 graphisch dargestellt sind, das obige Verfahren anzuwenden begonnen und zunächst gesehen, daß sich die Beobachtungen ungezwungen so interpolieren ließen, daß $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ konstant über den ganzen Querschnitt wurde. Die brauchbare Lösung der Differentialgleichung (17) ist dann: $\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{1}{ig}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$,

d. h. auch die Turbulenz wird über den ganzen Querschnitt konstant. Zur Kontrolle haben wir die Beobachtungsresultate noch durch den allgemeinsten zu den Koordinatenachsen symmetrischen Ausdruck vierten Grades, der für $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ einen konstanten Wert liefert, nämlich:

$$u = D - Ay^2 - Bz^2 - C(y^4 - 6y^2z^2 + z^4)$$

interpoliert, indem der Mittelpunkt des Rechtecks zum Nullpunkt des Koordinatensystems genommen und die y-Achse parallel der Längseite gelegt wurde. Die gefundene Formel:

$$u = 1{,}176 - 1{,}50y^2 - 5{,}63z^2 - 0{,}0653(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) \tag{20}$$

läßt zwar noch merkliche systematische Unterschiede gegen die Beobachtungen, genügt aber für den gleich zu erwähnenden Zweck:

Wir wollen nämlich jetzt nach der Randbedingung fragen, welche von dieser Geschwindigkeitsverteilung erfüllt wird. Man findet für die Normalderivierte von u auf der Längsseite:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0{,}347 - 1{,}78y^2$$

und auf der Schmalseite:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0{,}284 - 2{,}85z^2.$$

Daraus folgt für die Ecke des Rechtecks ($y = 0{,}4$, $z = 0{,}25$) $\frac{\partial u}{\partial n} = 0{,}072$ resp. $0{,}106$. Es nimmt also $\frac{\partial u}{\partial n}$ von der Mitte der Seiten nach den Ecken zu auf den 3. bis 5. Teil seines Wertes ab. Auf der andern Seite folgt aus (20) für die Geschwindigkeit in der Mitte der Seiten 0,803 resp. 0,798 und für die Geschwindigkeit in der Ecke 0,748, also nur eine Abnahme um 6—7 %.

Nun muß die Randbedingung die Form haben:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(u_0).$$

Da ε konstant vorausgesetzt ist, sieht man, daß $\varphi(u_0)$ mindestens der sechsten Potenz von u_0 proportional sein müßte, um diese Gleichung zu erfüllen.

Das erscheint nicht akzeptabel. Man muß daher die Konstanz von ε aufgeben und die Willkürlichkeit der Extrapolation der Bazinschen Werte bis an den Rand des Rechtecks so ausnützen, daß der Wert von $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}$ in den Ecken vergrößert wird. Es läßt sich einsehen, daß man dies nur erreichen kann, indem man ε an den Ecken abnehmen

läßt, wodurch sich $\frac{\partial u}{\partial n}$ in einem stärkeren Verhältnis vergrößert, sodaß das Produkt $\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}$ wächst. Das qualitative Resultat, mit dem wir uns begnügen wollen, ist dieses: *Im geschlossenen rechteckigen Kanal ist die Turbulenz über den größten Teil des Querschnittes konstant und nimmt nur nach den Ecken zu ab.*

b) **Offene Kanäle.** Ein auffälliges Merkmal der Geschwindigkeitsverteilung in Flüssen, wie in offenen Kanälen, deren Breite nicht sehr groß gegen die Tiefe ist, besteht darin, daß die Maximalgeschwindigkeit sich nicht in der Mitte an der Oberfläche, sondern in einer gewissen Tiefe unter der Oberfläche vorfindet, die bis zu $\frac{1}{3}$ der ganzen Tiefe ausmachen kann. Man sieht den Diagrammen der Geschwindigkeitsverteilung, die Bazin in seinem Atlas für die verschiedensten oben offenen Kanalformen auf Planche 20—22 gezeichnet hat, an, daß man diese Ergebnisse darstellen könnte durch Annahme eines Widerstandes der Luft, welcher etwa ein Viertel des Widerstands der Wände wäre. Indessen wird die Annahme eines merklichen Einflusses der Luft durch die einfache Beobachtung widerlegt, daß bei talwärts wehendem Wind von gleicher oder größerer Geschwindigkeit, als der Strom besitzt, die Maximalgeschwindigkeit keineswegs an die Oberfläche verlegt und überhaupt nichts Merkliches an dem Geschwindigkeitsbild geändert wird. Ist kein Luftwiderstand vorhanden, so muß übrigens, wie gleich hinzugefügt sei, an der Oberfläche die Grenzbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ gelten.

Wie soll aber ohne Luftwiderstand das Herabsinken der Maximalgeschwindigkeit erklärt werden? Die Erklärung ergibt sich von selbst, wenn man etwa die von Bazin beobachtete Geschwindigkeitsverteilung in einem offenen Kanal von 2 *m* Breite und 0,66 *m* Tiefe (Planche XX, Fig. 8.) vornimmt, so extrapoliert, daß an der Oberfläche $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ wird, und auf die durch die vertikale Mittellinie gegebene Orthogonaltrajektorie die obige Methode anwendet. Es folgt dann, daß ε nach der Oberfläche hin zunimmt. *Man kommt also zu dem Schluß, daß die freie Oberfläche eine Schicht größerer Turbulenz bildet*, und es läßt sich dann leicht vorstellen, daß dieselbe durch ihre größere effektive Zähigkeit eine ähnliche Wirkung wie der vermeintliche Luftwiderstand ausübt.

Beobachtet man das Herabsinken des Geschwindigkeitsmaximums auf den verschiedenen Diagrammen Bazins und nimmt seinen Betrag als ein Maß der Turbulenz der Oberfläche, so erhält man den Eindruck, daß die Turbulenz der Oberfläche wächst mit der größeren Rauheit der Kanalwände und daß sie sich umso fühlbarer macht, je schmäler

der Kanal im Vergleich zu seiner Tiefe ist. Die verstärkte Oberflächenturbulenz scheint also eine Wirkung der Zersplitterung der Wellen an der unregelmäßigen Uferwand zu sein. Wir werden gleich zu bemerken haben, daß sich die unter dem Wasserspiegel liegenden Teile der Wand ganz anders verhalten.

5. Versuch über die Leitung der Turbulenz. — Die Boussinesqsche Theorie ist ein Schema, in welchem sich die Beobachtungstatsachen, wie aus dem vorgehenden erhellt, durch geeignete Wahl von ε in durchsichtiger Weise unterbringen lassen. Eine Voraussage der Erscheinungen würde sie aber erst dann gestatten, wenn neben die Gleichungen (2) für die mittlere Bewegung allgemeine Gleichungen für die Bestimmung der Größe der Turbulenz träten — genau so, wie die Gastheorie erst vollständig ist, wenn neben die hydrodynamischen Gleichungen für die Molarbewegung des Gases die Gleichung für seine Molekularbewegung, die Wärmeleitungsgleichung tritt. Die Analogie der Gastheorie soll uns bei einem Versuch zu einer solchen Ergänzung des Boussinesqschen Ansatzes leiten.

Sobald man einmal mit Herrn Boussinesq für die turbulente Strömung die Gleichungen reibender Flüssigkeiten mit veränderlichem Reibungskoeffizienten ε angenommen hat, ist damit gesagt, wieviel Turbulenz jeder Zeit an jedem Ort auf Kosten der Energie der mittleren Bewegung u, v, w entsteht, nämlich ebensoviel, als bei einer gewöhnlichen nicht turbulenten Flüssigkeit vom Reibungskoeffizienten ε in Wärme übergeführt würde, und dieser Betrag wird durch die bekannte Dissipationsfunktion gegeben (der Ausdruck werde gleich auf den Fall der Strömung in einem Kanal von gleichförmigem Querschnitt reduziert):

$$F = \frac{\varepsilon}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Es ist das eine direkte Folgerung aus dem Energieprinzip. Weiß man damit also, wieviel Turbulenz entsteht, so ist nur zu überlegen, wie diese Turbulenzenergie wieder verschwindet, da der Gesamtbetrag der Turbulenz bei stationärer Strömung konstant bleiben muß. Ein Teil derselben wird sich gewiß infolge der eigentlichen Molekularreibung der Flüssigkeit in Wärme verwandeln, man wird diesen Betrag aber wohl bei der Kleinheit der inneren Reibung des Wassers vernachlässigen dürfen, und so wird man zu der Annahme geführt, die durch das Absinken von ε nach der Wand zu in den obigen Beispielen fast unumgänglich wird, *daß die Turbulenz durch Leitung über die ganze Flüssigkeit hin transportiert und an den Wänden durch Reibung verzehrt wird.*

Die Turbulenzmenge, welche der Volumeneinheit pro Zeiteinheit

durch Leitung zugeführt wird, wollen wir in vollständiger Analogie zur Wärmeleitung durch ein Gas gleich:

$$-\frac{k}{2}\left(\frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial z^2}\right),\quad k \text{ konstant,}$$

setzen, wobei die Leitfähigkeit gleich $k\varepsilon$ — wie beim Gas mit der Temperatur, so hier mit der Turbulenz wachsend — angesetzt ist. Für den stationären Zustand muß dann gelten:

$$0=\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}+k\left\{\frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial z^2}\right\}. \tag{20}$$

Die an die Wand abfließende Turbulenzmenge wird unter denselben Voraussetzungen durch $\frac{k}{2}\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial y}$ gegeben, und man wird passend versuchen, diese Abgabe als Funktion der Randgeschwindigkeit darzustellen, sodaß man die Randbedingung hat:

$$\frac{k}{2}\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial p}=\psi(u_0). \tag{20a}$$

An einer freien Oberfläche, auf der sich der Einfluß der Wände nicht bemerkbar macht, wird entsprechend gelten:

$$\frac{k}{2}\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial n}=0. \tag{20b}$$

Wenden wir dies an auf den offenen Kanal von unendlicher Breite, so haben wir das vollständige Gleichungssystem:

$$0=ig+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad 0=\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+k\frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial y^2}$$

mit den Randbedingungen für $y=0$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=k\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial y}=0$$

und für $y=h$:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{g}{B}u_0^2,\quad \frac{k}{2}\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial y}=\psi(u_0).$$

Die erste Differentialgleichung gibt integriert:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-igy.$$

Dies liefert in die zweite eingesetzt:

$$0=\frac{i^2g^2}{k}y^2+\varepsilon\frac{\partial^2\varepsilon^2}{\partial y^2}.$$

Beginnt man hier ε nach Potenzen von y in Rücksicht auf die Randbedingung für $y=0$ zu entwickeln, so ergibt sich für die ersten Glieder:

$$\varepsilon=\varepsilon_m\left[1-\frac{i^2g^2}{24k\varepsilon_m^3}y^4-\cdots\right]$$

wobei ε_m eine Integrationskonstante ist. Wählt man die Leitungskonstante k groß genug, so genügt diese Annäherung, und es wird ε sehr nahe konstant gleich dem Werte ε_m. Es folgt damit:

$$u = u_m - \frac{igy^2}{2\varepsilon_m}\left[1 + \frac{1}{72}\frac{i^2g^2}{k\varepsilon_m^3}y^4\right],$$

was man für großes k auch auf: $u = u_m - \frac{igy^2}{2\varepsilon_m}$ beschränken darf. Es erübrigt die beiden Grenzbedingungen für $y = h$ zu erfüllen. Dieselben werden:

$$Bih = u_0^2, \quad \left(u_0 = u_m - \frac{igh^2}{2\varepsilon_m}\right)$$
$$\frac{1}{6}\frac{i^2g^2}{\varepsilon_m}h^3 = \psi(u_0).$$

Die Beobachtungen lieferten für ε_m den Wert (vgl. (10)): $\varepsilon_m = \frac{g}{40}h\sqrt{hi}$. Man erhält denselben aus der letzten Gleichung, wenn man

$$\frac{k}{2}\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial n} = \psi(u_0) = \frac{40}{6}\frac{g}{B^{3/2}}u_0^3 \tag{21}$$

setzt.

Das Ergebnis läßt sich dahin zusammenfassen: *Man erhält aus dem der Gastheorie nachgebildeten Ansatz für die Leitung der Turbulenz im Falle des unendlich breiten Kanals das Beobachtungsresultat, wenn man die Leitungskonstante der Turbulenz sehr groß annimmt und die Verzehrung der Turbulenz durch die Wände proportional der dritten Potenz der Randgeschwindigkeit und einer mit der Rauhigkeit der Wand wachsenden Konstanten setzt.*

Man darf deswegen nicht glauben, daß die Differentialgleichung (20) mit der Randbedingung (21) nun bereits der abgeschlossene Ausdruck der Gesetze der Turbulenzleitung sei. Denn schon bei der Anwendung auf die Kreisröhre ist er mit den Beobachtungen nicht völlig zur Deckung zu bringen. Hier lauten die Differentialgleichungen:

$$0 = ig + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 = \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial r}\right)$$

mit der Randbedingung für $r = 0$: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial\varepsilon^2}{\partial r} = 0$. Die Integration der ersten Gleichung und Einsetzung in die zweite gibt:

$$0 = \frac{i^2g^2r^2}{4k} + \frac{\varepsilon}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial r}\right).$$

Da in der Kreisröhre ε nach den Beobachtungen seinen Wert beträchtlich ändert, bedarf man eines vollen Überblicks über das Integral dieser Gleichung. Durch das Studium der Singularität von ε im Punkte

$\varepsilon = 0$ wurde es nahe gelegt, ε und r als Funktionen eines Parameters z darzustellen, der durch:

$$r\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial r} = -\alpha z^4 \quad \text{mit} \quad \alpha = \left(\frac{i^2 g^2}{32 k}\right)^{2/3}$$

definiert war. Es sind dann r und ε in ihrer Abhängigkeit von z bestimmt durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha}}\frac{z^3}{r^3}, \quad \frac{d\varepsilon}{dz} = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4}\frac{z^7}{r^4}.$$

Aus beiden Gleichungen zusammen findet man die in dem allein in Frage kommenden Bereich positiven ε's sehr konvergenten Reihendarstellungen:

$$r = z\left\{1 - \frac{1}{2^5}\left(\frac{z^4}{32}\right) - \frac{17}{3\cdot 2^7}\left(\frac{z^4}{32}\right)^2 - \frac{199}{3^2\cdot 2^{10}}\left(\frac{z^4}{32}\right)^3 - \frac{18809}{3^2\cdot 5\cdot 2^{15}}\left(\frac{z^4}{32}\right)^4 - \cdots\right\}$$

$$\varepsilon = 2\sqrt{\alpha}\left\{1 - \left(\frac{z^4}{32}\right) - \frac{1}{2^2}\left(\frac{z^4}{32}\right)^2 - \frac{1}{3^2}\left(\frac{z^4}{32}\right)^3 - \frac{43}{3^2\cdot 2^6}\left(\frac{z^4}{32}\right)^4 - \cdots\right\}$$

aus denen dann folgt:

$$u = u_m - \frac{ig}{8\sqrt{\alpha}}z^2\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{z^4}{32}\right) + \frac{13}{480}\left(\frac{z^4}{32}\right)^2 + \frac{97}{8064}\left(\frac{z^4}{32}\right)^3 + \frac{4013}{829440}\left(\frac{z^4}{32}\right)^4 + \cdots\right\}.$$

Als hiernach die Kurve für u als Funktion von r konstruiert wurde, ergab sich, daß der aus den Beobachtungen folgende starke Abfall nach dem Rande zu durch keine Wahl der verfügbaren Konstanten ausreichend dargestellt werden konnte.

Immerhin lassen die vorhin gewonnenen Resultate darauf schließen, daß hier eine Vorstellung über die Turbulenzleitung gewonnen ist, die als erster Anhalt bei weiteren Untersuchungen dienen kann. Nach einer präziseren Formulierung wird man wohl aber erst dann zu suchen haben, wenn die vermehrte Beobachtung der Bewegung kleiner im Wasser suspendierter Teilchen einen direkteren Einblick in die Natur der Turbulenz eröffnet hat.

Göttingen, im März 1904.

Eine Analogie zur Thermodynamik.

Von Viktor Fischer in Stuttgart.

In einer früheren Arbeit, die unter diesem Titel erschienen ist[1]), bin ich von der Vorstellung von Wirbelringen ausgegangen. Jetzt möchte ich an ihrer Stelle Wirbelkugeln betrachten. Man gelangt dabei für $\varkappa$, das dem Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem

1) Analogien zur Thermodynamik. Diese Zeitschr., Bd. 47, 1902, S. 1.

Druck zu demjenigen bei konstantem Volumen entspricht, zu einer Beziehung, die Zahlwerte ergibt, welche mit den vorliegenden Versuchswerten eine jedenfalls merkwürdige Übereinstimmung ergeben.

Eine Wirbelkugel denken wir uns zusammengesetzt aus lauter kleinen Kugeln, die konzentrisch angeordnet, von der Mitte gegen den Umfang entsprechend größer werden und sich in sphärischen Bahnen schraubenförmig bewegen. Die Kugel befinde sich z. B. in einer Flüssigkeit, die einen allseitigen gleichmäßigen Druck auf sie ausübt. Der von der Kugel ausgeübte gleiche Gegendruck rührt dann von den radial nach außen wirkenden Fliehkräften her.

Wir berechnen zunächst den durch die Fliehkräfte ausgeübten Gesamtdruck F.

Es sei die Fliehkraft f pro Masseneinheit:

$$f = \omega^2 r,$$

dann ist

$$F = \int f dm = \int_0^R \omega^2 r \cdot \mu 4 r^2 \pi dr = \pi \mu \omega^2 R^4.$$

Führen wir in diesen Ausdruck die Kugelmasse m und die Umfangsgeschwindigkeit V ein, so erhalten wir:

(1) $$F = \tfrac{3}{4} m \omega^2 R = \tfrac{3}{4} m \frac{V^2}{R}.$$

Bezeichnen wir den Druck pro Flächeneinheit mit p, so wird

$$4 R^2 \pi p = \pi \mu \omega^2 R^4$$

$$4p = \mu V^2$$

oder

(2) $$pv = \frac{V^2}{4},$$

wobei v des spezifische Volumen bedeutet.

Nun wollen wir die kinetische Energie E der Wirbelkugel berechnen.

Es sei die Energie pro Masseneinheit

$$e = \frac{r^2 \omega^2}{2},$$

dann ist:

$$E = \int e dm = \int_0^R \frac{r^2 \omega^2}{2} \mu 4 r^2 \pi dr = \tfrac{2}{5} \pi \mu \omega^2 R^5$$

$$E = \tfrac{3}{10} m \omega^2 R^2 = \tfrac{3}{10} m V^2.$$

Für eine Kugel von der Masseneinheit gilt daher:

(3) $$\varepsilon = \tfrac{3}{10} V^2.$$

Führen wir in diese Beziehung den Wert für V^2 aus (2) ein, so wird:

$$\varepsilon = \tfrac{6}{5} p v. \tag{4}$$

Das Energiedifferential

$$dq = d\varepsilon + da$$

können wir also schreiben:

$$dq = \tfrac{6}{5} v dp + \tfrac{11}{5} p dv.$$

Für

$$dq = 0$$

folgt daraus durch Integration

$$p v^{\frac{11}{6}} = \text{Const.}$$

Es ist daher

$$\varkappa = \tfrac{11}{6}.$$

Daß $\varkappa$ dem Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu derjenigen bei konstantem Volumen entspricht, erkennen wir aus folgendem:

Es wird für

$$v = \text{Const.}$$

$$dq = d\varepsilon = \tfrac{3}{10} d(V^2)$$

$$c_v = \tfrac{3}{10},$$

und für

$$p = \text{Const.}$$

$$dq = \tfrac{11}{5} p dv = \tfrac{11}{6} d\varepsilon = \tfrac{11}{20} d(V^2)$$

$$c_p = \tfrac{11}{20},$$

und

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{11}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{11}{6} = \varkappa.$$

Es stellen also c_p und c_v die kinetischen Energien vor, die nötig sind, um das Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit der Einheitskugel einmal bei konstantem Druck, das andere Mal bei konstantem Volumen um die Einheit zu erhöhen.

Es ist nun

$$\varkappa = 1{,}83,$$

während nach Versuchen für einatomige Gase der Wert gefunden wurde:

$$\varkappa = 1{,}66.$$

Zwischen diesen beiden Werten herrscht also keine vollständige Übereinstimmung.

Betrachten wir aber den Fall, daß zwei Einheitskugeln miteinander gekoppelt sind.

Aus (4) folgt für eine Kugel

$$\tfrac{5}{6} = \varkappa - 1,$$

daher

$$\varkappa = \tfrac{5}{6} + 1.$$

Für zwei Kugeln wird also

$$\varkappa = \frac{5}{2 \cdot 6} + 1 = \tfrac{17}{12} = 1{,}417.$$

In diesem Falle herrscht also eine gute Übereinstimmung mit dem für zweiatomige Gase durch Versuche gefundenen Mittelwert

$$\varkappa = 1{,}41.$$

Allgemein wird für n Einheitskugeln gelten:

$$\varkappa = \frac{5}{6n} + 1. \tag{5}$$

Wählen wir z. B. $n = 26$, so wird

$$\varkappa = \frac{5}{6 \cdot 26} + 1 = \tfrac{161}{156} = 1{,}032.$$

Dies stimmt mit dem für Terpentinöl $C_{10}H_{16}$ gefundenen Versuchswert

$$\varkappa = 1{,}030.$$

Wir wollen nun zum Vergleich, die durch Versuche gefundenen Werte, wie sie in der „Hütte" angegeben sind[1]), und die aus (5) berechneten Werte von $\varkappa$ nebeneinander schreiben:

Name	Zeichen	Atomzahl	$\varkappa$ beobachtet	$\varkappa$ berechnet
Wasserstoff	H_2	2	1,41 (Wasserstoff bis Luft)	1,417
Sauerstoff	O_2	2		
Stickstoff	N_2	2		
Kohlenoxyd	CO	2		
Stickoxyd	NO	2		
Chlorwasserstoff	ClH	2		
Luft rein und trocken	—	—		
Wasserdampf	H_2O	3	1,300 } 1,277	1,278
Kohlensäure	CO_2	3	1,293	
Schweflige Säure	SO_2	3	1,255	
Stickoxydul	N_2O	3	1,258	
Ammoniak	NH_3	4	1,298	1,208
Acetylen	C_2H_2	4	[1,281]	
Methan	CH_4	5	1,270	1,167
Äthylen	C_2H_4	6	1,210	1,139
Alkohol	C_2H_6O	9	1,133	1,093
Benzol	C_6H_6	12	1,082	1,069
Terpentinöl	$C_{10}H_{16}$	26	1,030	1,032

1) Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte", 18. Auflage, 1902. Abteilung I. Seite 286.

Wir sehen, daß für $n = 2$ und 3 die Mittelwerte eine gute Übereinstimmung zeigen. Schlechter ist sie für $n = 4, 5, 6$, während sie für die höheren Werte von n wieder besser wird.

Ergänzen wir aber die obigen Werte durch die in Winkelmanns Handbuch der Physik[1]) auf Seite 392 angegebenen Werte von $\varkappa$, so finden wir für den Mittelwert bei:

$n = 4$	$\varkappa$
Ammoniak NH_3	1,298
Acetylen C_2H_2	1,281
Phosphortrichlorid PCl_3	1,122
Arsenchlorür $AsCl_3$	1,110
Mittelwert	1,203
nach (5)	1,208

$n = 5$	$\varkappa$
Methan CH_4	1,270
Zinnchlorid $SnCl_4$	1,087
Titanchlorid TCl_4	1,087
Chlorsilicium $SiCl_4$	1,097
Chloroform $CHCl_3$	1,118
Mittelwert	1,132[2])
nach (5)	1,167

$n = 6$	$\varkappa$
Aethylen C_2H_4	1,210
Methylalkohol CH_4O	1,159
Mittelwert	1,185
nach (5)	1,139

Es besteht nun auch für diese Mittelwerte eine gute Übereinstimmung mit den aus Formel (5) berechneten Werten.

Für $n = 9$ und 12 wird die Übereinstimmung ebenfalls besser, wenn wir das Mittel aus beiden Tabellenwerten nehmen. Es wird dann für

$n = 9$	$\varkappa$
Alkohol C_2H_6O	1,133
	1,107
Mittelwert	1,120
nach (5)	1,093

1) Winkelmann, Handbuch der Physik. 1896. 2. Bd., II. Abteilung.

2) Benützen wir für Chloroform auch die Werte der untern Tabelle S. 393, ohne den Wiedemannschen Wert, so wird $\varkappa = 1,131$.

$n = 12$	$\varkappa$
Benzol C_6H_6	1,082
	1,073
Mittelwert	1,078
nach (5)	1,069

Wir wollen nun nach der Tabelle auf Seite 392 in Winkelmanns Handbuch noch die Werte für $n = 8, 10, 14, 15$ vergleichen.[1])

Name	Zeichen	Atomzahl	$\varkappa$ Winkelmanns Tabelle		$\varkappa$ Formel (5)
Bromäthyl	C_2H_5Br	8	1,113	1,111	1,104
Äthylenchlorid	$C_2H_4Cl_2$	8	1,109		
Cyanäthyl	C_3H_5N	10	1,093	1,092	1,083
Aceton	C_3H_6O	10	1,090		
Essigäther	$C_4H_8O_2$	14	1,060		1,060
Äther	$C_4H_{10}O$	15	1,060	1,059	1,056
Schwefeläthyl	$C_4H_{10}S$	15	1,058		

Auch bei diesen Werten erkennen wir eine gute Übereinstimmung.

Mögen wir nun diese Übereinstimmung für einen Zufall halten oder ihr eine tiefere Ursache beilegen, jedenfalls gibt die Formel (5), den gegenwärtigen Versuchsergebnissen entsprechend, richtige Mittelwerte und ein richtiges Bild für die Abnahme des $\varkappa$ bei wachsender Atomzahl.

Stuttgart, den 20. Juni 1904.

Bemerkungen über Hennebergs Aufsatz „Zur Torsionsfestigkeit".

Von C. RUNGE in Göttingen.

In einer Arbeit „Zur Torsionsfestigkeit"[2]) stellt Henneberg der St. Venantschen Behandlung der Torsion eines zylindrischen Stabes eine andere Methode gegenüber, die er als „die technische Methode" bezeichnet, und konstatiert, daß die letztere nicht immer zu richtigen Resultaten führt. Man vermißt indessen bei Henneberg die Erklärung,

1) Zu bemerken ist noch, daß die in der oberen Tabelle S. 393 angegebenen Werte von $\varkappa$ für 0° nach E. Wiedemann durchwegs höher liegen. Dies zeigt, daß Formel (5) nur für hohe Temperaturen gilt, wie sie den Regnaultschen Werten entsprechen.

2) Diese Zeitschrift. Bd. 51. S. 225.

warum „die technische Methode“ so irreleiten kann, und es scheint mir daher wünschenswert, seinen Betrachtungen einiges hinzuzufügen.

Schon Kirchhoff und etwas nach ihm St. Venant selbst haben bemerkt, daß die Spannungen eines elastischen Körpers nicht willkürliche Funktionen des Ortes sein können, sondern daß zwischen ihren zweiten Differentialquotienten gewisse lineare Gleichungen bestehn. Es folgt daraus, daß „die technische Methode“ gar keine Methode ist, das Torsions-Problem zu lösen, weil sie auf diese notwendigen Bedingungen gar keine Rücksicht nimmt. Wenn also Henneberg sagt, „die technische Methode“ sei in ihren Voraussetzungen allgemeiner als die Methode St. Venants, so trifft er damit nicht den Kernpunkt der Sache. Allerdings sind die Voraussetzungen allgemeiner; sie sind zu allgemein, weil sie notwendige Bedingungen vernachlässigen.

Wenn u, v, w die Verschiebungskomponenten eines Punktes sind, der in der spannungsfreien Gleichgewichtslage die Koordinaten x, y, z hat, so gelten für die Zugspannungen σ und die Schubspannungen τ die Gleichungen:

(I) $\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\,\frac{\partial u}{\partial x}$ und die beiden analogen Gleichungen,

(II) $\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$ und die beiden analogen Gleichungen.

Wenn man nun für gegebene Spannungen σ, τ die Verschiebungskomponenten u, v, w zu bestimmen sucht, so erkennt man, daß es für beliebig gegebene Spannungen gar nicht möglich ist, daß vielmehr zwischen den Spannungen gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn es ausführbar sein soll, u, v, w den Gleichungen (I) und (II) gemäß zu berechnen. Man kann diese Bedingungen auf folgende Weise herleiten.

Wir lösen zunächst die Gleichungen (I) nach $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ auf und finden

(I*) $2\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \varkappa(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ und die beiden analogen Gleichungen,

wo $\varkappa = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}$ gesetzt ist. Ferner differenzieren wir die Gleichungen (II) nach der Reihe nach x, y, z und finden

(III) $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$ und die beiden analogen Gleichungen.

Diese Gleichungen lösen wir nach $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ auf und finden

(III*) $2\mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}$ und die beiden analogen Glei-

chungen. (I*) und (III*) sind nur verträglich, wenn die Gleichungen gelten

$$\text{(IV)} \quad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\sigma_x - \varkappa\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right)$$

und die beiden analogen Gleichungen.

Wenn die Bedingungen (IV) erfüllt sind, so kann man durch Integration Funktionen u, v, w so bestimmen, daß (I*) und (III*) und damit auch (I) und (III) erfüllt sind. Mit den Gleichungen (III) sind aber noch nicht die Gleichungen (II) erfüllt. Durch Integration der Gleichungen (III) erhalten wir

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \Phi_1(yz).$$

$$\tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \Phi_2(zx)$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \Phi_3(xy).$$

Diese Gleichungen würden in die Gleichungen (II) verwandelt werden können, wenn

$$\Phi_1(yz) = \varphi_1(y) + f_1(z), \quad \Phi_2(zx) = \varphi_2(z) + f_2(x),$$
$$\Phi_3(xy) = \varphi_3(x) + f_3(y)$$

wäre. Man brauchte dann nur $\bar u, \bar v, \bar w$ so zu bestimmen, daß

$$\mu\bar u = \mu u + \int\varphi_2(z)dz + \int f_3(y)dy$$

$$\mu\bar v = \mu v + \int\varphi_3(x)dx + \int f_1(z)dz$$

$$\mu\bar w = \mu w + \int\varphi_1(y)dy + \int f_2(x)dx$$

wäre. Dann würden, $\bar u, \bar v, \bar w$ nicht nur die Gleichungen (II) sondern auch die Gleichungen (I) erfüllen. Denn es bliebe $\frac{\partial \bar u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial \bar w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z}$. Damit aber Φ_1, Φ_2, Φ_3 so zerfallen, ist notwendig und hinreichend, daß $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial y} = 0$ sei. Wir erhalten damit die weiteren Bedingungen $\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \mu\left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z}\right)$ und die beiden analogen, oder, wenn wir aus (I) die Ausdrücke für $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ einsetzen:

$$\text{(V)} \quad 2\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_y - \varkappa(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_z - \varkappa(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z))$$

und die beiden analogen Gleichungen.

Die Gleichungen (IV) und (V) sind notwendige Folgerungen der Gleichungen (I) und (II). Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen aber auch umgekehrt, daß, wenn die Gleichungen (IV) und (V) erfüllt

sind, man auch immer für u, v, w Funktionen finden kann, welche die Gleichungen (I) und (II) erfüllen.

Die Gleichungen (IV) und (V) sind mithin notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Spannungskomponenten σ, τ möglich sind, ganz abgesehn davon, ob Gleichgewicht besteht oder nicht.

Um die Torsion zylindrischer Stäbe zu untersuchen, denkt sich St. Venant die Erzeugenden des Zylinders parallel der z-Achse und setzt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ und τ_{xz}, τ_{yz} unabhängig von z.

Die Gleichungen (V) sind unter diesen Annahmen von selbst erfüllt. Von den Gleichungen (IV) ist die dritte ebenfalls erfüllt. Die ersten beiden dagegen verlangen:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right).$$

Mit andern Worten, den Spannungen kann nur dann ein Deformationszustand entsprechen, wenn

$$-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \text{Const}$$

ist. Das gilt ganz abgesehen vom Gleichgewichtszustand.

Die Gleichgewichtsbedingungen reduzieren sich unter den gemachten Annahmen auf

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Dazu tritt dann noch die Randbedingung.

Bei der „technischen Methode" werden die Bedingungen (IV) und (V) ignoriert. Es ergeben sich dann unendlich viele Lösungen. Aber einer Lösung, die nicht zugleich die Gleichungen (IV) und (V) befriedigt, entspricht gar kein möglicher Deformationszustand.

Daß Hennebergs Ausdrücke der Schubspannungen τ für den Fall des rechteckigen und für den Fall des kreuzförmigen Querschnitts mit den Gleichungen (IV) und (V) nicht vereinbar sind, läßt sich unmittelbar erkennen, wenn man die Gleichungen (IV) mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen in eine andere Form bringt.

Von den drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

differenziere man die zweite nach z und die dritte nach y und addiere sie zu der ersten der Gleichungen IV. Diese geht dann über in

$$(1-\varkappa)\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = -\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2},$$

und in analoger Weise erhält man zwei entsprechende Gleichungen. Für die rechten Seiten schreiben wir $-\Delta\tau_{yz}$, $-\Delta\tau_{zx}$, $-\Delta\tau_{xy}$. Durch Differenziation nach x, y, z ergibt sich nun:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\Delta\tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial z}\Delta\tau_{xy}.$$

Diese Relation wird durch die Ausdrücke, die Henneberg nach der „technischen Methode" für die Größen τ findet, im Falle des rechteckigen und kreuzförmigen Querschnittes nicht befriedigt, und damit erweisen sich diese Spannungszustände als unmöglich.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgabe für 1907.

Académie des Sciences de Paris. Prix Vaillant (4000 Frs.). Perfectionner en un point important le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction u et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire. — Les mémoires devront être envoyés au Secrétariat avant le 1er janvier 1907.

Bücherschau.

Hans Lorenz. Lehrbuch der Technischen Physik. Erster Band. Technische Mechanik starrer Systeme. München und Berlin 1902 bei R. Oldenburg.

Zweifellos wendet sich heute das Interesse der Mathematiker und der Techniker wieder in erhöhtem Maße der Mechanik zu; einige große Probleme der modernen Maschinenkinetik mögen hauptsächlich den Antrieb dazu gegeben haben. Da ist denn nun erklärlich und auch erfreulich, wenn ein Buch wie das in Rede stehende erscheint, das es sich zur Aufgabe stellt, zusammenzufassen, was an neuen Problemen und Lösungsversuchen in der technischen Mechanik da ist, und das bestrebt ist, dies Material in einer auch für Studierende geeigneten Form darzustellen.

Es wäre nun sehr schön gewesen, wenn der Verfasser zwischen seiner ursprünglichen Absicht, gar keine mechanische Einleitung zu der geplanten technischen Physik zu schreiben, und der nun vorliegenden Ausführung, welche ein ganzes Lehrbuch der Mechanik darstellt, einen Mittelweg gefunden und einmal wirklich eine rein technische Mechanik geboten hätte, d. h. eine Anwendung des vorhandenen Lehrgebäudes der Mechanik auf die modernen Probleme der Technik unter Berücksichtigung spezifisch dafür ausgebildeter Methoden. Bis zu einem hohen Grade kommt das Buch diesem Wunsche nach — wenn es auch vielleicht noch nicht ganz der Entwicklung und Anwendungsfähigkeit der allgemeinen Mechanik gerecht wird —; aber der Verfasser hat geglaubt, auch eine Darstellung der Prinzipien der Mechanik geben zu sollen; und dieser Versuch kann leider nicht als gelungen bezeichnet werden.

Um gleich die hierher gehörenden Ausstellungen prinzipieller Natur abzumachen, sei es mir gestattet, dem Gedankengange des Verfassers zunächst so weit zu folgen, als er die Grundlagen der Mechanik berührt.

Da die Bewegungserscheinungen heute in weit höherem Maße als die Bedingungen des Gleichgewichtes unser Interesse in Anspruch nehmen und da auch, historisch betrachtet, die Mechanik erst dann ihren großen Aufschwung nehmen konnte, nachdem Galilei und Newton die fundamentale Bedeutung der Beschleunigung erkannt hatten, so ist es sehr treffend, wenn der Verfasser mit einer Analyse der Bewegungsvorgänge beginnt. (Kap. II) Dabei kann es sich zunächst nur um die Beobachtung von Einzelerscheinungen, also von bestimmten Bewegungsvorgängen handeln, denn diese müssen erst dem Lehrgebäude der Mechanik, — ihrem naturwissenschaftlichen Charakter entsprechend — Material und Grundlagen liefern. Dem entspricht denn auch der Charakter des zweiten Kapitels.

Es war nun wohl die Absicht des Verfassers, von hier aus zu einer Definition der Kraft aufzusteigen und somit den kinetischen Kraftbegriff dem Folgenden zugrunde zu legen an Stelle des unzulänglichen statischen. Der Weg dahin wäre etwa folgender gewesen: Von der bei der einzelnen Erscheinung als Funktion der Zeit beobachteten Beschleunigung geht man — mathematisch unter Elimination individualisierender Konstanten — zum Beschleunigungsgesetz für eine ganze Klasse von Erscheinungen über. Von dem so als Funktion der Zeit, des Ortes, eventuell auch der Geschwindigkeit und selbst höherer Ableitungen erhaltenen Beschleunigungsgesetz ist dann nur noch ein Schritt bis zum Kraftgesetz: Aus anthropomorphen wie auch aus Gründen der Zweckmäßigkeit multipliziert man noch mit einem Faktor, der Masse. Die Gleichung

Masse mal Beschleunigung = Kraft

enthält dann also im wesentlichen die Definition der Kraft. Sache des Experimentes und der Erfahrung ist es, die Existenz von Kraftgesetzen nachzuweisen und für ihre Anwesenheit Merkmale in der Außenwelt anzugeben. Das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte zu beweisen, ist ebenfalls, wenigstens für eine Reihe einfacher Kraftgesetze, Sache der Erfahrung und des Experiments, im übrigen aber Postulat aller weiteren Forschung.

Ansätze, den Kraftbegriff in solcher Weise aus dem Beschleunigungs-

begriff zu entwickeln, sind beim Verfasser mehrfach vorhanden (Kap. IV.), so z. B., wenn er Seite 153 sagt: „Die Richtung einer Kraft identifizieren wir nun mit der Richtung der von ihr ausgeübten Beschleunigung.“ Dem steht dann freilich wieder ein Satz wie der (Seite 151) gegenüber: „In derselben bezw. analogen Weise können wir aber alle anderen in der Natur auftretenden Kräfte mit Gewichten vergleichen und so die Richtigkeit der Proportionalität zwischen der auf einen Körper wirkenden Kraft P und seiner augenblicklichen Beschleunigung p nachweisen.“ Vorher aber — und darauf bezieht sich das „in derselben —“ — ist die elastische Kraft einer Feder statisch, d. h. mit Hilfe eines Gewichtes gemessen worden. Also scheint der Verfasser an dieser Stelle wieder mehr an den statischen Kraftbegriff gedacht zu haben. Daß somit keine volle Klarheit über den Kraftbegriff gewonnen wird, liegt hauptsächlich daran, daß jede Definition fehlt; denn der Satz: „Die Bewegungsursache bezeichnen wir nun allgemein als die den Körper treibende Kraft“ dürfte wohl dafür zu unbestimmt sein. Dagegen will ich erwähnen, daß der Verfasser in der Bewegung einer durch eine Feder getriebenen Masse ein gutes Beispiel für die Zweckmäßigkeit gibt, die Masse als Faktor in das Kraftgesetz aufzunehmen; auch wird der empirische Charakter des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte gehörig betont.

Nun handelt es sich darum, von der Betrachtung des einzelnen Massenpunktes zum starren Körper fortzuschreiten. Nachdem Seite 157 das hierzu brauchbare Prinzip der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft in unklarer, weil tautologischer Fassung ausgesprochen ist, wird Seite 256 das Hebelgesetz durch einen Zirkelschluß gewonnen. Möglich, daß der Verfasser das Hebelgesetz als Axiom aufgefaßt wissen wollte — es folgt nämlich ein Hinweis auf die experimentelle Bestätigung —; aber aus dem Texte kann man das nicht herauslesen. Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers werden darauf in bekannter Weise durch Grenzübergang aus einem von starren, gewichtslosen Stäben und Massenpunkten gebildeten Systeme gewonnen.

Damit wäre eigentlich alles das erreicht, was zunächst für eine Mechanik in elementarer Behandlungsweise nötig ist. Nun geht aber der Verfasser weiter und sucht auch noch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für beliebige Systeme darzustellen (Seite 272—273 und 470—471). Setzt man da in die ausgesprochenen Sätze statt des Wortes „System“ überall den Ausdruck „starrer Körper“, so kann man mit den Darlegungen zum Teil einverstanden sein, wenn auch der Beweis unzureichend ist, da virtuelle Verschiebungen mit wirklichen verwechselt und im Zusammenhange damit das Verschwinden der kinetischen Energie in der Ruhelage mit dem Eintritt eines Extremalwertes derselben beim Passieren einer Gleichgewichtslage identifiziert wird. Oder soll das ein neuer Grundsatz sein, daß beim Passieren einer Gleichgewichtslage eine momentane Vermehrung der kinetischen Energie ausgeschlossen ist? Merkwürdig ist auch die Meinung, welche an dieser Stelle ausgesprochen wird, als sei das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ein spezieller Fall des d'Alembertschen Prinzips, während dies in Wahrheit zwei völlig koordinierte Prinzipien sind. Ganz unrichtig aber werden die Ausführungen für allgemeinere Systeme; in der bekannten Gleichung:

$$\sum(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$$

wird weder klar, welche Kräfte X, Y, Z zu nehmen sind, noch erfährt man etwas über die Mannigfaltigkeit der virtuellen dx, dy, dz. Vor allem aber ist der Beweis verfehlt; nach der Begründung: „Da nun im Falle des Gleichgewichts das Gebilde ohnehin keine Formänderung erleidet, so kann man es hierbei stets als starr ansehen" kann man aus dem, was hier das Prinzip der virtuellen Verschiebungen genannt wird, höchstens die Schwerpunkts- und Flächensätze für ein beliebiges System gewinnen, nicht aber die vollständigen Bewegungsgleichungen.

Es scheint mir fast, als ob der Verfasser das Wesen eines allgemeineren Systems, als der starre Körper ist, und seine mechanische Bedeutung nicht ganz klar erfaßt hätte. In dieser Meinung wird man bestärkt, wenn man auf Seite 464 den Satz liest: „Die Formeln (5) und (6)", nämlich die Formeln für die Schwerpunkts- und Flächensätze, „welche man auch als den allgemeinen Ausdruck des d'Alembertschen Prinzipes bezeichnet". Eine entsprechende Behauptung steht Seite 263 in der Mitte. Aber die genannten Formeln sind nur eine spezielle Folgerung des d'Alembertschen Prinzips und werden nur für den starren Körper mit ihm identisch. Zu der vorhin geäußerten Ansicht zwingt auch die Behauptung in dem historischen Anhange (Seite 583), daß „die Lagrangesche Form des d'Alembertschen Prinzipes"

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dx^2}\right)\delta x + \cdots = 0$$

„leicht durch Auflösung der virtuellen Verschiebungen in bloße Translations- und davon unabhängige Drehungskomponenten in die bekannten sechs Differentialgleichungen d'Alemberts zerlegt werden" kann und daß „somit durch die Lagrangesche Fassung sachlich nichts Neues geleistet wird"; eine Schlußfolgerung, die niemand zugeben wird, der die Lagrangesche Mechanik kennt.

Es mag aber ausdrücklich hervorgehoben werden, daß alle diese Ausstellungen den konkreten Inhalt des Buches da, wo es sich um Einzelprobleme handelt, nicht berühren, da der Verfasser überall mit der Mechanik des starren Körpers auskommt, die sachlich richtig angegeben ist.

Diese Beschränkung in den Mitteln — so benutzt der Verfasser nirgendwo die Lagrangeschen Gleichungen — mag anfangs aus pädagogischen Gründen gerechtfertigt sein; gewinnt der Anfänger doch wohl tatsächlich eine leichtere und lebendigere Einsicht, wenn bei dem Studium der Bewegung eines Kurbelmechanismus z. B. nur die Mechanik des starren Körpers benutzt wird und wenn dabei gleich alle Gelenkreaktionen mitbestimmt werden. Auch hat diese, im eigentlichen Sinne synthetische Methode großen Erkenntniswert. Aber ich glaube doch, daß man dem studierenden Techniker späterhin auch die höheren und entwickelteren kinetischen Methoden der Mechanik, so die Lagrangeschen Gleichungen, darbieten sollte — freilich nicht in der rein formalen Ableitung, die man in dem schon genannten historischen Anhange findet —. Denn mit ihrer Hilfe überwindet man doch alle nebensächlichen Schwierigkeiten komplizierterer Probleme bedeutend leichter; ja, wenn man nur einmal alle Bewegungsmöglichkeiten eines Systems richtig erkannt hat, so stehen der expliziten Aufstellung der Bewegungsgleichungen eigentlich gar keine Schwierigkeiten mehr entgegen; diese sind jetzt dahin verwiesen, wo sie wirklich zu suchen sind, nämlich in der Erkenntnis des Kraftfeldes und in der mathematischen Durchführung. Auch

die Furcht, als sei es nicht möglich, auf diesem Wege die Reaktionen zu bestimmen, ist gänzlich unbegründet; das Lagrangesche Verfahren trennt nur das rein kinetische Problem vom kinetostatischen und erleichtert dadurch gleichzeitig die Behandlung beider.

Doch damit genug über die Grundlagen und Methoden der allgemeinen Mechanik; betrachten wir jetzt die technischen Anwendungen, welche den Hauptinhalt des Buches ausmachen, und die Einzeldurchführung. Da kann man wohl mit Recht behaupten, daß das Buch gegenüber der älteren Lehrbuchliteratur einen großen Fortschritt gemacht hat (von dem Föpplschen Werke sehe ich dabei ab): die alten Schulbeispiele treten überall zurück; sie verschwinden zwar nicht, soweit sie nützlich sind, aber sie bleiben nicht in ihrer fadendünnen Abstraktheit stehen, sie wachsen zu wirklichen Problemen aus. Man erkennt dies z. B. an der sorgfältigen Beachtung aller reibenden und dämpfenden Einflüsse: das vierte Kapitel: „Treibende Kräfte und Widerstandskräfte" enthält eine große Zahl durchgeführter Beispiele dieser Art. Den Reibungserscheinungen werden dabei überall die Coulomb-Morinschen Gesetze zugrunde gelegt. Man möchte hier vielleicht etwas mehr über die neuere Kritik dieser Gesetze erfahren; aber ich denke, daß der Verfasser davon noch im Anschluß an die geschmierte Reibung reden wird, die er in der Hydrodynamik zu behandeln verspricht.

Ein zweites charakteristisches Merkmal des Buches bildet die starke Betonung der Schwingungsprobleme und ihrer Wichtigkeit für die moderne Technik. Wir finden zunächst im zweiten Kapitel: „Geschwindigkeit und Beschleunigung" eine ziemlich weitgehende und wohl durchgearbeitete allgemeine Betrachtung dieser Bewegungsform, im vierten Kapitel schließt sich daran die Behandlung der gedämpften und der gezwungenen Schwingungen. Eine Anwendung finden diese Untersuchungen im 5. Kapitel: „Mechanik ebener Systeme" in den Paragraphen, in denen das einfache und das zusammengesetzte materielle Pendel behandelt werden (Glocke und Klöppel.) In Kapitel 6: „Mechanik räumlicher Systeme" begegnet man dieser Theorie dann wieder, wenn die Kreiselbewegung und im Anschlusse daran die Präzession der Erdachse, ferner das materielle Zentrifugalpendel und die Theorie der Regulierung einem gründlichen Studium unterworfen werden.

Nun noch eine kurze Übersicht der einzelnen Kapitel. Das erste Kapitel: „geometrische Bewegungslehre" enthält die notwendigen geometrisch-kinematischen Betrachtungen über Bewegung im allgemeinen, über Verschiebung, Drehung, Rollbewegung und dergleichen. Es darf vielleicht hervorgehoben werden, daß man hier eine Reihe nützlicher Einzeldinge findet, z. B. eine Theorie des Polarplanimeters und des Universalgelenkes. Das schon erwähnte zweite Kapitel nimmt den Zeitbegriff hinzu; u. a. trifft man hier bereits die Kinematik des Kurbelgetriebes an. Besondere Hervorhebung verdient das dritte Kapitel: „Die Relativbewegung". Der Verfasser darf sehr wohl in der Einleitung sagen, daß er auf dasselbe besondere Sorgfalt auch in bezug auf die Auswahl der Anwendungen verwandt habe. Hintereinander werden die relative Translationsbewegung und die relative Rotationsbewegung in der Ebene und im Raume entwickelt, wobei besonders darauf geachtet ist, daß die Rechnungen auch ihre anschauliche Intepretation finden. Von Anwendungen sei die scheinbare Planetenbewegung, die Bewegung auf der Erdoberfläche mitsamt dem Foucaultschen Pendel und die

Theorie des Federregulators sowie des punktförmigen Zentrifugalpendels und des Tachometers genannt. Über das vierte Kapitel habe ich schon gesprochen. Im fünften und sechsten Kapitel finden sich dann die größern technischen Probleme; hier wird man den Schwerpunkt des Buches suchen müssen. Einiges habe ich schon früher erwähnt; ich will nur noch besonders auf die Paragraphen 42: „Der Kräftespiel im Kurbelgetriebe," 45: „Die Bewegung der Fuhrwerke" und 58: „Der Massenausgleich mehrkurbliger Maschinen" hinweisen. Diese Abschnitte führen mitten in die modernen Probleme der Maschinentechnik ein, soweit sie mechanischer Natur sind. Man kann natürlich nicht erwarten, daß bei dem begrenzten Raume eines Lehrbuches alle Problemstellungen und Untersuchungen reproduziert werden, welche diesen Gegenständen so zahlreich zu Teil geworden sind; aber ich glaube, daß der Verfasser hier überall das Wichtigste herausgegriffen, und so dargestellt hat, daß es zu einer Einführung in dieses Gebiet wohl geeignet ist.

Man erkennt an alledem, daß das Buch mitten im heutigen Wissenschaftsbetriebe steht, daß es sich erfolgreich bemüht, dem Leser zu zeigen, wie fruchtbare Probleme die Technik in der letzten Zeit der Mechanik gestellt hat. Das Buch ist reich an schönen Einzelheiten und großen, gut durchgeführten Problemen; auch merkt man überall die eigene Hand des Verfassers. Ich glaube daher, das Buch dem Techniker wie auch dem Mathematiker in gleicher Weise empfehlen zu können. Nur wird es gut sein, die Grundlagen der Mechanik in diesem Buche mit Vorsicht zu studieren. Hoffentlich wird der Verfasser bei einer zweiten Auflage eine gründliche Umarbeitung der betreffenden Abschnitte vornehmen, um die darin vorhandenen — namentlich für Anfänger — mißlichen Mängel zu beseitigen. Dahin stehen zwei völlig verschiedene Wege offen, indem entweder das Prinzip der virtuellen Arbeiten und die hiermit aufs engste verknüpften Methoden der Lagrangeschen Mechanik vollständig ausgeschaltet werden, was ohne jede Schädigung des selbständigen Inhaltes des Werkes geschehen könnte, oder indem der Begriff des über den einzelnen starren Körper hinausgehenden Systems und seiner möglichen Verschiebungen einwandsfrei und klar entwickelt wird.

Karlsruhe, im April 1904. G. Hamel.

K. Doehlemann, Geometrische Transformationen. I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen. Sammlung Schubert XXVII. 8°, VII u. 322 S. mit 99 Fig. u. 6 Abbildungen. Leipzig 1902, G. I. Göschensche Verlagshandlung. Geb. in Leinwand *M*. 10. —.

Der vorliegende Band der „Sammlung Schubert" bietet unter dem Titel „Geometrische Transformationen I. Teil" eine analytische Behandlung der Projektivität der Grundgebilde 1., 2. und 3. Stufe nebst Anwendungen.

Der *I. Abschnitt* enthält die Einführung der projektiven Koordinaten für die Elemente aller Grundgebilde nach Wilhelm Fiedler, was nicht gerade passend als „Maßbestimmung" bezeichnet wird. Dabei werden die „absoluten Kreispunkte" und der „absolute Kugelkreis" hervorgehoben; ferner wird der „Winkel" als Logarithmus eines Doppelverhältnisses dargestellt, während im übrigen auf imaginäre Elemente nicht näher eingegangen wird.

Der *II. Abschnitt* enthält die lineare Transformation im binären Gebiete bei getrennten und vereinigten Trägern. Hier wird auch die zyklische Projektivität, speziell die involutorische Beziehung erörtert.

Der *III. Abschnitt* behandelt zunächst die kollineare Beziehung der Grundgebilde 2. Sufe. Der folgende Absatz über „projektive Eigenschaften der Kurven" mit dem Beispiel von Newtons „divergierenden Parabeln" dürfte für den Anfänger unklar sein. Hübsch ist dagegen das Möbiussche Netz behandelt. Bei der Untersuchung der Zentralkollineation und der anderen besonderen Kollineationen (auf zyklische Kollineationen wird nur hingewiesen) werden auch Konstruktionen ausgeführt. Damit wird der Übergang zu einem großen Kapitel (55 S.) über *Anwendungen* der kollinearen Beziehung angebahnt. In diesem wird zunächst der *Pantograph* und der *Perspcktograph* an der Hand guter Abbildungen erklärt. Dann sind zahlreiche Beispiele über das Vorkommen kollinearer Gebilde in der *darstellenden Geometrie* gegeben, insbesondere wird die Schlömilchsche Lösung der Aufgabe behandelt: „Fünf Punkte oder 5 Geraden einer Ebene in fünf Punkte, beziehungsweise 5 Tangenten eines Kreises zu projizieren". Hier wäre doch mehr hervorzuheben gewesen, welche weiteren besonderen Annahmen bei dieser Lösung der an sich unbestimmten Aufgabe gemacht werden, da in n.⁰ 138 dieselbe Aufgabe mit anderen Annahmen gelöst und dann eine ganze Reihe von Kegelschnittkonstruktionen auf grund der Verwandtschaft mit dem Kreise ausgeführt wird.

Der *IV. Abschnitt* bringt in Kürze die projektiven Raumtransformationen. Nach der Möbiusschen Netzkonstruktion wird auf das Gesetz der rationalen Verhältnisse bei *Kristallen* hingewiesen, nach den besonderen Raumkollineationen auf die affine Änderung eines *Kristalles* bei Änderung der Temperatur und auf das Vorkommen der Verwandtschaften bei der Abbildung durch *optische Instrumente* und in der *Reliefperspektive* (der *Reliefmodellierapparat* von Pfeifer wird durch 2 Abbildungen erläutert). Das Nullsystem wird nur kurz erwähnt und von Anwendungen in der graphischen Statik wird abgesehen, wohl mit Rücksicht darauf, daß der XXXIV. Band Näheres darüber aufweist. Den Schluß bilden die Kollineationen und Korrelationen, welche Flächen 2. Grades in sich überführen, ferner die orthogonale Substitution.

Die Literaturangaben sind zahlreich, aber nicht gleichmäßig abgewogen; auf S. 247 hätte z. B. unbedingt und zwar an erster Stelle „Fiedler, darstellende Geometrie" genannt werden sollen. Die Ausstattung ist recht gut; von den Drukfehlern werden nur wenige (etwa S. 238, die letzten 2 Zeilen) störend sein. Das Buch ist im allgemeinen klar geschrieben und wird wegen der vielfach vorkommenden Anwendungen den Leserkreis der „Sammlung Schubert" anregen und befriedigen.

Wien. TH. SCHMID.

Neue Bücher.[1])

Analysis.

1. LAEMMEL, RUDOLF, Die Methoden zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten. Zürich 1904, Speidel. M. 2.

Astronomie.

2. BUCHHOLZ, HUGO, Fortgesetzte Untersuchung der Bewegung vom Typus 2/3 im Problem der drei Körper auf Grund der Gyldénschen Störungstheorie, II. Tl.

---

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

(Denkschr. der mathem.-naturw. Kl. der Wiener Ak., Bd. 77.). Wien, Gerolds Sohn.

3. Foerster, Wilhelm, Astrometrie oder Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume, zugleich als Grundlage aller Zeit- u. Raummessung. 1. Heft; Die Sphärik u. die Koordinatensysteme, sowie die Bezeichnungen u. die sphärischen Koordinatenmessungen. Berlin, Reimer. M. 4.

4. Turner, H. H., Astronomical discovery. London 1904, Arnold. 10s. 6d.

s. auch Nr. 31.

Darstellende Geometrie.

5. Chomé, F., Cours de géométrie descriptive de l'école militaire de Belgique. IIe partie: plans cotés. Avec atlas de 36 planches. Paris 1904. Gauthier-Villars. Frs. 10.

6. Haussner, Robert, Darstellende Geometrie. I. Elemente; Ebenflächige Gebilde. 2., verm. u. verb. Aufl. (Sammlung Göschen Nr. 142.) Leipzig 1904, Göschen geb. M. —80.

7. Schüssler, Rudolf, Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 7.

8. Vonderlinn, J., Schattenkonstruktionen. (Sammlung Göschen Nr. 236.) Leipzig 1904, Göschen. geb. M. —.80.

Mechanik.

9. Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, IV. Bd. (Mechanik). 1 II, 1 Heft. Leipzig 1904, Teubner. M. 4.40.

10. Jaumann, G., Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkt aus dargestellt. Mit 124 Abb. Leipzig, Barth. M. 11; geb. M. 12.

11. Koenigs, G., Introduction à une théorie nouvelle des mécanismes. Paris 1904, Hermann. Frs. 2.50.

12. Whittaker, E. T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. With an introduction to the problem of three bodies. Cambridge 1904, Univ. Press. 12s 6d.

s. auch Nr. 22.

Physik.

13. Carvallo, E., Leçons d'électricité. Paris 1904, Béranger. Frs. 10.

14. Curie, P., Il radio e le più recenti ricerche sulla radioattività. Milano 1904. L. 1.

15. Ebert, H., Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus u. der Induktion dargestellt auf Grund des Kraftlinien-Begriffes. 2., vollkommen neu bearbeitete Aufl. Leipzig, Barth. M. 7; geb. M. 8.

16. Frenzel, Carl, Über die Grundlagen der exakten Naturwissenschaften. Sechs Vorlesungen. Leipzig u. Wien, Deuticke. M. 3.

17. Gerard, Eric, Leçons sur l'Électricité professées à l'Institut électrotechnique Montefiore annexé à l'Université de Liége. II. Transformateurs. Canalisation et Distribution de l'énergie électrique. Applications de l'électricité à la Télégraphie, à la Téléphonie, à l'Éclairage, à la production et à la transmission de la puissance motrice, à la Traction, à la Métallurgie et à la Chimie industrielle. 7ème édition. Gauthier-Villars. Frs. 12.

18. Gross, Alfr., Electrizität u. Magnetismus. Gemeinverständliche Darstellung der Grundlagen der Elektrotechnik, m. vielen Anleitungen zu Versuchen. Stuttgart, Strecker u. Schröder. geb. in Leinw. M. 3.

19. Heygendorff, W. v., Über das Verteilungs-Gleichgewicht der Ionen. Diss. Leipzig 1904, Schlemminger. M. —75.

20. Jeans, J. H. The dynamical theory of gases. Cambridge 1904, Univ. Press. 15s.

21. Kerntler, Franz, Die Ermittlung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes auf Grund allgemein anerkannter Tatsachen u. auf dem Wege einfacher Anschauung. Budapest, Buchdruckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft.
22. Maillet, Edmond, Essais d'hydraulique souterraine et fluviale. Paris, Hermann. Frs. 11.
23. Mazzotto, Domenico, Telegrafia a telefonia senza fili. Milano 1904. L. 3.
24. Poynting, J. H. and Thomson, J. J., A text-book of Physics. vol. 3. Heat. London 1904, Griffin. 15 s.
25. Vaillant, P., et Thovert, J., Physique générale. Paris, 1904, Béranger. Frs. 3.

Tafeln und Rechenapparate.

26. Jordan, W., Hilfstafeln f. Tachymetrie. 3. A. Stuttgart 1904. Metzler. M. 8; geb. M. 8.50.
27. Logarithmentafeln, vier- und fünfstellige, nebst einigen physikalischen Konstanten. Braunschweig 1904, Vieweg & Sohn. cart. M. —80.
28. Nestler, Albert, Der logarithmische Rechenschieber u. sein Gebrauch, Systeme Mannheim, Rietz, Terry, Nestlers Universal, Nestlers Präzision. Lahr i. B., A. Nestler.
29. Rey-Pailhade, J. de, et Jouffray, A., Éphémérides astronomiques décimales pour le méridien de Paris, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1905. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 6.50.
30. Stampfer, S. Sechsstellige logarithmisch-trignometrische Tafeln, nebst Hilfstafeln, e. Anh. u. e. Anweisung zum Gebrauche der Tafeln. Neu bearb. v. E. Doležal. 20. Aufl. Ausg. f. Praktiker. Wien, Gerolds Sohn. geb. in Leinw. M. 7.

Verschiedenes.

31. Astronomischer Kalender f. 1905. Hrsg v. d. k. k. Sternwarte zu Wien. Wien, Gerolds Sohn. M. 2.40.
32. Bürklen, O. Th., Formelsammlung u. Repetitorium der Mathematik. (Sammlung Göschen Nr. 51.) 3., durchgesehene Aufl. Leipzig 1904, Göschen. geb. M. —80.
33. Emch, Arnold, An introduction to projective geometry and its applications. An analytical and synthetic treatment. New York, Wiley & Sons.
34. Klein, F., und Riecke, E., Neue Beiträge zur Frage des mathematischen u. physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik u. Physik in Göttingen, Ostern 1904. Mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. Götting u. F. Klein. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild. Leipzig u. Berlin 1904, Teubner.
35. Picard, Emile, Sur le développement de l'Analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.
36. Vater, Richard, Dampf u. Dampfmaschine. („Aus Natur u. Geisteswelt", 63. Bändchen.) Leipzig, Teubner. M. 1; geb. M. 1.25.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Astronomischer Kalender f. 1905, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 31.

Bailland, B., et Bourget, H., Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Avec une préface de Émile Picard. T. I. (8 novembre 1882—22 juillet 1889.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 16.

Baire, René, Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France. Rédigées par A. Denjoy. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.

Baire, R., Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité. Paris, Vuibert et Nony.

Borel, Émile, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'Ecole normale supérieure et rédigées par Maurice Fréchet. Avec des Notes par Paul Painlevé et Henri Lebesgue. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 4.50.

Brunn, Herm., Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Eine mathematische Studie. Berlin, Reimer. M. 7.

Buchholz, H., Fortgesetzte Untersuchung der Bewegung vom Typus 2/3 im Problem der drei Körper, II. Tl., s. N. B. 2.

Bürklen, O. Th., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, s. N. B. 32.

Darboux, Gaston, Étude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des sciences et des arts à Saint-Louis. Paris 1904, Gauthier-Villars. Frs. 1.50.

Ebert, H., Magnetische Kraftfelder, s. N. B. 15.

Emch, A., An introduction to projective geometry and its applications, s. N. B. 33.

Förster, W., Astrometrie, s. N. B. 3.

Frenzel, C., Über die Grundlagen der exakten Naturwissenschaften, s. N. B. 16.

Gerard, Eric, Leçons sur l'Électricité, s. N. B. 17.

Haacke, Fr., Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. Leipzig 1904, Teubner.

Hammer, E., Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch. 3., durchgesehene Aufl. Lahr i. B. 1904, Albert Nestler.

Harzer, Paul, Die exakten Wissenschaften im alten Japan. Rede zur Feier des Geburtstages des deutschen Kaisers, gehalten an der Christian-Albrechts-Universität am 27. Januar 1905. Kiel, Lipsius & Fischer.

Haussner, R., Darstellende Geometrie, I. 2. Aufl., s. N. B. 6.

Jaumann, G., Grundlagen der Bewegungslehre, s. N. B. 10.

Kerntler, Fr., Die Ermittlung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes, s. N. B. 21.

Klein, Jos., Chemie. Anorganischer Teil. (Sammlung Göschen Nr. 37.) 4., verb. Aufl. Leipzig 1904, Göschen. geb. M.—.80.

Klein u. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts, s. N. B. 34.

Laemmel, R., Die Methoden zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten, s. N. B. 1.

Liebmann, Heinrich, Nichteuklidische Geometrie. (Sammlung Schubert XLIX.) Leipzig, Göschen. geb. M. 6.50.

Logarithmentafeln, vier- u. fünfstellige, s. N. B. 27.

Maillet, E., Hydraulique souterraine et fluviale, s. N. B. 22.

Manes, Alfred, Versicherungswesen. (Teubners Handbücher f. Handel u. Gewerbe.) Leipzig, Teubner. M. 10.

Nestler, A., Der logarithmische Rechenschieber, s. N. B. 28.

Picard, Émile, Sur le développement de l'analyse, s. N. B. 35.

Schüssler, R., Orthogonale Axonometrie, s. N. B. 7.

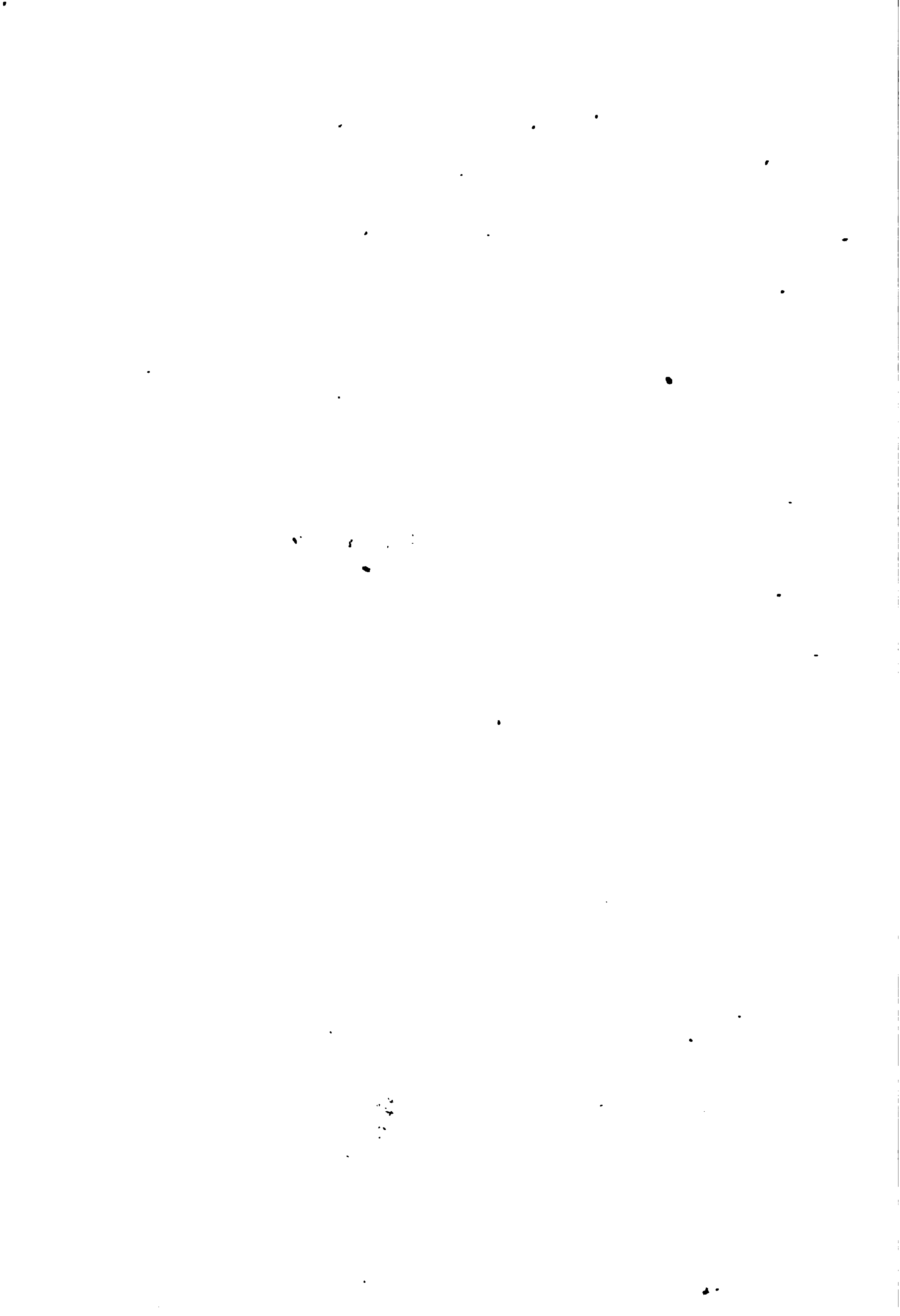
Vater, R., Dampf und Dampfmaschine, s. N. B. 36.

Vonderlinn, J., Schattenkonstruktionen, s. N. B. 8.





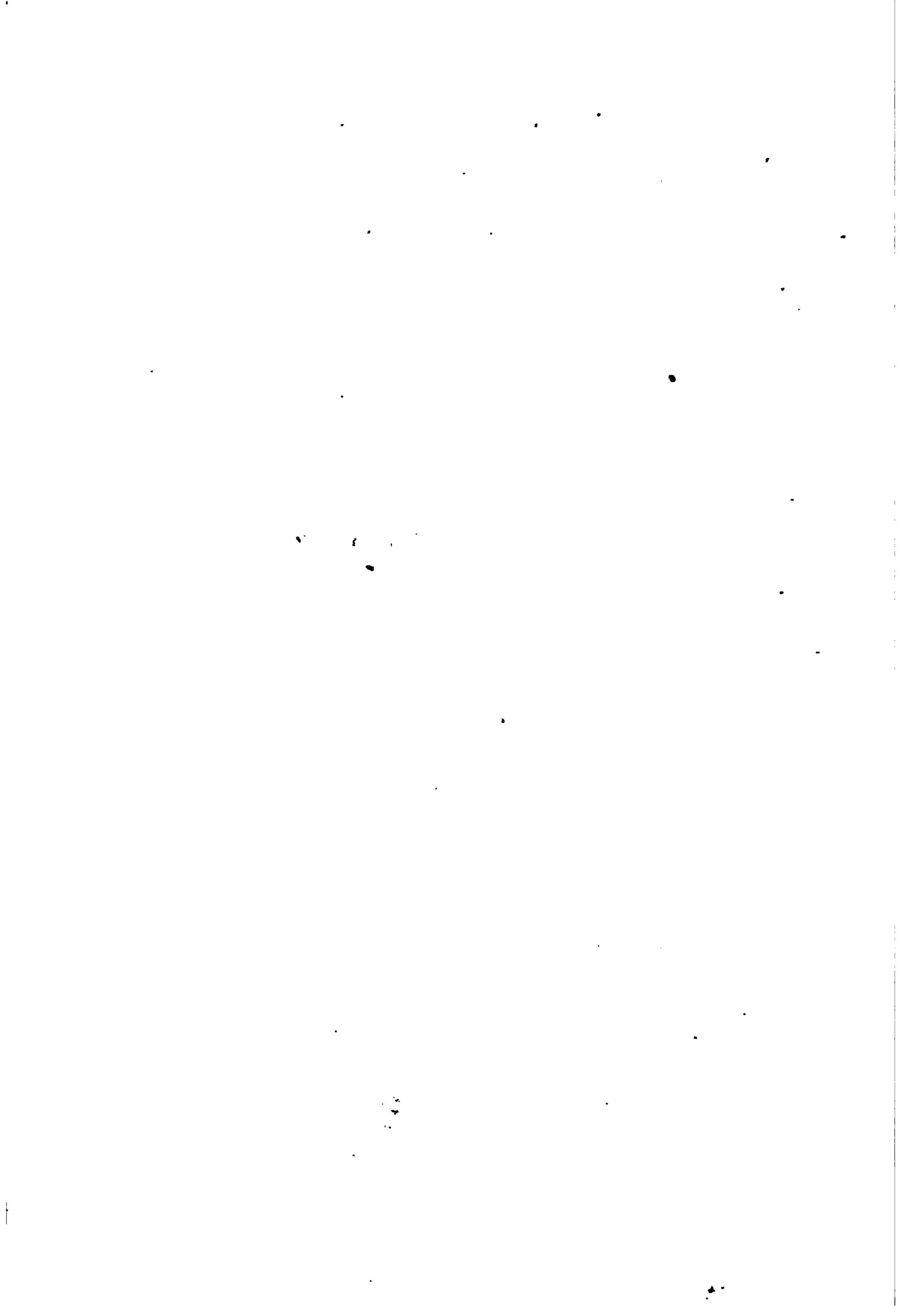




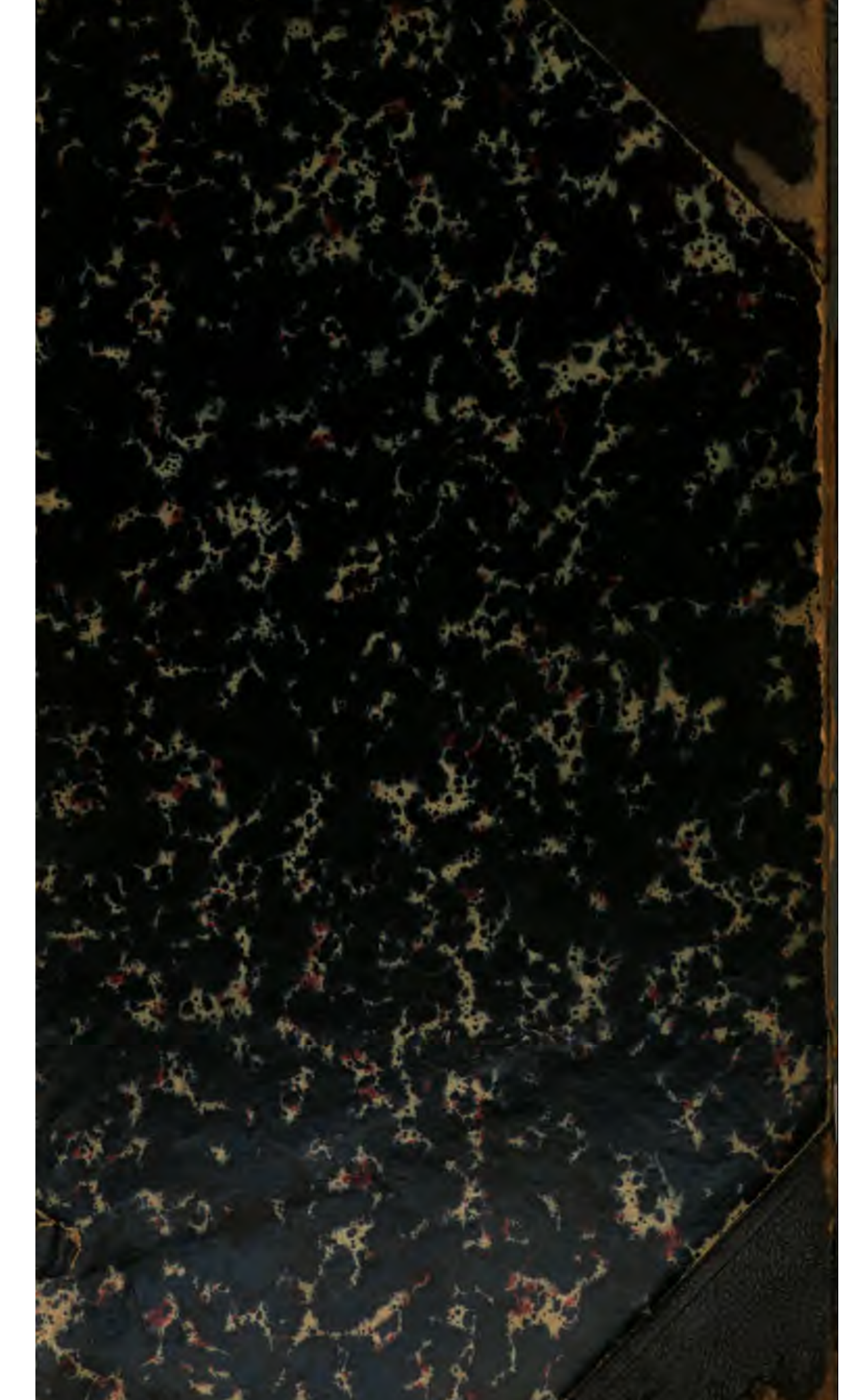

APR 14 1913
DUE MAY 9 1931
MAY 18 1936








3 2044 102 937 554



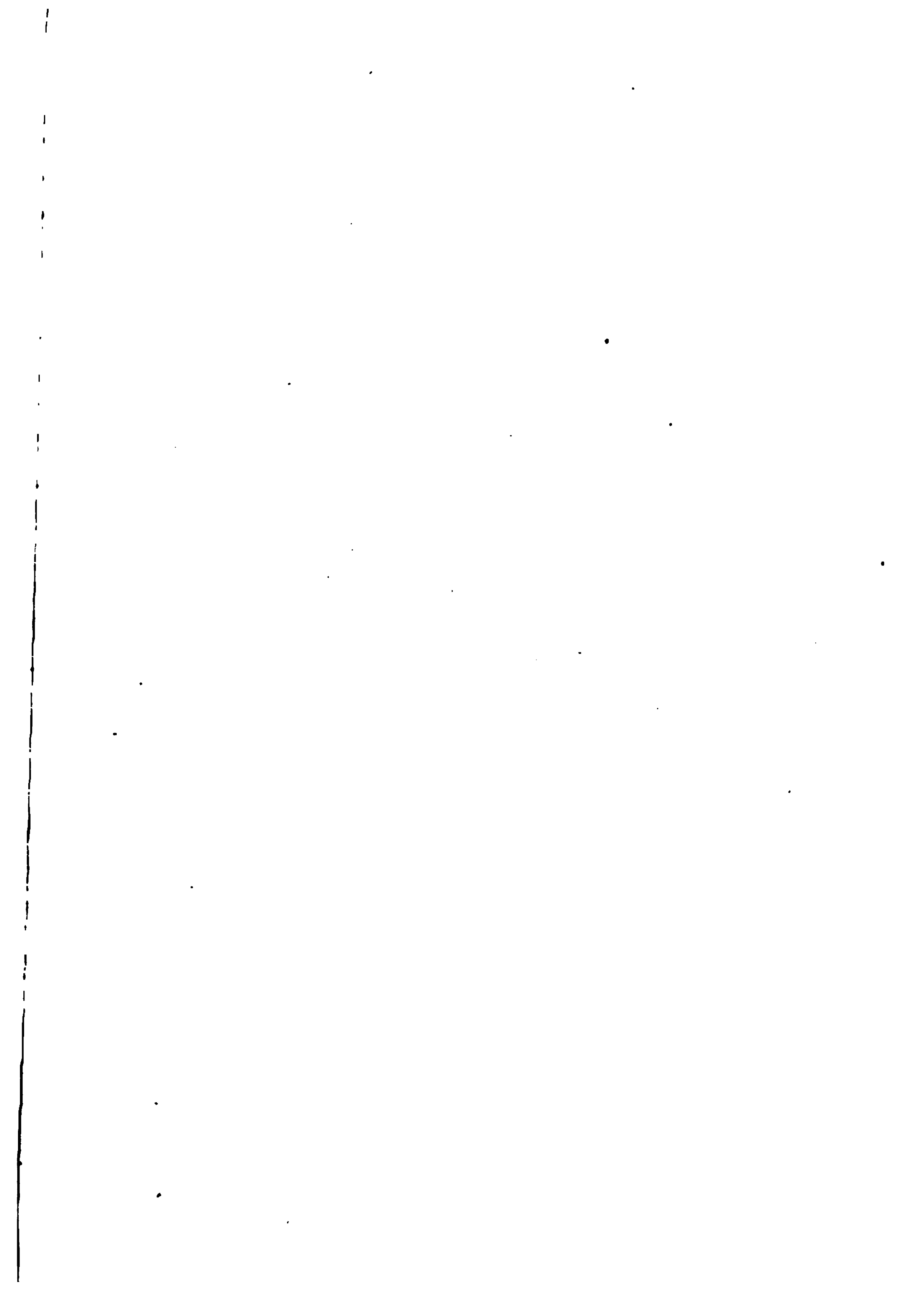

SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE
RI
TAS




ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
SIGILLUM
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE



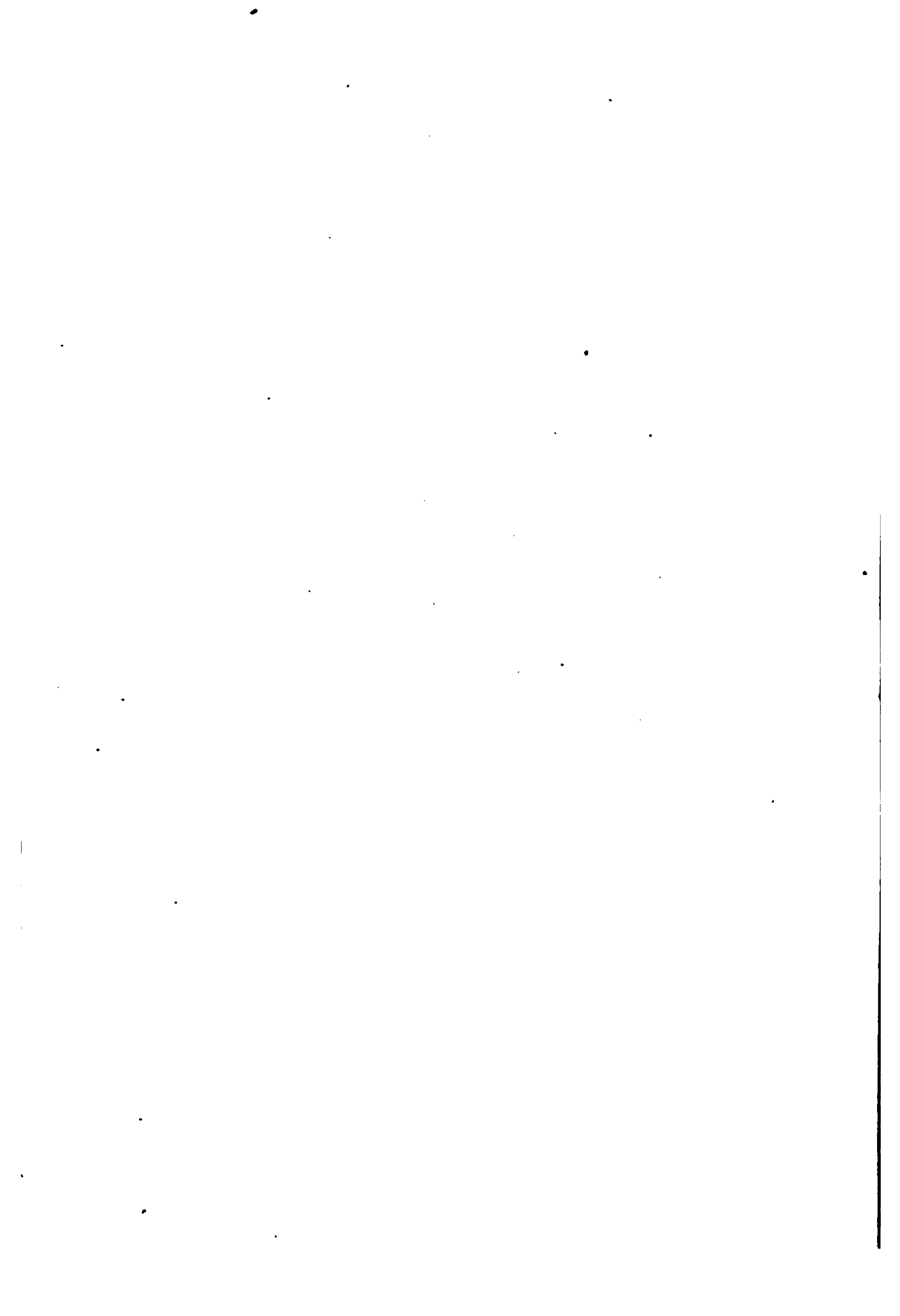


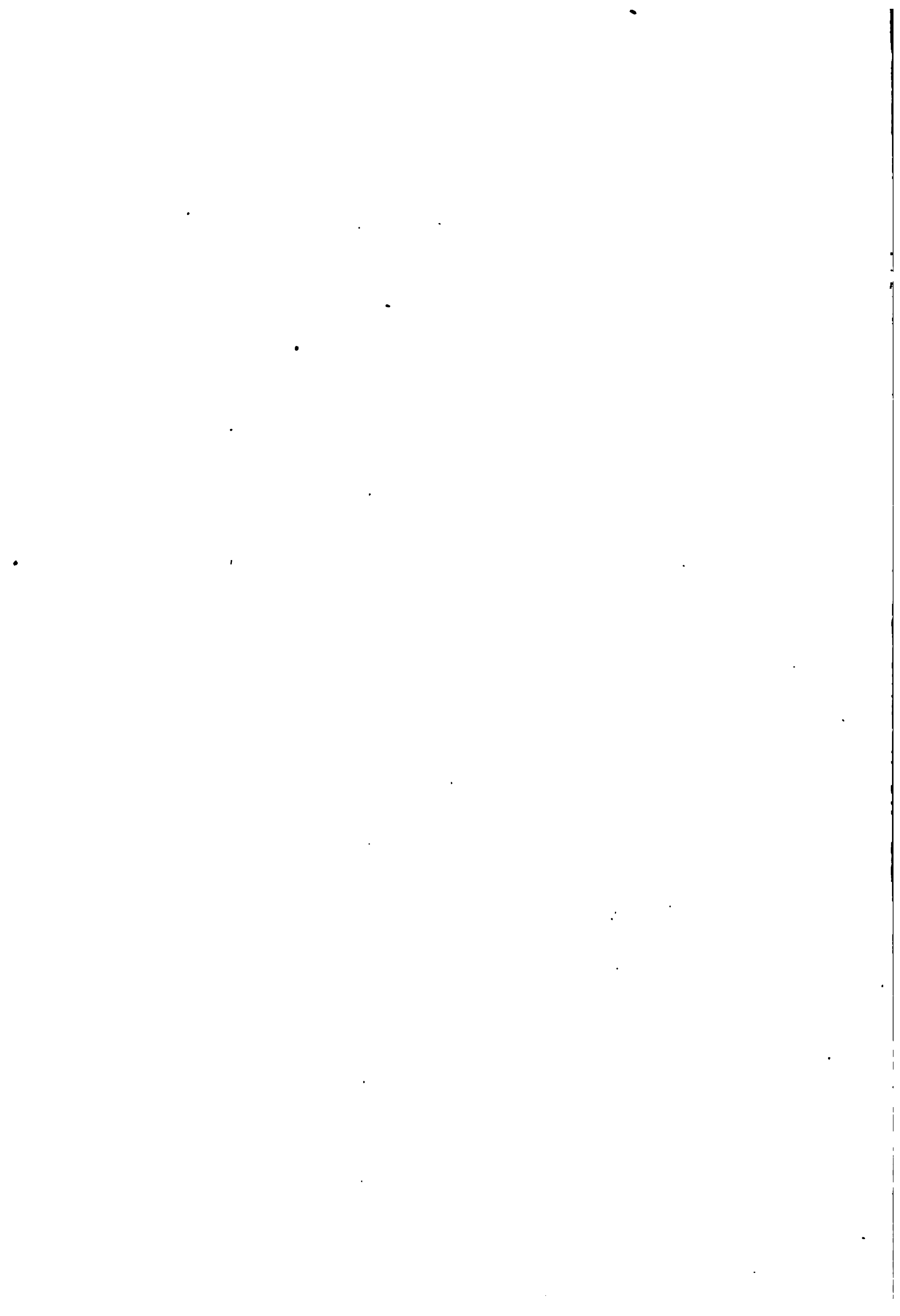



SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE
RI
TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE









ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

52. BAND.

MIT EINER TAFEL UND 119 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1905.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Bücherschau.

Berichtigung.

Auf S. 285, Z. 9 v. o. muß es heißen α_λ, β_λ, γ_λ statt $\alpha\lambda$, $\beta\lambda$, $\gamma\lambda$, d. h. λ ist ein Index, kein Faktor.

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

52. BAND. 1. HEFT.

MIT 36 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 4. Juli 1905.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Biske, E. Czuber, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, A. Grünwald, W. Herglotz, G. Holtsmark, A. V. Leon, F. Ludwig, K. Mack, L. Matthiessen, R. Mehmke, A. G. M. Michell, E. Müller, K. Nitz, B. J. W. Reuser, C. Runge, R. Schimmack, L. Schleiermacher, J. Schnöckel, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, E. Weinnoldt, Th. Weitbrecht, S. Wellisch, C. W. Wirtz, A. Wlassow, F. Wittenbauer, E. Wölffing.

Steven Funch

Weitere Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen.

Von J. Horn in Clausthal.

In zwei Aufsätzen „Zur Theorie der kleinen endlichen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad“ (Bd. 47 und 49 dieser Zeitschrift) habe ich kleine Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad unter der Einwirkung von Kräften behandelt, welche von den Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängen, aber nicht als lineare Funktionen betrachtet werden.[1]) In dem Aufsatze „Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen“ (Bd. 48) werden periodische[2]) Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden untersucht. Die meisten der im zweiten Bande der „Dynamik der Systeme starrer Körper“ von Routh (deutsch von Schepp, 1898) unter Beschränkung auf die linearen Glieder behandelten Beispiele kleiner Schwingungen erfordern jedoch bei exakter Behandlung eine Ergänzung der in Bd. 48 geführten mathematischen Untersuchungen.[3])

In der vorliegenden Arbeit, welche als Fortsetzung der in Bd. 48 enthaltenen anzusehen ist, werden zunächst die Differentialgleichungen der Bewegung für einige konkrete Beispiele ohne Vernachlässigungen aufgestellt und umgeformt (§§ 1—4), damit die mathematische Aufgabe, deren Lösung erfordert wird, sich zweckmäßig formulieren läßt. Es

1) Die Arbeit von F. Richarz und P. Schulze über asymmetrische Schwingungen (Arch. néerl. (2) 6; Ann. Phys. (4) 8) und die Greifswalder Dissertation von P. Schulze (1901) sind vor meinem ersten Aufsatz, die Arbeit von F. A. Schulze über Schwingungsdauer und Dämpfung asymmetrischer Schwingungen (Ann. Phys. (4) 9) ist nach demselben erschienen. Vgl. Bd. 49, S. 246 u. S. 264. — Symmetrische endliche Schwingungen sind theoretisch behandelt bei F. Braun, über elastische Schwingungen, deren Amplituden nicht unendlich klein sind (Ann. Phys. 151, 1874) und in § 8 der Arbeit von R. Hartmann-Kempf, Einfluß der Amplitude auf die Tonhöhe usw. (Ann. Phys. (4) 13).

2) Die Arbeit des Verf. „Bewegungen in der Nähe einer stabilen Gleichgewichtslage“ (Journ. f. Math. 126) behandelt die nicht periodischen Schwingungen für eine spezielle Klasse dynamischer Systeme.

3) Vgl. die in Bd. 48 und unten am Anfang von § 3 zitierte Note von Painlevé (Comptes rendus 124).

stellt sich heraus, daß die erhaltenen Differentialgleichungen unter Benutzung bekannter Integrale auf diejenigen zurückgeführt werden können, deren periodische Lösungen in § 3 und § 4 des Aufsatzes in Bd. 48 bestimmt wurden (§§ 5 – 8). Die gewonnenen Hilfsmittel werden auf die vorausgeschickten dynamischen Aufgaben angewandt (§§ 9—12).

§ 1.

Aufgabe I. *Ein schwerer Punkt, welcher an eine Rotationsfläche mit lotrechter Achse gebunden ist, kann unter geeigneten Bedingungen einen Parallelkreis mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir untersuchen die wenig davon abweichenden Bewegungen.*

Wir nehmen die z-Achse lotrecht aufwärts an und führen in der xy-Ebene Polarkoordinaten ein:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Die Gleichung der Rotationsfläche sei

$$z = f(r).$$

Wenn Differentiationen nach der Zeit t durch einen Strich bezeichnet werden, ist die lebendige Kraft des bewegten Punktes von der Masse 1

$$T = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \tfrac{1}{2}(1 + f'^2(r))r'^2 + \tfrac{1}{2}r^2\varphi'^2$$

und die Kräftefunktion

$$U = -gz = -gf(r).$$

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r'} - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

lauten hier

$$(1 + f'^2(r))r'' + f'(r)f''(r)r'^2 - r\varphi'^2 + gf'(r) = 0,$$
$$r\varphi'' + 2r'\varphi' = 0.$$

Im Falle $f'(r_0) > 0$ besitzen sie die partikuläre Lösung

$$r = r_0, \quad \varphi' = \eta_0 = \sqrt{\frac{gf'(r_0)}{r_0}},$$

welche eine gleichförmige Bewegung auf dem Parallelkreis vom Radius r_0 mit der Geschwindigkeit $r_0\eta_0 = \sqrt{gr_0f'(r_0)}$ darstellt.

Zur Untersuchung der benachbarten Bewegungen setzen wir

$$r = r_0 + R, \quad \varphi' = \eta_0 + \Phi'.$$

Die Bewegungsgleichungen

$$(1 + f'^2(r_0 + R))R'' + f'(r_0 + R)f''(r_0 + R)R'^2$$
$$- (r_0 + R)(\eta_0 + \Phi')^2 + g f'(r_0 + R) = 0,$$
$$(r_0 + R)\Phi'' + 2R'(\eta_0 + \Phi') = 0$$

werden durch ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit den abhängigen Veränderlichen R, R', Φ' ersetzt:

$$\frac{dR}{dt} = R',$$
$$\frac{dR'}{dt} = \alpha R + \beta \Phi' + \cdots,$$
$$\frac{d\Phi'}{dt} = \gamma R' + \cdots;$$

hierbei ist

$$\alpha = \frac{\eta_0^2 - g f''(r_0)}{1 + f'^2(r_0)}, \quad \beta = \frac{2 r_0 \eta_0}{1 + f'^2(r_0)}, \quad \gamma = -\frac{2\eta_0}{r_0},$$

und die weggelassenen Glieder sind von mindestens der zweiten Dimension in R, R', Φ'. Vorausgesetzt ist dabei, daß sich $f(r_0 + R)$ in eine Potenzreihe von R entwickeln läßt.

Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} -s, & 1, & 0 \\ \alpha, & -s, & \beta \\ 0, & \gamma, & -s \end{vmatrix} = s^3 - (\alpha + \beta\gamma)s = 0$$

hat unter der Voraussetzung

$$r_0 f''(r_0) + 3 f'(r_0) > 0$$

außer der Wurzel $s = 0$ die beiden konjugiert imaginären Wurzeln $i\lambda$, $-i\lambda$, wo

$$\lambda = \sqrt{g \frac{r_0 f''(r_0) + 3 f'(r_0)}{r_0(1 + f'^2(r_0))}}$$

positiv genommen werden möge. Durch die Substitution

$$R = x_1 + \beta x_3, \quad R' = \lambda x_2, \quad \Phi' = \gamma x_1 - \alpha x_3$$

geht unser Differentialgleichungssystem über in

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_2 + F_1(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_1 + F_2(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{dx_3}{dt} = F_3(x_1, x_2, x_3),$$

wo F_1, F_2, F_3 Potenzreihen von x_1, x_2, x_3 mit Gliedern zweiter und höherer Dimension sind.

Der Flächensatz für die xy-Ebene und der Satz von der lebendigen Kraft liefern zwei Integrale der Differentialgleichungen zweiter Ordnung für r und φ:

$$J_1 = r^2\varphi' = \text{Const.},$$
$$J_2 = (1 + f'^2(r))r'^2 + r^2\varphi'^2 + 2gf(r) = \text{Const.}$$

Unter Einführung der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 wird

$$J_1 = x_3 + \Psi(x_1, x_2, x_3) = \text{Const.},$$
$$\frac{J_2 - 2\eta_0 J_1}{(1 + f'^2(r_0))\lambda^2} = \Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x_3^2 + \cdots = \text{Const.},$$

wo Φ und Ψ Potenzreihen von x_1, x_2, x_3 mit Gliedern von mindestens zweiter Dimension sind.

§ 2.

Aufgabe II. *Periodische Bewegungen eines um einen festen Punkt O drehbaren schweren starren Körpers in der Nähe einer Gleichgewichtslage. (Benutzung der Eulerschen Gleichungen.)*[1]

Die Hauptachsen des festen Punktes O bezeichnen wir mit x, y, z, die Hauptträgheitsmomente mit A, B, C, die Koordinaten des Schwerpunktes S in bezug auf die Hauptachsen mit ξ, η, ζ[2], die Komponenten der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers in bezug auf die Hauptachsen mit p, q, r und die Kosinus der Winkel, welche die Lotrechte (positiv nach oben) mit den Hauptachsen bildet, mit $\gamma, \gamma', \gamma''$. Die Masse des Körpers sei 1.

Zu den Eulerschen Gleichungen

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + g(\zeta\gamma' - \eta\gamma''),$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp + g(\xi\gamma'' - \zeta\gamma),$$
$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq + g(\eta\gamma - \xi\gamma')$$

treten die Gleichungen hinzu:

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',$$
$$\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,$$
$$\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'.$$

---

1) Routh, Dynamik Bd. II, S. 161. — Lecornu, sur les petits mouvements d'un corps pesant (Bull. de la Soc. math. 1902).

2) Wir denken uns die positiven Richtungen der Achsen x, y, z so gewählt, daß ξ, η, ζ positiv oder Null sind.

Der Gleichgewichtslage entsprechen die Werte

$$p=0,\quad q=0,\quad r=0;\quad \gamma=\frac{\xi}{l},\quad \gamma'=\frac{\eta}{l},\quad \gamma''=\frac{\zeta}{l},$$

wo

$$l=\pm\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

die Entfernung des Schwerpunktes S vom festen Punkte O, positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem S oberhalb oder unterhalb O liegt, mit anderen Worten, je nachdem das Gleichgewicht labil oder stabil ist.

Zur Untersuchung der Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage O setzen wir

$$\gamma=\frac{\xi}{l}+\Gamma,\quad \gamma'=\frac{\eta}{l}+\Gamma',\quad \gamma''=\frac{\zeta}{l}+\Gamma'',$$

wodurch die Differentialgleichungen übergehen in

$$\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt}&=g(\zeta\Gamma'-\eta\Gamma'')+(B-C)qr,\\
B\frac{dq}{dt}&=g(\xi\Gamma''-\zeta\Gamma)+(C-A)rp,\\
C\frac{dr}{dt}&=g(\eta\Gamma-\xi\Gamma')+(A-B)pq;\\
\frac{d\Gamma}{dt}&=\frac{1}{l}(\eta r-\zeta q)+r\Gamma'-q\Gamma'',\\
\frac{d\Gamma'}{dt}&=\frac{1}{l}(\zeta p-\xi r)+p\Gamma''-r\Gamma,\\
\frac{d\Gamma''}{dt}&=\frac{1}{l}(\xi q-\eta p)+q\Gamma-p\Gamma'.
\end{aligned}$$

Um das Differentialgleichungssystem auf die kanonische Form zu bringen, beginnen wir mit den auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt}&=\frac{g}{A}(\zeta\Gamma'-\eta\Gamma''),\\
\frac{dq}{dt}&=\frac{g}{B}(\xi\Gamma''-\zeta\Gamma),\\
\frac{dr}{dt}&=\frac{g}{C}(\eta\Gamma-\xi\Gamma');\\
\frac{d\Gamma}{dt}&=\frac{1}{l}(\eta r-\zeta q),\\
\frac{d\Gamma'}{dt}&=\frac{1}{l}(\zeta p-\xi r),\\
\frac{d\Gamma''}{dt}&=\frac{1}{l}(\xi q-\eta p).
\end{aligned}$$

Sie besitzen eine Lösung

$$p = L\sin(\lambda t + \mu),\qquad q = M\sin(\lambda t + \mu),\qquad r = N\sin(\lambda t + \mu),$$
$$\Gamma = L'\cos(\lambda t + \mu),\quad \Gamma' = M'\cos(\lambda t + \mu),\quad \Gamma'' = N'\cos(\lambda t + \mu),$$

worin λ, μ; L, M, N; L', M', N' Konstante sind. Die Einsetzung in die Differentialgleichungen ergibt

$$\begin{aligned} L\lambda &= \frac{g}{A}(\zeta M' - \eta N'),\\ M\lambda &= \frac{g}{B}(\xi N' - \zeta L'),\\ N\lambda &= \frac{g}{C}(\eta L' - \xi M');\\ L'\lambda &= \frac{1}{l}(\zeta M - \eta N),\\ M'\lambda &= \frac{1}{l}(\xi N - \zeta L),\\ N'\lambda &= \frac{1}{l}(\eta L - \xi M). \end{aligned}$$

Durch Elimination von L', M', N' erhält man

$$\begin{aligned} \left(\frac{Al}{g}\lambda^2 + \eta^2 + \zeta^2\right)L - \xi\eta M - \xi\zeta N &= 0,\\ -\eta\xi L + \left(\frac{Bl}{g}\lambda^2 + \zeta^2 + \xi^2\right)M - \eta\zeta N &= 0,\\ -\zeta\xi L - \zeta\eta M + \left(\frac{Cl}{g}\lambda^2 + \xi^2 + \eta^2\right)N &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt für λ die Gleichung 6. Grades

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{Al}{g}\lambda^2 + \eta^2 + \zeta^2, & -\xi\eta, & -\xi\zeta \\ -\eta\xi, & \frac{Bl}{g}\lambda^2 + \zeta^2 + \xi^2, & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi, & -\zeta\eta, & \frac{Cl}{g}\lambda^2 + \xi^2 + \eta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche in die beiden Gleichungen

$$\lambda^2 = 0$$

und

$$\lambda^4 + \left(\frac{\eta^2+\zeta^2}{A} + \frac{\zeta^2+\xi^2}{B} + \frac{\xi^2+\eta^2}{C}\right)\frac{g}{l}\lambda^2 + g^2\frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{ABC} = 0$$

zerfällt. Die quadratische Gleichung für λ^2 hat reelle Wurzeln[1]), denn ihre Diskriminante, welche wir unter der Voraussetzung $A \geqq B \geqq C$ auf die Form

$$[A(B-C)\xi^2 - B(A-C)\eta^2 - C(A-B)\zeta^2]^2 + 2AB(A-C)(B-C)\xi^2\eta^2$$

1) Vgl. Routh Bd. II, S. 162.

bringen, ist nicht negativ. Liegt der Schwerpunkt S unterhalb O, was wir im folgenden annehmen, ist also l negativ, so sind zwei positive Wurzeln λ_1^2, λ_2^2 vorhanden, denn die Summe und das Produkt von λ_1^2 und λ_2^2 sind positiv. Die 6 Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit der Unbekannten $s = i\lambda$ sind also

$$0, \quad 0, \quad i\lambda_1, \quad -i\lambda_1, \quad i\lambda_2, \quad -i\lambda_2.$$

Damit $\lambda_1 = \lambda_2$ wird, muß unter der Annahme $A \geqq B \geqq C$

$$\eta = 0, \quad A(B-C)\xi^2 = C(A-B)\zeta^2$$

sein. Es sind dies zwei der drei Bedingungen, welche im Hessschen Falle erfüllt sind. Hierin sind die Fälle von Euler ($\xi = \eta = \zeta = 0$) und Lagrange ($A = B$, $\xi = \eta = 0$ oder $B = C$, $\eta = \zeta = 0$) enthalten, welche sich vermittels elliptischer Funktionen behandeln lassen. Wenn S nicht mit O zusammenfällt, können λ_1 und λ_2 nicht verschwinden. Im folgenden nehmen wir λ_1, λ_2 reell, sowie voneinander und von Null verschieden an.

Sind L_i, M_i, N_i $(i=1,2)$ die Unterdeterminanten einer Zeile der Determinante $\Delta(\lambda_i)$, so kann man, wenn

$$\begin{aligned} L_i' &= \frac{\xi M_i - \eta N_i}{l\lambda_i}, \\ M_i' &= \frac{\xi N_i - \zeta L_i}{l\lambda_i}, \\ N_i' &= \frac{\eta L_i - \xi M_i}{l\lambda_i}, \end{aligned} \qquad (i=1,2)$$

gesetzt wird,

$$\lambda = \lambda_i, \quad \mu = \mu_i; \quad L = \varrho_i L_i, \quad M = \varrho_i M_i, \quad N = \varrho_i N_i;$$
$$L' = \varrho_i L_i', \quad M' = \varrho_i M_i', \quad N' = \varrho_i N_i'$$

annehmen, wo ϱ_i und μ_i $(i=1,2)$ willkürliche Konstante sind. Demnach besitzen die linearen Differentialgleichungen die partikulären Lösungen

$$p = L_i\varrho_i \sin(\lambda_i t + \mu_i), \quad q = M_i\varrho_i \sin(\lambda_i t + \mu_i), \quad r = N_i\varrho_i \sin(\lambda_i t + \mu_i),$$
$$\Gamma = L_i'\varrho_i \cos(\lambda_i t + \mu_i), \quad \Gamma' = M_i'\varrho_i \cos(\lambda_i t + \mu_i), \quad \Gamma'' = N_i'\varrho_i \cos(\lambda_i t + \mu_i)$$

für $i = 1, 2$.

Der Doppelwurzel $\lambda = 0$ der charakteristischen Gleichung entspricht die Lösung

$$p = \xi c_3, \quad q = \eta c_3, \quad r = \zeta c_3,$$
$$\Gamma = \xi c_3', \quad \Gamma' = \eta c_3', \quad \Gamma'' = \zeta c_3',$$

wo c_3, c_3' willkürliche Konstante sind.

Demnach ist die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
p &= L_1 \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + L_2 \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) + \xi c_3,\\
q &= M_1 \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + M_2 \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) + \eta c_3,\\
r &= N_1 \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + N_2 \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) + \zeta c_3;\\
\Gamma &= L_1' \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + L_2' \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2) + \xi c_3',\\
\Gamma' &= M_1' \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + M_2' \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2) + \eta c_3',\\
\Gamma'' &= N_1' \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + N_2' \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2) + \zeta c_3',
\end{aligned}$$

Setzen wir nun[1])

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) = c_1 \cos \lambda_1 t + c_1' \sin \lambda_1 t,\\
x_2 &= \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) = c_2 \cos \lambda_2 t + c_2' \sin \lambda_2 t,\\
x_3 &= c_3;\\
y_1 &= \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) = - c_1 \sin \lambda_1 t + c_1' \cos \lambda_1 t,\\
y_2 &= \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2) = - c_2 \sin \lambda_2 t + c_2' \cos \lambda_2 t,\\
y_3 &= c_3',
\end{aligned}$$

so ist

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 0, \quad \frac{dy_3}{dt} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
p &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + \xi x_3,\\
q &= M_1 x_1 + M_2 x_2 + \eta x_3,\\
r &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \zeta x_3;\\
\Gamma &= L_1' y_1 + L_2' y_2 + \xi y_3,\\
\Gamma' &= M_1' y_1 + M_2' y_2 + \eta y_3,\\
\Gamma'' &= N_1' y_1 + N_2' y_2 + \zeta y_3.
\end{aligned}$$

Die ursprünglichen nicht linearen Differentialgleichungen gehen durch diese lineare Substitution über in

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + F_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + G_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + F_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 + G_2,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = F_3, \quad \frac{dy_3}{dt} = G_3,$$

1) Dabei ist $c_i = \varrho_i \sin \mu_i, \quad c_i' = \varrho_i \cos \mu_i \qquad (i = 1, 2).$

wo $F_1, \ldots; G_1, \ldots$ ganze homogene Funktionen zweiten Grades von $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ sind.

Die Relation

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

geht in

$$\xi \Gamma + \eta \Gamma' + \zeta \Gamma'' + \frac{l}{2}(\Gamma^2 + \Gamma'^2 + \Gamma''^2) = 0$$

über; der Flächensatz und der Satz von der lebendigen Kraft

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = \text{Const.},$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2g(\xi\gamma + \eta\gamma' + \zeta\gamma'') = \text{Const.}$$

werden

$$A\xi p + B\eta q + C\zeta r + l(Ap\Gamma + Bq\Gamma' + Cr\Gamma'') = \text{Const.},$$

$$\xi \Gamma + \eta \Gamma' + \zeta \Gamma'' + \frac{1}{g}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{Const.}$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ geht die erste Gleichung in

$$y_3 + \Psi_2(x_1, \ldots; \; y_1, \ldots) = 0,$$

die zweite in

$$x_3 + \Psi_1(x_1, \ldots; \; y_1, \ldots) = \text{Const.}$$

über, wo Ψ_1, Ψ_2 ganze homogene Funktionen zweiten Grades der x und y sind. Es ist nämlich

$$\xi \Gamma + \eta \Gamma' + \zeta \Gamma'' = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) y_3$$

und

$$A\xi p + B\eta q + C\zeta r$$
$$= (A\xi L_1 + B\eta M_1 + C\zeta N_1)x_1 + (A\xi L_2 + B\eta M_2 + C\zeta N_2)x_2$$
$$+ (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)x_3 = (A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2)x_3$$

wegen

$$A\xi L_i + B\eta M_i + C\zeta N_i = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Durch Subtraktion der ersten und dritten Gleichung erhalten wir die Gleichung

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - gl(\Gamma^2 + \Gamma'^2 + \Gamma''^2) = \text{Const.},$$

welche in

$$\Phi(x_1, x_2, x_3; \; y_1, y_2, y_3) = \text{Const.}$$

übergeht, wo Φ eine ganze homogene Funktion zweiter Dimension darstellt. Die Koeffizienten von x_1^2 und x_2^2 in Φ,

$$AL_1^2 + BM_1^2 + CN_1^2, \quad AL_2^2 + BM_2^2 + CN_2^2$$

sind sicher von Null verschieden. Sie könnten nur verschwinden, wenn $L_1 = M_1 = N_1 = 0$ oder $L_2 = M_2 = N_2 = 0$, d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} L_1, & L_2, & \xi \\ M_1, & M_2, & \eta \\ N_1, & N_2, & \zeta \end{vmatrix} = 0$$

wäre.

§ 3.

Aufgabe III. *Periodische Bewegungen eines um einen festen Punkt O drehbaren schweren starren Körpers in der Nähe einer Gleichgewichtslage. (Benutzung der Lagrangeschen Gleichungen.)*[1])

Neben dem Hauptachsenkreuz x, y, z des Körpers führen wir ein im Raume festes Achsenkreuz x_1, y_1, z_1 ein, wo die z_1-Achse lotrecht aufwärts gerichtet ist. Die Koordinaten des Schwerpunktes S im festen Achsenkreuz seien ξ_1, η_1, ζ_1. Die gegenseitige Lage der beiden Koordinatensysteme wird durch die Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ dargestellt.[2])
Die doppelte lebendige Kraft

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$

geht unter Berücksichtigung der Formeln

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin\vartheta \sin\varphi + \vartheta' \cos\varphi, \\ q &= \psi' \sin\vartheta \cos\varphi - \vartheta' \sin\varphi, \\ r &= \psi' \cos\vartheta + \varphi' \end{aligned}$$

über in

$$\begin{aligned} 2T = {} & (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)\vartheta'^2 + C\varphi'^2 \\ & + (A\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + B\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + C\cos^2\vartheta)\psi'^2 \\ & + 2(A-B)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\cdot\psi'\vartheta' + 2C\cos\vartheta\cdot\varphi'\psi'. \end{aligned}$$

Die Kräftefunktion ist

$$U = -g\zeta_1 = -g(\xi\sin\vartheta\sin\varphi + \eta\sin\vartheta\cos\varphi + \zeta\cos\vartheta).$$

---

1) Zu § 3 und § 11 vgl. den Schluß der Note von Painlevé, sur les petits mouvements périodiques des systèmes (Comptes rendus 124, S. 1222 ff.)

2) Die Richtungskosinus der Achsen x_1, y_1, z_1 in bezug auf die Hauptachsen x, y, z seien $\alpha, \alpha', \alpha''$ bezw. β, β', β'' bezw. $\gamma, \gamma', \gamma''$. Setzt man dann

$$\gamma = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \gamma' = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \gamma'' = \cos\vartheta,$$
$$\alpha'' = \sin\vartheta\sin\psi, \quad \beta'' = -\sin\vartheta\cos\psi,$$

so sind, wenn γ'' nicht ± 1 ist, ϑ, φ, ψ bis auf Vielfache von 2π mit der Maßgabe bestimmt, daß sie durch $-\vartheta, \varphi + \pi, \psi + \pi$ ersetzt werden dürfen. Da bei Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage $\gamma, \gamma', \gamma''$ nahezu gleich $\frac{\xi}{l}, \frac{\eta}{l}, \frac{\zeta}{l}$ sind, so ist bei geeigneter Bezeichnung der Achsen x, y, z γ'' von ± 1 verschieden.

Die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = 0$$

sind bei beliebigem ψ für $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = \varphi_0$ erfüllt, wo

$$\sin \varphi_0 = \frac{\xi}{k}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{\eta}{k},$$
$$\sin \vartheta_0 = \frac{k}{l}, \quad \cos \vartheta_0 = \frac{\zeta}{l}$$

ist. Dabei ist $k = \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$[1]) und $l = -\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, wenn, wie wir im folgenden annehmen, S unterhalb O liegt, das Gleichgewicht also stabil ist. Zu den angegebenen Werten φ_0, ϑ_0 gehört

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = l.$$

Der Winkel ψ ist unbestimmt, d. h. der Körper gelangt durch Drehung um die Lotrechte OS in eine neue Gleichgewichtslage.

Wir führen Koordinaten

$$\Theta = \vartheta - \vartheta_0, \quad \Phi = \varphi - \varphi_0$$

ein, welche in der Gleichgewichtslage verschwinden. Dann ist

$$2T = \left(\frac{A\eta^2 + B\xi^2}{k^2} + \cdots\right)\Theta'^2 + C\Phi'^2 + \left(\frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{l^2} + \cdots\right)\psi'^2$$
$$+ 2\left(\frac{(A-B)\xi\eta}{kl} + \cdots\right)\psi'\Theta' + 2\left(\frac{C\zeta}{l} + \cdots\right)\psi'\Phi',$$

wo an Stelle von ... Potenzreihen von Θ, Φ ohne konstante Glieder stehen. Ferner ist (unter Weglassung eines unwesentlichen konstanten Gliedes)

$$U = \frac{g}{2}\left(l\Theta^2 + \frac{k^2}{l}\Phi^2 + \cdots\right),$$

wo die weggelassenen Glieder von mindestens dritter Dimension in Θ, Φ sind.

Wir setzen vorübergehend

$$a_{11} = \frac{A\eta^2 + B\xi^2}{k^2}, \quad a_{22} = C, \quad a_{33} = \frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{l^2},$$
$$a_{13} = \frac{(A-B)\xi\eta}{kl}, \quad a_{23} = \frac{C\zeta}{l}$$

---

1) Nachdem das Vorzeichen von k beliebig festgelegt ist, sind φ_0, ϑ_0 (bis auf Vielfache von 2π) bestimmt. Einer Zeichenänderung von k entspricht die Ersetzung von φ_0, ϑ_0 durch $\varphi_0 + \pi$, $-\vartheta_0$. Wir bezeichnen die Achsen so, daß S nicht in die z-Achse fällt; dann ist k von Null verschieden.

und führen die quadratischen Formen

$$F = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3,$$
$$G = glu_1^2 + \frac{gk^2}{l}u_2^2$$

durch eine lineare Substitution

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,$$
$$u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2,$$
$$u_3 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$$

in

$$F = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$
$$G = -\lambda_1^2 v_1^2 - \lambda_2^2 v_2^2$$

über. Zunächst ist, wenn

$$v_3 = \frac{a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3}{\sqrt{a_{33}}}$$

gesetzt wird,

$$F = v_3^2 + \frac{(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)u_1^2 + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)u_2^2 - 2a_{13}a_{23}u_1u_2}{a_{33}}.$$

Damit

$$\frac{(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)u_1^2 + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)u_2^2 - 2a_{13}a_{23}u_1u_2}{a_{33}} = v_1^2 + v_2^2,$$
$$glu_1^2 + \frac{gk^2}{l}u_2^2 = -\lambda_1^2 v_1^2 - \lambda_2^2 v_2^2$$

wird, müssen $\lambda^2 = \lambda_1^2$ und $\lambda^2 = \lambda_2^2$ der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}} + gl, & -\lambda^2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}} \\ -\lambda^2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}}, & \lambda^2 \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}} + \frac{gk^2}{l} \end{vmatrix} = 0$$

genügen, welche auf dieselbe Form wie in § 2 gebracht werden kann:

$$\lambda^4 + \left(\frac{\eta^2 + \zeta^2}{A} + \frac{\zeta^2 + \xi^2}{B} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{C}\right)\frac{g}{l}\lambda^2 + g^2\frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{ABC} = 0,$$

und welche im Fall $l < 0$ zwei positive Wurzeln λ_1^2, λ_2^2 besitzt, die wir wie in § 2 als verschieden voraussetzen. Die Substitutionskoeffizienten α_i, β_i $(i=1,2)$ ergeben sich nun aus

$$\left(\lambda_i^2 \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}} + gl\right)\alpha_i - \lambda_i^2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}} \cdot \beta_i = 0,$$
$$-\lambda_i^2 \frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}} \cdot \alpha_i + \left(\lambda_i^2 \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}} + \frac{gk^2}{l}\right)\beta_i = 0;$$

hiernach können wir z. B. setzen:

$$\alpha_i = \lambda_i^2 \cdot Ck(A\xi^2 + B\eta^2) + \frac{gk^2}{l}(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2),$$
$$\beta_i = (A - B)C\xi\eta\zeta.$$

Aus

$$u_3 = \frac{v_3}{\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{13}u_1 + a_{23}u_2}{a_{33}}$$

folgt, wenn man u_1, u_2 durch v_1, v_2 ersetzt,

$$\gamma_1 = -\frac{a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1}{a_{33}}, \quad \gamma_2 = -\frac{a_{13}\alpha_2 + a_{23}\beta_2}{a_{33}}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}.$$

Führt man nun an Stelle von Θ, Φ, Ψ vermöge der Gleichungen

$$\Theta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$
$$\Phi = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$
$$\Psi = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

neue Veränderliche x_1, x_2, x_3 ein, so wird

$$T = \tfrac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) + \cdots,$$
$$U = -\tfrac{1}{2}g(\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2) + \cdots,$$

wo nur die Glieder niedrigster Dimension angeschrieben sind; U und die Koeffizienten von x_α', x_β' $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ in T sind Potenzreihen von x_1, x_2, hängen aber nicht von x_3 ab.

Wir kennen die beiden Integralgleichungen

$$T - U = \text{Const.},$$
$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = \text{Const.}$$

Die erste schreibt sich

$$\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \cdots = \text{Const.}$$

oder

$$\Phi(x_1', x_2', x_3';\ x_1, x_2) = \text{Const.},$$

wo Φ eine Potenzreihe der beigefügten Argumente ist, welche mit den angeschriebenen quadratischen Gliedern beginnt. Die zweite wird nach Einsetzung der bekannten Ausdrücke für p, q, r; γ, γ', γ''

$$(A - B)\sin\vartheta \sin\varphi \cos\varphi \cdot \vartheta' + C\cos\vartheta \cdot \varphi'$$
$$+ (A\sin^2\vartheta \sin^2\varphi + B\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + C\cos^2\vartheta)\cdot\psi' = \text{Const.}$$

oder

$$x_3' + \Psi(x_1', x_2', x_3';\ x_1, x_2) = \text{Const.},$$

wo Ψ eine lineare homogene Funktion von x_1', x_2', x_3' ist, deren Koeffizienten Potenzreihen von x_1, x_2 ohne konstante Glieder sind.

Die Lagrangeschen Differentialgleichungen schreiben sich jetzt[1]):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1', \quad \frac{dx_1'}{dt} = -\lambda_1^2 x_1 + \mathfrak{F}_1(x_1, x_2, x_1', x_2', x_3'),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2', \quad \frac{dx_2'}{dt} = -\lambda_2^2 x_2 + \mathfrak{F}_2(x_1, x_2, x_1', x_2', x_3'),$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_3', \quad \frac{dx_3'}{dt} = \mathfrak{F}_3(x_1, x_2, x_1', x_2', x_3');$$

$\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ sind Potenzreihen von $x_1, x_2, x_1', x_2', x_3'$ ohne Glieder von geringerer als der zweiten Dimension.

Wir scheiden die Differentialgleichung

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3'$$

aus und betrachten die fünf übrigen Differentialgleichungen mit den abhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, x_1', x_2', x_3'$.

§ 4.

Aufgabe IV. *Der Schwerpunkt eines schweren starren Körpers mit dem festen Punkt O liege auf einer Hauptachse von O. Der Körper kann sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit n um diese vertikal gerichtete Hauptachse drehen. Wir untersuchen die benachbarten periodischen Bewegungen.*[2])

Die am Anfang von § 2 eingeführten Bezeichnungen werden beibehalten; nur die Koordinaten des Schwerpunktes S in bezug auf die Hauptachsen von O sollen jetzt $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta \gtrless 0$ sein.

Die Eulerschen Gleichungen

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + g\zeta\gamma',$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp - g\zeta\gamma,$$
$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq$$

in Verbindung mit den Gleichungen

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',$$
$$\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,$$
$$\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'$$

1) Vgl. Bd. 48, S. 404. 2) Routh Bd. II, S. 159.

haben die Lösung

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = n; \quad \gamma = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \gamma'' = 1,$$

wo n eine beliebige Konstante ist.

Zur Untersuchung der benachbarten Bewegungen setzen wir

$$p = P, \quad q = Q, \quad r = n + R; \quad \gamma = \Gamma, \quad \gamma' = \Gamma', \quad \gamma'' = 1 + \Gamma'',$$

wodurch die Differentialgleichungen übergehen in

$$A\frac{dP}{dt} = (B - C)nQ + g\zeta\Gamma'' + (B - C)QR,$$

$$B\frac{dQ}{dt} = (C - A)nP - g\zeta\Gamma + (C - A)RP,$$

$$C\frac{dR}{dt} = (A - B)PQ;$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = n\Gamma' - Q + R\Gamma' - Q\Gamma'',$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = P - n\Gamma + P\Gamma'' - R\Gamma,$$

$$\frac{d\Gamma''}{dt} = Q\Gamma - P\Gamma'.$$

Die Integralgleichungen

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = \text{Const.},$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2g\zeta\gamma'' = \text{Const.}$$

schreiben sich

$$2\Gamma'' + \Gamma^2 + \Gamma'^2 + \Gamma''^2 = 0,$$

$$CR + Cn\Gamma'' + AP\Gamma + BQ\Gamma' + CR\Gamma'' = \text{Const.},$$

$$2g\zeta\Gamma'' + 2CnR + AP^2 + BQ^2 + CR^2 = \text{Const.}$$

Um unser Differentialgleichungssystem auf die kanonische Form zu bringen, zerlegen wir die auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen in die beiden Systeme

$$A\frac{dP}{dt} = (B - C)nQ + g\zeta\Gamma,$$

$$B\frac{dQ}{dt} = (C - A)nP - g\zeta\Gamma;$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = n\Gamma' - Q,$$

$$\frac{d\Gamma'}{dt} = P - n\Gamma$$

und

$$\frac{dR}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\Gamma''}{dt} = 0.$$

Das zweite System hat die Lösung

$$R = c_3, \quad \Gamma' = c_3',$$

wo c_3, c_3' willkürliche Konstante sind. Das erste System besitzt eine Lösung

$$P = L \sin(\lambda t + \mu), \quad Q = M \cos(\lambda t + \mu),$$
$$\Gamma = L' \sin(\lambda t + \mu), \quad \Gamma' = M' \cos(\lambda t + \mu).$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} A\lambda L &= (B - C)nM + g\zeta M', \\ B\lambda M &= (A - C)nL + g\zeta L'; \\ \lambda L' &= nM' - M, \\ \lambda M' &= nL' - L; \end{aligned}$$

die Elimination von L, M ergibt

$$\begin{gathered} -(A + B - C)n\lambda \cdot L' + (A\lambda^2 + (B - C)n^2 + g\zeta) \cdot M' = 0, \\ (B\lambda^2 + (A - C)n^2 + g\zeta) \cdot L' - (A + B - C)n\lambda \cdot M' = 0. \end{gathered}$$

Hieraus folgt für λ^2 die quadratische Gleichung

$$(A + B - C)^2 n^2 \lambda^2 = (A\lambda^2 + (B - C)n^2 + g\zeta)(B\lambda^2 + (A - C)n^2 + g\zeta)$$

oder

$$\begin{gathered} AB\lambda^4 + (n^2(AC + BC - C^2 - 2AB) + (A + B)g\zeta)\lambda^2 \\ + ((A - C)n^2 + g\zeta)((B - C)n^2 + g\zeta) = 0. \end{gathered}$$

Damit deren Wurzeln λ_1^2, λ_2^2 positiv und verschieden sind, muß die Diskriminante positiv, das konstante Glied positiv und der Koeffizient von λ^2 negativ sein:

$$\begin{gathered} [n^2(AC + BC - C^2 - 2AB) + (A + B)g\zeta]^2 \\ > 4AB[(A - C)n^2 + g\zeta][(B - C)n^2 + g\zeta] > 0, \\ n^2(AC + BC - C^2 - 2AB) + (A + B)g\zeta < 0. \end{gathered}$$

Im Falle $A = B$ sind

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{\pm(2A - C)n \pm \sqrt{C^2 n^2 - 4Ag\zeta}}{2A}$$

reell, voneinander und von Null verschieden, wenn

$$n^2 > \frac{4Ag\zeta}{C^2}$$

ist.[1])

1) Vgl. Routh Bd. II, S. 160.

Nun ist

$$\frac{M'}{L'} = \sigma = \frac{\lambda n(A+B-C)}{A\lambda^2+(B-C)n^2+g\zeta} = \frac{B\lambda^2+(A-C)n^2+g\zeta}{\lambda n(A+B-C)}$$

und

$$L = nL' - \lambda M' = (n-\lambda\sigma)L',$$
$$M = nM' - \lambda L' = (n\sigma-\lambda)L'.$$

Bezeichnet man mit σ_1 und σ_2 die Werte, welche σ für $\lambda = \lambda_1$ und für $\lambda = \lambda_2$ annimmt, so hat das erste lineare System die allgemeine Lösung

$$P = (n-\lambda_1\sigma_1)\varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + (n-\lambda_2\sigma_2)\varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2),$$
$$Q = (n\sigma_1-\lambda_1)\varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + (n\sigma_2-\lambda_2)\varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2);$$
$$\Gamma = \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2),$$
$$\Gamma' = \mu_1\varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + \mu_2\varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2)$$

mit den willkürlichen Konstanten $\varrho_1, \varrho_2; \mu_1, \mu_2$.

Setzt man

$$x_1 = \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1), \quad y_1 = \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1),$$
$$x_2 = \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2), \quad y_2 = \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2),$$
$$x_3 = c_3 \quad , \quad y_3 = c_3' \quad ,$$

so ist

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dy_3}{dt} = 0$$

und

$$P = (n-\lambda_1\sigma_1)x_1 + (n-\lambda_2\sigma_2)x_2,$$
$$Q = (n\sigma_1-\lambda_1)y_1 + (n\sigma_2-\lambda_2)y_2,$$
$$R = x_3;$$
$$\Gamma = x_1 + x_2,$$
$$\Gamma' = \sigma_1 y_1 + \sigma_2 y_2,$$
$$\Gamma'' = y_3.$$

Die ursprünglichen nicht linearen Differentialgleichungen gehen durch diese lineare Substitution in

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + F_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + G_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + F_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 + G_2,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = \qquad F_3, \quad \frac{dy_3}{dt} = \qquad G_3$$

über, wo $F_1, \ldots; G_1, \ldots$ ganze homogene Funktionen zweiten Grades von $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ sind.

Die erste der drei oben angeschriebenen Integralgleichungen wird

$$y_3 + \Psi_2(x_1, \ldots; y_1 \ldots) = 0.$$

Durch Addition der mit $-\frac{1}{2n}$ multiplizierten ersten und der mit $\frac{1}{C}$ multiplizierten zweiten Gleichung erhält man

$$x_3 + \Psi_1(x_1, \ldots; y_1, \ldots) = \text{Const.}$$

Die Addition der bezw. mit

$$Cn^2 - g\zeta,\ 2n,\ 1$$

multiplizierten drei Gleichungen ergibt

$$(Cn^2 - g\zeta)(\Gamma^2 + \Gamma'^2 + \Gamma''^2) - 2n(AP\Gamma + BQ\Gamma' + CR\Gamma'')$$
$$+ (AP^2 + BQ^2 + CR^2) = \Phi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \text{Const.}$$

Hierbei sind Φ, Ψ_1, Ψ_2 ganze homogene Funktionen zweiten Grades von $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$.

Der Koeffizient von x_1^2 in Φ,

$$Cn^2 - g\zeta + A(\lambda_1^2\sigma_1^2 - n^2),$$

kann unter den oben gemachten Voraussetzungen ($\lambda_1 \gtrless \lambda_2$) nicht verschwinden. Die Bedingung für das Verschwinden dieses Koeffizienten stimmt nämlich, wenn man die Gleichung für λ_1 und die Formel für σ_1 berücksichtigt, mit der Bedingung dafür überein, daß die quadratische Gleichung für λ^2 zwei gleiche Wurzeln besitzt.

§ 5.

Wir geben einige Ergänzungen zu §§ 2—4 des Aufsatzes „Beiträge zur Theorie der kleinen Schwingungen“ im 48. Bd. dieser Zeitschrift.

Es handelt sich um ein Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha(x_1, \ldots x_n), \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

wo

$$X_\alpha = a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n + \cdots$$

eine Potenzreihe von $x_1, \ldots x_n$ darstellt, welche für $x_1 = \cdots = x_n = 0$ verschwindet. Die charakteristische Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} - s, & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & , \ldots & a_{nn} - s \end{vmatrix}.$$

soll für $s = 0$ nicht verschwinden. Es sei ein Integral

$$\Phi(x_1, \ldots x_n) = \text{Const.}$$

vorhanden, wo Φ eine Potenzreihe von $x_1, \ldots x_n$ darstellt.

Dann fehlen in $\Phi(x_1, \ldots x_n)$ die linearen Glieder.

Um dies zu zeigen, bringen wir unser Differentialgleichungssystem durch lineare Transformation der abhängigen Veränderlichen auf die kanonische Form, in welcher einem p-fachen Elementarteiler $(s - a)^p$[1] der charakteristischen Determinante die p Differentialgleichungen

$$\frac{dx'}{dt} = ax' + \cdots,$$
$$\frac{dx''}{dt} = ax'' + x' + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx^{(p)}}{dt} = ax^{(p)} + x^{(p-1)} + \cdots$$

entsprechen. Es sei

$$\Phi = A'x' + A''x'' + \cdots + A^{(p)}x^{(p)} + \cdots.$$

In der Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} = 0,$$

welche aussagt, daß $\Phi = \text{Const.}$ ein Integral ist, müssen sich die linearen Glieder fortheben, es muß also

$$A'ax' + A''(ax'' + x') + \cdots + A^{(p)}(ax^{(p)} + x^{(p-1)}) + \cdots = 0$$

sein. Daraus folgt

$$A' = 0, \quad A'' = 0, \quad \ldots A^{(p)} = 0,$$

w. z. b. w.

Da sich in der obigen Gleichung auch die quadratischen Glieder fortheben müssen, so hat man, wenn man

$$\Phi = A_{11}x_1^2 + 2A_{12}x_1x_2 + A_{22}x_2^2 + \cdots$$

setzt und annimmt, daß die beiden ersten Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + \cdots,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 + \cdots$$

1) Hierbei ist a reell oder komplex, $p \geqq 1$.

des kanonischen Systems einfachen Wurzeln $s = a_1$ und $s = a_2$ der charakteristischen Gleichung entsprechen:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 x_1 (A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \cdots) + a_2 x_2 (A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + \cdots) + \cdots \\ &= A_{11} a_1 x_1^2 + A_{12}(a_1 + a_2) x_1 x_2 + A_{22} a_2 x_2^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Da a_1 und a_2 von Null verschieden sein sollen, so muß $A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$ sein; A_{12} kann nur dann von Null verschieden sein, wenn $a_1 + a_2 = 0$ ist.

Sind $a_1 = \varkappa + \lambda i$, $a_2 = \varkappa - \lambda i$ konjugiert komplex, und setzt man

$$x_1 = \frac{\xi_1 - i\xi_2}{2}, \quad x_2 = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{2},$$

so wird

$$\Phi = \tfrac{1}{2} A_{12} (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \cdots,$$

und man hat die beiden ersten Differentialgleichungen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varkappa\xi_1 + \lambda\xi_2 + \cdots,$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\lambda\xi_1 + \varkappa\xi_2 + \cdots .$$

Soll Φ wirklich ein Glied mit ξ_1^2 enthalten, so muß der reelle Teil $\varkappa$ der beiden konjugierten Wurzeln a_1, a_2 verschwinden.

Wir ändern den Satz in § 4 der Arbeit Bd. 48 (S. 418) über die periodischen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \cdots,$$

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = a_{\alpha 3} x_3 + \cdots + a_{\alpha n} x_n + \cdots, \qquad (\alpha = 3, \ldots n)$$

welches die früheren Bedingungen erfüllt, etwas ab.

Eine Lösung $x_{\alpha (\alpha = 1, \cdots n)}$ mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x_1 = c_1, \quad \ldots x_n = c_n$$

besitze die Periode $T = 2\pi + \delta$. Nach Bd. 48, S. 410 liefern die Bedingungen

$$x_3(2\pi + \delta) - c_3 = 0, \quad \ldots x_n(2\pi + \delta) - c_n = 0$$

$c_3, \ldots c_n$ als Potenzreihen von c_1, c_2, welche mit quadratischen Gliedern beginnen und Potenzreihen von δ zu Koeffizienten haben. Die Funktion x_2 verschwinde zum erstenmal für $t = t_0$, zum zweitenmal für $t = \bar{t}_0$; es sei $x_1 = c$ für $t = t_0$ und $x_1 = \bar{c}$ für $t = \bar{t}_0$. Die in der früheren

Arbeit aufgestellten Formeln sind hier anwendbar, wenn man das dortige t durch $t - t_0$ ersetzt.

Es ist

$$\delta = \varepsilon_2 c^2 + \varepsilon_3 c^3 + \cdots = \varepsilon_2 \bar{c}^2 + \varepsilon_3 \bar{c}^3 + \cdots$$
$$= \varepsilon_2 \frac{c^2 + \bar{c}^2}{2} + \varepsilon_3 \frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} + \cdots.$$

Für $t = t_0$ hat man $x_3 = \mathfrak{q}_3(c), \ldots x_n = \mathfrak{q}_n(c)$ als Potenzreihen von c mit Gliedern mindestens zweiten Grades. Auf Grund der Integralgleichung $\Phi(x_1, \ldots x_n) = \text{Const.}$ setzen wir die Werte von Φ für $t = 0$ und $t = t_0$ einander gleich, wobei wir $\Phi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots$ annehmen. Wir erhalten

$$\Phi(c_1, \ldots c_n) = \Phi(c, 0, \mathfrak{q}_3(c), \ldots \mathfrak{q}_n(c)) = c^2 + \mathfrak{a}_1 c^3 + \mathfrak{a}_2 c^4 + \cdots;$$

hieraus folgt

$$c = \sqrt{\Phi(c_1, \ldots c_n)} + \mathfrak{b}_1 \Phi(c_1, \ldots c_n) + \mathfrak{b}_2 \sqrt{\Phi(c_1, \ldots c_n)}^3 + \cdots$$
$$= \mathfrak{b}_1 \Phi(c_1, \ldots c_n) + \cdots + \sqrt{\Phi(c_1, \ldots c_n)}(1 + \mathfrak{b}_2 \Phi(c_1, \ldots c_n) + \cdots).$$

Durch eine Vorzeichenänderung der Quadratwurzel geht c in $\bar{c}$ über. Man hat also

$$\left.\begin{matrix} c \\ \bar{c} \end{matrix}\right\} = A(c_1, \ldots c_n) \pm \sqrt{R(c_1, \ldots c_n)},$$

wo A und R Potenzreihen von $c_1, \ldots c_n$ sind, welche mit quadratischen Gliedern beginnen. Es sind also

$$\frac{c^2 + \bar{c}^2}{2} = A^2 + R,$$
$$\frac{c^3 + \bar{c}^3}{2} = A^3 + 3AR$$

usw. Potenzreihen von $c_1, \ldots c_n$. Demnach ist auch δ eine Potenzreihe von $c_1, \ldots c_n$, in welcher die Glieder von geringerer als der zweiten Dimension fehlen. Setzt man hierin für $c_3, \ldots c_n$ die oben gefundenen Potenzreihen von c_1, c_2, δ, so wird δ eine Potenzreihe von c_1, c_2 mit Gliedern mindestens zweiter Dimension, deren Koeffizienten Potenzreihen von δ sind. Hieraus berechnet man $\delta = T - 2\pi$ *als Potenzreihe von* c_1, c_2, *welche mit quadratischen Gliedern beginnt.* Unter Benutzung des gefundenen δ erscheinen $c_3 = \mathfrak{p}_3(c_1, c_2), \ldots c_n = \mathfrak{p}_n(c_1, c_2)$ als Potenzreihen von c_1, c_2 ohne Glieder geringeren als zweiten Grades.

Es ist noch zu zeigen, daß wir wirklich eine periodische Lösung erhalten, wenn wir c_1, c_2 hinreichend klein, aber sonst beliebig annehmen. Nach Bd. 48, S. 415 ist

$$x_\alpha = c\psi_{\alpha 1}(u) + c^2\psi_{\alpha 2}(u) + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

wo

$$\psi_{11} = \cos u, \quad \psi_{21} = -\sin u, \quad \psi_{31} = 0, \ldots \psi_{n1} = 0$$

und

$$u = \frac{2\pi(t - t_0)}{T} = \frac{2\pi t}{T} - \vartheta$$

ist, eine periodische Lösung, welche die Bedingungen

$$t = t_0, \quad x_1 = c, \quad x_2 = 0$$

erfüllt. Sollen

$$t = 0, \quad x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2$$

zusammengehörige Werte sein, so ist

$$c_1 = c\cos\vartheta + c^2\psi_{12}(-\vartheta) + \cdots,$$
$$c_2 = c\sin\vartheta + c^2\psi_{22}(-\vartheta) + \cdots.$$

Jedem Paar hinreichend kleiner (nicht gleichzeitig verschwindender) Werte c_1, c_2 entspricht ein positiver Wert von c und ein Wert von ϑ zwischen 0 und 2π oder, was dasselbe ist, ein Wert t_0 zwischen 0 und T. Also ist eine (und nach dem Obigen nur eine) periodische Lösung vorhanden, welche die Bedingungen $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ für $t = 0$ erfüllt. Wir berechnen sie direkt aus dem Differentialgleichungssystem.

Unter Einführung der unabhängigen Veränderlichen

$$w = \frac{2\pi t}{T}$$

gehen unsere Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = X_\alpha(x_1, \ldots x_n) \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

über in

$$\frac{2\pi}{T}\frac{dx}{dw} = X_\alpha(x_1, \ldots x_n). \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

Die durch die Anfangsbedingungen

$$w = 0,\ x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ x_3 = \mathfrak{p}_3(c_1, c_2), \ldots x_n = \mathfrak{p}_n(c_1, c_2)$$

bestimmten periodischen Funktionen $x_1, \ldots x_n$ mit der Periode 2π lassen sich in Potenzreihen von c_1, c_2 entwickeln, deren Koeffizienten periodische Funktionen von w mit der Periode 2π sind. *Man hat*

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(\nu)} + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots n),$$

wo

$$x_1^{(1)} = c_1\cos w + c_2\sin w,$$
$$x_2^{(1)} = -c_1\sin w + c_2\cos w,$$
$$x_3^{(1)} = 0, \ldots, x_n^{(1)} = 0$$

und $x_\alpha^{(\nu)}$ *eine ganze homogene Funktion* ν*ter Dimension von* c_1, c_2 *und eine lineare Funktion von* $\cos\mu w$, $\sin\mu w\,(\mu = 0, 1, \ldots \nu)$ *ist.*

Zur direkten Berechung der $x_\alpha^{(\nu)}$ und der Periode T aus den Differentialgleichungen verfährt man ähnlich wie in Bd. 48, S. 415—418.

Haben die beiden ersten Differentialgleichungen des Systems die Form

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_1 + \cdots,$$

wo λ reell positiv ist, so gelangt man zu dem bisher betrachteten Falle zurück, wenn man λt als unabhängige Veränderliche einführt. Die direkte Behandlung ohne Transformation von t ist eben so einfach. Jetzt ist $T - \frac{2\pi}{\lambda}$ eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von c_1, c_2.

§ 6.

Die Differentialgleichungen, auf welche wir durch die in §§ 1—4 gestellten dynamischen Aufgaben geführt wurden, sind in folgender Form enthalten:

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \lambda x_2 + F_1(x_1, \ldots x_n),\\
\frac{dx_2}{dt} &= -\lambda x_1 + F_2(x_1, \ldots x_n),\\
\frac{dx_3}{dt} &= a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m + F_3(x_1, \ldots x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_m}{dt} &= a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mm}x_m + F_m(x_1, \cdots x_m),\\
\frac{dx_{m+1}}{dt} &= \qquad F_{m+1}(x_1, \ldots x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n}{dt} &= \qquad F_n(x_1, \ldots x_n).
\end{aligned}$$

Die Gleichung $(m-2)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{33} - s, & \ldots & a_{3m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m3}, & \ldots & a_{mm} - s \end{vmatrix} = 0$$

soll keine Wurzel $\pm ik\lambda$ (k ganze Zahl), keine mehrfache und keine verschwindende Wurzel besitzen. Die charakteristische Gleichung $n$ten

Grades unseres Differentialgleichungssystems hat dann neben den beiden Wurzeln $\pm i\lambda$ keine Wurzel $\pm ik\lambda$ (k ganze Zahl) und nur die $\mu = n - m$ Wurzeln $s = 0$, welchen μ einfache Elementarteiler der charakteristischen Determinante entsprechen; alle Wurzeln außer diesen verschwindenden sind einfach. $F_1, \ldots F_n$ sind Potenzreihen von $x_1, \ldots x_n$ ohne Glieder von geringerer als der zweiten Dimension.[1]) Es seien die $\mu + 1 = n - m + 1$ Integrale

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} &\Phi(x_1, \ldots x_n) = C, \\ &x_{m+1} + \Psi_1(x_1, \ldots x_n) = D_1, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &x_n + \Psi_\mu(x_1, \ldots x_n) = D_\mu \end{aligned}$$

vorhanden, wo $C, D_1, \ldots D_\mu$ willkürliche Konstante sind und $\Phi, \Psi_1 \ldots \Psi_\mu$ Potenzreihen von $x_1, \ldots x_n$, welche kein Glied von geringerer als der zweiten Dimension enthalten; in Φ soll das Glied mit x_1^2 nicht fehlen.

Wir führen das Differentialgleichungssystem (A) *mit den Integralen* (B) *auf das in Bd. 48, S. 405 ff. behandelte zurück.*

Aus den μ letzten Integralgleichungen berechnet man

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= D_1 + \mathfrak{p}_1(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= D_\mu + \mathfrak{p}_\mu(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_\mu$ Potenzreihen der beigefügten Argumente mit Gliedern zweiter und höherer Dimension sind. Unsere m ersten Differentialgleichungen werden

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda x_2 + G_1(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\lambda x_1 + G_2(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m + G_3(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mm}x_m + G_m(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu), \end{aligned}$$

und die Integralgleichung $\Phi = C$ geht über in

$$\Psi(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu) = C.$$

Dabei sind $G_1, \ldots G_m$ und Ψ Potenzreihen von $x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu$ mit Gliedern mindestens zweiten Grades; in Ψ kommt x_1^2 wirklich vor.

---

1) Wir können auch die 3te, ... $m$te Differentialgleichung auf die kanonische Form gebracht denken.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda K_2 + G_1(K_1, \dots K_m, D_1, \dots D_\mu),\\
0 &= -\lambda K_1 + G_2(K_1, \dots K_m, D_1, \dots D_\mu),\\
0 &= a_{\alpha 3} K_3 + \cdots + a_{\alpha m} K_m + G_\alpha(K_1, \dots K_m, D_1, \dots D_\mu)\\
&\qquad (\alpha = 3, \dots m)
\end{aligned}$$

berechnet man $K_1, \dots K_m$ [1]) als Potenzreihen von $D_1, \dots D_\mu$, welche mit Gliedern zweiter Dimension beginnen. Setzt man nun

$$x_1 = K_1 + X_1, \dots X_m = K_m + X_m,$$

so gehen die Differentialgleichungen über in

$$\begin{aligned}
\frac{dX_1}{dt} &= \lambda X_2 + g_{11} X_1 + \cdots + g_{1m} X_m + H_1(X_1, \dots X_m),\\
\frac{dX_2}{dt} &= -\lambda X_1 + g_{21} X_1 + \cdots + g_{2m} X_m + H_2(X_1, \dots X_m),\\
\frac{dX_\alpha}{dt} &= a_{\alpha 3} X_3 + \cdots + a_{\alpha m} X_m + g_{\alpha 1} X_1 + \cdots + g_{\alpha m} X_m + H_\alpha(X_1, \dots X_m)\\
&\qquad (\alpha = 3, \dots m)
\end{aligned}$$

und die Integralgleichung $\Psi = C$ in

$$H(X_1, \dots X_m) = C.$$

Dabei ist

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(D_1, \dots D_\mu) = \frac{\partial G_\alpha(K_1, \dots K_m, D_1, \dots D_\mu)}{\partial K_\beta}$$

eine Potenzreihe von $D_1, \dots D_\mu$, welche für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ verschwindet; $H_1, \dots H_m$ sind Potenzreihen von $X_1, \dots X_m$ mit Gliedern zweiter und höherer Dimension, welche Potenzreihen von $D_1, \dots D_\mu$ zu Koeffizienten haben. Nach dem am Anfang von § 5 bewiesenen Satze fehlen in H die in $X_1, \dots X_m$ linearen Glieder; H ist also eine Potenzreihe von $X_1, \dots X_m$ mit Gliedern mindestens zweiten Grades (X_1^2 tritt wirklich auf), deren Koeffizienten Potenzreihen von $D_1, \dots D_\mu$ sind.

Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix}
g_{11} - S, & \lambda + g_{12}, & g_{13}, & \dots, & g_{1m}\\
-\lambda + g_{21}, & g_{22} - S, & g_{23}, & \dots, & g_{2m}\\
g_{31}, & g_{32}, & a_{33} + g_{33} - S, & \dots, & a_{3m} + g_{3m}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
g_{m1}, & g_{m2}, & a_{m3} + g_{m3}\cdot & \dots, & a_{mm} + g_{mm} - S
\end{vmatrix} = 0$$

1) Nach den oben gemachten Voraussetzungen ist

$$\begin{vmatrix}
a_{33} & \dots & a_{3m}\\
\cdot & \cdot & \cdot\\
a_{m3} & \dots & a_{mm}
\end{vmatrix}$$

von Null verschieden.

hat m in Potenzreihen von $D_1, \ldots D_\mu$ entwickelbare einfache reelle oder paarweise konjugiert komplexe Wurzeln $S_1, \ldots S_m$, welche sich für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ auf die m Wurzeln der Gleichung

$$(s^2 + \lambda^2) \begin{vmatrix} a_{33} - s, & \ldots & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m3}, & \ldots & a_{mm} - s \end{vmatrix} = 0$$

reduzieren. Durch eine reelle lineare Substitution

$$X_\alpha = h_{\alpha 1} \xi_1 + \cdots + h_{\alpha m} \xi_m, \qquad (\alpha = 1, \ldots m)$$

deren Koeffizienten $h_{\alpha\beta}$ Potenzreihen von $D_1, \ldots D_\mu$ sind, erhalten unsere Differentialgleichungen, wenn

$$S_1 = K + i\Lambda, \quad S_2 = K - i\Lambda$$

gesetzt wird, die Form[1])

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= K\xi_1 + \Lambda\xi_2 + \cdots, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -\Lambda\xi_1 + K\xi_2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Ist $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$, so ist $K = 0$, $\Lambda = \lambda$, und diese Form ist von vornherein vorhanden; für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ ist also $X_\alpha = \xi_\alpha$ und demnach $h_{\alpha\alpha} = 1$, $h_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \gtrless \beta)$. Die Integralgleichung $H = C$ geht durch die obige Transformation in

$$\Omega(\xi_1, \ldots \xi_m) = C$$

über, wo Ω eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von $\xi_1, \ldots \xi_m$ ist, deren Koeffizienten Potenzreihen von $D_1, \ldots D_\mu$ sind. Da das Glied mit ξ_1^2 in Ω nicht verschwindet, so muß nach dem zweiten in § 5 bewiesenen Satze K für alle Werte von $D_1, \ldots D_\mu$ verschwinden. Die beiden ersten Differentialgleichungen sind demnach

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \Lambda\xi_2 + \cdots, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -\Lambda\xi_1 + \cdots. \end{aligned}$$

Wir haben also Differentialgleichungen von derselben Form wie in der früheren Arbeit; nur sind die Koeffizienten, welche früher gegebene Werte hatten, jetzt Potenzreihen von $D_1, \ldots D_\mu$.

---

1) Bd. 48, S. 406.

§ 7.

Das Differentialgleichungssystem mit den abhängigen Veränderlichen $\xi_1, \ldots \xi_n$ besitzt nach § 5 eine periodische Lösung mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\Lambda} + T_2 + T_3 + \cdots,$$

wo T_ν eine ganze homogene Funktion νten Grades von γ_1, γ_2 und eine Potenzreihe von $D_1, \ldots D_\mu$ ist; dabei soll $\xi_1 = \gamma_1$, $\xi_2 = \gamma_2$ für $t = 0$ sein. Wenn

$$w = \frac{2\pi t}{T}$$

gesetzt wird, hat diese Lösung die Form

$$\xi_\alpha = (\xi_\alpha)_1 + (\xi_\alpha)_2 + \cdots + (\xi_\alpha)_\nu + \cdots; \qquad (\alpha = 1, \ldots m)$$

es ist

$$(\xi_1)_1 = \gamma_1 \cos w + \gamma_2 \sin w,$$
$$(\xi_2)_1 = -\gamma_1 \sin w + \gamma_2 \cos w,$$
$$(\xi_3)_1 = 0, \ \ldots, \ (\xi_m)_1 = 0;$$

$(\xi_\alpha)_\nu$ ist eine ganze homogene Funktion νter Dimension von γ_1, γ_2, eine Potenzreihe von $D_1, \ldots D_\mu$ und eine lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots \nu)$.

Wegen

$$x_\alpha = K_\alpha + h_{\alpha 1} \xi_1 + \cdots + h_{\alpha m} \xi_m \qquad (\alpha = 1, \ldots m)$$

wird

$$x_\alpha = K_\alpha + (x_\alpha)_1 + (x_\alpha)_2 + \cdots + (x_\alpha)_\nu + \cdots,$$

wo $(x_\alpha)_\nu$ ein Ausdruck von derselben Form ist wie oben $(\xi_\alpha)_\nu$. Insbesondere ist

$$(x_\alpha)_1 = h_{\alpha 1} (\xi_1)_1 + h_{\alpha 2} (\xi_2)_1$$

oder, da sich h_{11}, h_{22} für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ auf 1, die übrigen $h_{\alpha 1}, h_{\alpha 2}$ auf Null reduzieren,

$$(x_1)_1 = \gamma_1 \cos w + \gamma_2 \sin w + \cdots,$$
$$(x_2)_1 = -\gamma_1 \sin w + \gamma_2 \cos w + \cdots,$$
$$(x_3)_1 = \cdots, \ \ldots, \ (x_m)_1 = \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder in γ_1, γ_2 linear homogen sind und für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$ verschwinden.

Aus

$$x_{m+\beta} = D_\beta + \mathfrak{p}_\beta(x_1, \ldots x_m, D_1, \ldots D_\mu) \qquad (\beta = 1, \ldots \mu)$$

folgt

$$x_{m+\beta} = D_\beta + K_{m+\beta} + (x_{m+\beta})_1 + \cdots + (x_{m+\beta})_\nu + \cdots; \qquad (\beta = 1, \ldots \mu)$$

$K_{m+\beta}$ ist eine mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihe von $D_1, \ldots D_\mu$ und $(x_{m+\beta})_\nu$ ein Ausdruck von derselben Form wie oben $(x_\alpha)_\nu$; $(x_{m+\beta})_1$ verschwindet für $D_1 = \cdots = D_\mu = 0$.

Wir können auch schreiben:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \gamma_1 \cos w + \gamma_2 \sin w + \cdots, \\
x_2 &= -\gamma_1 \sin w + \gamma_2 \cos w + \cdots, \\
x_3 &= \cdots, \quad \cdots, \quad x_m = \cdots, \\
x_{m+1} &= D_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad x_n = D_\mu + \cdots,
\end{aligned}$$

wo die nicht angeschriebenen Reihenglieder mindestens die zweite Dimension in bezug auf die Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, D_1, \ldots D_\mu$ besitzen. Man kann diese Konstanten so bestimmen, daß für $t = 0$

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_{m+1} = c_{m+1}, \quad \ldots \quad x_n = c_n$$

wird. Dann ist nämlich

$$c_1 = \gamma_1 + \cdots, \quad c_2 = \gamma_2 + \cdots, \quad c_{m+1} = D_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad c_n = D_u + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder mindestens von der zweiten Dimension in $\gamma_1, \gamma_2, D_1, \ldots D_u$ sind. Daraus berechnet man

$$\gamma_1 = c_1 + \cdots, \quad \gamma_2 = c_2 + \cdots, \quad D_1 = c_{m+1} + \cdots, \quad \cdots, \quad D_\mu = c_n + \cdots$$

als Potenzreihen von $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$, von welchen nur die Glieder niedrigsten Grades angeschrieben sind.[1]) Demnach lassen sich $x_1, \ldots x_n$ in Potenzreihen von $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$ umwandeln.

Wir haben

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(\nu)} + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= c_1 \cos w + c_2 \sin w, \\
x_2^{(1)} &= -c_1 \sin w + c_2 \cos w, \\
x_3^{(1)} &= 0, \quad \ldots \quad x_m^{(1)} = 0, \\
x_{m+1}^{(1)} &= c_{m+1}, \quad \ldots \quad x_n^{(1)} = c_n;
\end{aligned}$$

---

1) Soll die zu ermittelnde periodische Lösung die Bedingung

$$x_n + \Psi_\mu(x_1 \ldots x_n) = D_\mu = 0$$

erfüllen (vgl. Aufg. II und IV), so lassen sich die Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, D_1, \ldots D_{\mu-1}$ so bestimmen, daß für $t = 0$

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_{m+1} = c_{m+1}, \quad \ldots \quad x_{n-1} = c_{n-1}$$

wird. An Stelle von c_n tritt jetzt eine Potenzreihe von $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_{n-1}$, welche mit quadratischen Gliedern beginnt.

$x_\alpha^{(\nu)}$ ($\nu = 2, 3 \ldots$) *ist eine ganze homogene Funktion νter Dimension von* $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$ *und eine lineare Funktion von* $\cos p w$, $\sin p w$ ($p = 0, 1, \ldots \nu$). *Die Periode wird*

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots + T^{(\nu)} + \cdots,$$

wo $T^{(1)}$ eine lineare homogene Funktion von $c_{m+1}, \ldots c_n$ und $T^{(\nu)}$ ($\nu = 2, 3, \ldots$) eine ganze homogene Funktion νten Grades von $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$ ist.

Es können nämlich aus T_2 nur Glieder zweiter und höherer Dimension in den c hervorgehen, während

$$\frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} + \mathfrak{a}_1 D_1 + \cdots + \mathfrak{a}_\mu D_\mu + \cdots$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda} + \mathfrak{a}_1 c_{m+1} + \cdots + \mathfrak{a}_\mu c_n + \cdots$$

ist.

§ 8.

Die Reihen, deren Existenz nachgewiesen ist, sollen nun nebst der Periode T aus dem Differentialgleichungssystem (A) *am Anfang von* § 6 *direkt berechnet werden.*

Setzt man

$$w = \frac{2\pi t}{T} = (\lambda + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \cdots) t,$$

wo $\eta^{(\nu)}$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension der Integrationskonstanten ist, so schreiben sich die Differentialgleichungen

$$(\lambda + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \cdots) \frac{d x_1}{d w} = \lambda x_2 + F_1(x_1, \ldots x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \cdots) \frac{d x_n}{d w} = F_n(x_1, \ldots x_n).$$

Durch Einsetzung der Reihen

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(\nu)} + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

und Vergleichung der Glieder erster, zweiter usw. Dimension in den Integrationskonstanten c erhält man Differentialgleichungen für die $x_\alpha^{(1)}$, $x_\alpha^{(2)}$ usw. Zur Bestimmung der Konstanten beachtet man, daß für $w = 0$

$$x_1^{(1)} = c_1, \quad x_2^{(1)} = c_2, \quad x_{m+1}^{(1)} = c_{m+1}, \quad \ldots \quad x_n^{(1)} = c_n,$$
$$x_1^{(\nu)} = 0, \quad x_2^{(\nu)} = 0, \quad x_{m+1}^{(\nu)} = 0, \quad \ldots \quad x_n^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 2, \ldots)$$

sein muß und daß sämtliche $x_\alpha^{(\nu)}$ als Funktionen von w die Periode 2π besitzen müssen.[1]) Durch diese Bedingungen werden auch $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots$ bestimmt.

Zunächst hat man die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dw} = x_2^{(1)}, \quad \frac{dx_2^{(1)}}{dw} = -x_1^{(1)},$$

$$\lambda \frac{dx_\alpha^{(1)}}{dw} = a_{\alpha 3} x_3^{(1)} + \cdots + a_{\alpha m} x_m^{(1)} \qquad (\alpha = 3, \ldots m)$$

$$\frac{dx_{m+1}^{(1)}}{dw} = 0, \quad \ldots \quad \frac{dx_n^{(1)}}{dw} = 0$$

mit der Lösung

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + c_2 \sin w,$$
$$x_2^{(1)} = -c_1 \sin w + c_2 \cos w,$$
$$x_3^{(1)} = 0, \quad \ldots \quad x_m^{(1)} = 0,$$
$$x_{m+1}^{(1)} = c_{m+1}, \quad \ldots \quad x_n^{(1)} = c_n.$$

Weiter ist, wenn $F_\alpha^{(2)}(x_1, \ldots x_n)$ die Glieder zweiter Dimension in $F_\alpha(x_1, \ldots x_n)$ darstellt,

$$\frac{dx_1^{(2)}}{dw} = x_2^{(2)} - c_2 \eta^{(1)} \cos w + c_1 \eta^{(1)} \sin w + \frac{1}{\lambda} F_1^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}),$$

$$\frac{dx_2^{(2)}}{dw} = -x_1^{(1)} + c_1 \eta^{(1)} \cos w + c_2 \eta^{(1)} \sin w + \frac{1}{\lambda} F_2^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}),$$

$$\lambda \frac{dx_\alpha^{(2)}}{dw} = a_{\alpha 3} x_3^{(2)} + \cdots + a_{\alpha m} x_m^{(2)} + F_\alpha^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})$$
$$(\alpha = 3, \ldots m),$$

$$\lambda \frac{dx_{m+1}^{(2)}}{dw} = F_{m+1}^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda \frac{dx_n^{(2)}}{dw} = F_n^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}).$$

---

1) Ist die Bedingung

$$D_\mu = x_n + \Psi_\mu(x_1, \ldots x_n) = 0$$

vorgeschrieben, so bleiben nur die Integrationskonstanten $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_{n-1}$ bestehen. Die Bedingungen $x_n^{(1)} = c_n$, $x_n^{(2)} = 0, \ldots$ für $w = 0$ sind zu ersetzen durch die folgenden:

$$x_n^{(1)} = 0, \quad x_n^{(2)} = -\Psi_\mu^{(2)}(c_1, c_2, 0, \ldots 0, c_{m+1}, \ldots c_{n-1}, 0), \ldots$$

für $w = 0$. Dabei ist $\Psi_\mu^{(2)}$ die Summe der in Ψ_μ enthaltenen quadratischen Glieder. — Übrigens könnte man von vornherein x_n vermittels der obigen Bedingung eliminieren.

Die Ausdrücke $F_\alpha^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})$ $(\alpha = 1, \ldots n)$ sind homogene quadratische Funktionen von $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$; $c_1^2, c_1 c_2, c_2^2$ haben als Koeffizienten lineare Funktionen von $\cos 2w$, $\sin 2w$ und $c_1 c_m, c_2 c_m, \ldots, c_1 c_n, c_2 c_n$ lineare homogene Funktionen von $\cos w$, $\sin w$, während c_{m+1}^2, $c_{m+1} c_n, \ldots c_n^2$ mit konstanten Koeffizienten multipliziert sind.

Damit sich aus den beiden ersten Differentialgleichungen $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ als periodische Funktionen von w ergeben, muß der Koeffizient von $\cos w$ in der ersten dem Koeffizienten von $\sin w$ in der zweiten Differentialgleichung gleich, ferner muß der Koeffizient von $\sin w$ in der ersten dem Koeffizienten von $\cos w$ in der zweiten Differentialgleichung entgegengesetzt gleich sein.[1]) So erhält man zwei Bedingungen

$$2 c_2 \eta^{(1)} = \cdots, \quad 2 c_1 \eta^{(1)} = \cdots,$$

deren rechte Seiten lineare homogene Funktionen von $c_1 c_\gamma$, $c_2 c_\gamma$ $(\gamma = m+1, \ldots n)$ sind. Damit sich hieraus $\eta^{(1)}$ als lineare Funktion der c ergibt, muß die rechte Seite der ersten Bedingung durch c_2, die rechte Seite der zweiten durch c_1 teilbar sein, und man erhält $\eta^{(1)}$ als lineare homogene Funktion von $c_{m+1}, \ldots c_n$. Aus den beiden ersten Differentialgleichungen ergeben sich nun $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ als lineare Funktionen von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, 2)$; die Koeffizienten von $\cos w$, $\sin w$ folgen aus der Bedingung $x_1^{(2)} = 0$, $x_2^{(2)} = 0$ für $w = 0$.

Aus den $m - 2$ folgenden Differentialgleichungen berechnet man $x_3^{(2)}, \ldots x_m^{(2)}$ als partikuläre Lösungen mit Benutzung der Bedingung, daß sie die Periode 2π besitzen müssen. Damit $x_{m+\beta}^{(2)}$ $(\beta = 1, \ldots \mu)$ periodisch sein kann, muß in der Entwicklung von $F_{m+\beta}^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})$

1) Durch Einsetzung der Ausdrücke

$$x_1 = a_1 \cos w + b_1 \sin w + \cdots,$$
$$x_2 = a_2 \cos w + b_2 \sin w + \cdots$$

in die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dw} = x_2 + \mathfrak{a}_1 \cos w + \mathfrak{b}_1 \sin w + \cdots,$$
$$\frac{dx_2}{dw} = -x_1 + \mathfrak{a}_2 \cos w + \mathfrak{b}_2 \sin w + \cdots$$

und Vergleichung der Koeffizienten von $\cos w$, $\sin w$ erhält man die Gleichungen

$$b_1 - a_2 = \mathfrak{a}_1, \quad a_1 + b_2 = -\mathfrak{b}_1,$$
$$a_1 + b_2 = \mathfrak{a}_2, \quad b_1 - a_2 = \mathfrak{b}_1,$$

welche nur bestehen können, wenn

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_2, \quad \mathfrak{b}_1 = -\mathfrak{a}_2$$

ist.

als lineare Funktion von $\cos w$, $\sin w$, $\cos 2w$, $\sin 2w$ das konstante Glied von selbst fortfallen; dann erscheint

$$x_{m+\beta}^{(2)} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^w F_{m+\beta}^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})\,dw$$

als lineare Funktion von $\cos w$, $\sin w$, $\cos 2w$, $\sin 2w$.[1])

So fortfahrend findet man $\eta^{(2)}$, $x_1^{(3)}$, ... $x_n^{(3)}$ usw.

Durch Umstellung *erscheint* x_α *als* *Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten Potenzreihen von* $c_1, c_2, c_{m+1}, \ldots c_n$ *sind:*

$$x_\alpha = A_0^{(\alpha)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^{(\alpha)} \cos \nu w + \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu^{(\alpha)} \sin \nu w; \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

$A_\nu^{(\alpha)}$, $B_\nu^{(\alpha)}$ $(\nu = 2, 3 \ldots)$ beginnen mit Gliedern νter Dimension in den c, $A_0^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \ldots m)$ und $A_1^{(\alpha)}$, $B_1^{(\alpha)}$ $(\alpha = 3, \ldots n)$ mit Gliedern zweiter Dimension; ferner ist

$$A_1^{(1)} = c_1 + \cdots, \quad B_1^{(1)} = c_2 + \cdots; \quad A_1^{(2)} = c_2 + \cdots, \quad B_1^{(2)} = -c_1 + \cdots;$$
$$A_0^{(m+1)} = c_{m+1} + \cdots, \quad \cdots, \quad A_0^{(n)} = c_n + \cdots,$$

wo die nicht angeschriebenen Glieder mindestens die zweite Dimension haben.

§ 9.

Aufgabe I (vgl. § 1). Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_2 + \cdots, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\lambda x_1 + \cdots, \quad \frac{dx_3}{dt} = + \cdots$$

mit den Integralen

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x_3^2 + \cdots = C,$$
$$x_3 + \cdots = D$$

besitzen unter den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_3 = c_3$$

die periodische Lösung

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \cdots + x_\alpha^{(\nu)} + \cdots; \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

---

1) Ist die Bedingung $D_\mu = 0$ vorgeschrieben, so ist

$$x_n^{(2)} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^w F_n^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots)\,dw - \Psi_\mu^{(2)}(c_1, \ldots)$$

oder

$$x_n^{(2)} = -\Psi_\mu^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots).$$

hierin ist $x_\alpha^{(\nu)}$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension von c_1, c_2, c_3 und eine lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots \nu)$ und insbesondere

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + c_2 \sin w,$$
$$x_2^{(1)} = - c_1 \sin w + c_2 \cos w,$$
$$x_3^{(1)} = c_3;$$

die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots,$$

wo $T^{(1)} = 2\pi a c_3$ und $T^{(\nu)}$ eine homogene Funktion νter Dimension von c_1, c_2, c_3 ist; es ist

$$w = \frac{2\pi t}{T}.$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen R, R', Φ' und x_1, x_2, x_3 drücken wir c_1, c_2, c_3 durch die Werte R_0, R_0', Φ_0' aus, welche R, R', Φ' für $t = 0$ annehmen:

$$c_1 = -\frac{\alpha R_0 + \beta \Phi_0'}{\lambda^2}, \quad c_2 = \frac{R_0'}{\lambda}, \quad c_3 = -\frac{\gamma R_0 - \Phi_0'}{\lambda^2}.$$

Dann ist

$$R = \sum_{\nu=1}^{\infty} (R)_\nu, \quad R' = \sum_{\nu=1}^{\infty} (R')_\nu, \quad \Phi' = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Phi')_\nu,$$

wo $(R)_\nu$, $(R')_\nu$, $(\Phi')_\nu$ ganze homogene Funktionen νter Dimension von R_0, R_0', Φ_0' und lineare Funktionen von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots \nu)$ sind. Insbesondere hat man

$$(R)_1 = -\frac{\alpha R_0 + \beta \Phi_0'}{\lambda^2} \cos w + \frac{R_0'}{\lambda} \sin w + \frac{\beta(\Phi_0' - \gamma R_0)}{\lambda^2},$$
$$(R')_1 = R_0' \cos w + \frac{\alpha R_0 + \beta \Phi_0'}{\lambda} \sin w,$$
$$(\Phi')_1 = -\frac{\gamma(\alpha R_0 + \beta \Phi_0')}{\lambda^2} \cos w + \frac{\gamma R_0'}{\lambda} \sin w + \frac{\alpha(\gamma R_0 - \Phi_0')}{\lambda^2}.$$

Die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots,$$

wo $T^{(\nu)}$ von der νten Dimension in R_0, R_0', Φ_0' und insbesondere

$$T^{(1)} = \frac{2\pi a(\gamma R_0 - \Phi_0')}{\lambda^2}$$

ist.[1])

Weiter hat man

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{T}{2\pi}(\eta_0 + \Phi') = \frac{\eta_0}{\lambda} + \left(\frac{\eta_0 a}{\lambda^2} + \frac{\alpha}{\lambda^3}\right)(\gamma R_0 - \Phi_0')$$
$$- \frac{\gamma(\alpha R_0 + \beta \Phi_0')}{\lambda^3} \cos w + \frac{\gamma R_0'}{\lambda^2} \sin w + \cdots.$$

1) Der konstante Faktor a kann nach § 8 berechnet werden.

Der Mittelwert dieser periodischen Funktion (die Summe der von cos und sin freien Reihenglieder),

$$\Omega = \frac{\eta_0}{\lambda} + \left(\frac{\eta_0 a}{\lambda^2} + \frac{\alpha}{\lambda^3}\right)(\gamma R_0' - \Phi_0') + \cdots,$$

ist eine Potenzreihe von R_0, R_0', Φ_0'.[1]) Indem man

$$\frac{d\varphi}{dw} - \Omega$$

so integriert, daß $\varphi = \varphi_0$ für $t = 0$ wird, erhält man

$$\varphi - \varphi_0 = \Omega w + (\Phi)_1 + \cdots + (\Phi)_\nu + \cdots,$$

wo

$$(\Phi)_1 = \frac{\gamma R_0'}{\lambda^2} - \frac{\gamma R_0'}{\lambda^2}\cos w - \frac{\gamma(\alpha R_0 + \beta \Phi_0')}{\lambda^3}\sin w$$

und $(\Phi)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension von R_0, R_0', Φ_0' und lineare Funktion von $\cos pw$, $\sin pw$ $(p = 0, 1, \ldots \nu)$ ist.

Wir wählen jetzt den Anfangspunkt der Zeit t so, daß für $t = 0$ $R' = 0$ wird. Die in § 1 aufgestellten Differentialgleichungen mit der unabhängigen Veränderlichen t und den abhängigen Veränderlichen R, R', Φ' bleiben ungeändert, wenn man t durch $-t$ und R, R', Φ' durch R, $-R'$, Φ' ersetzt. Dabei bleiben die Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad R = R_0, \quad R' = 0, \quad \Phi' = \Phi_0'$$

ungeändert. Die so festgelegten Funktionen R, Φ' bleiben also bei einer Zeichenänderung von t ungeändert, während R' das Zeichen ändert. Auf Grund des Zusammenhanges zwischen x_1, x_2, x_3 und R, R', Φ' sind unter den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x_1 = c_1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = c_3$$

x_1, x_3 gerade Funktionen von t oder von $w = \frac{2\pi t}{T}$, während x_2 eine ungerade Funktion von t ist. Die Fourierschen Reihen für R, Φ' und x_1, x_3 enthalten also nur Kosinusglieder, diejenigen für R' und x_2 nur Sinusglieder. Demnach verschwindet R' für $w = 0, \pi, \ldots$ oder für $t = 0, \frac{T}{2}, \ldots$; diesen Werten von t entsprechen die Maxima und Minima von R.

---

1) Das Anfangsglied von Ω ist $\frac{\eta_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{f'(r_0)\cdot(1 + f'^2(r_0))}{r_0 f''(r_0) + 3f'(r_0)}}$.

§ 10.

Aufgabe II (vgl. § 2). Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 y_1 + \cdots, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda_1 x_1 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 y_2 + \cdots, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\lambda_2 x_2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \quad + \cdots, \quad \frac{dy_3}{dt} = \quad + \cdots$$

mit den Integralen

$$\Phi = \text{Const.}, \quad x_3 + \Psi_1 = D_1, \quad y_3 + \Psi_2 = D_2 = 0$$

besitzen, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ keine ganze Zahl ist, eine periodische Lösung mit drei[1]) Konstanten c_1, c_1', c_3 (es sind dies die Werte von x_1, y_1, x_3 für $t = 0$), welche, wenn

$$w = \frac{2\pi t}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots$$

gesetzt wird, eine Entwicklung

$$x_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\nu} x_\alpha^{(\nu)}, \quad y_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\alpha^{(\nu)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

zuläßt, worin $x_\alpha^{(\nu)}$, $y_\alpha^{(\nu)}$ ganze homogene Funktionen νter Dimension und lineare Funktionen von $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ ($\mu = 0, 1, \ldots \nu$) sind. Insbesondere ist

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + c_1' \sin w, \quad y_1^{(1)} = -c_1 \sin w + c_1' \cos w,$$

$$x_2^{(1)} = 0, \quad y_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = c_3, \quad y_3^{(1)} = 0.$$

$T^{(\nu)}$ ist eine ganze homogene Funktion νten Grades von c_1, c_1', c_3; $T^{(1)}$ ist proportional c_3.

Wenn für $t = 0$

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0; \quad \Gamma = \Gamma_0, \quad \Gamma' = \Gamma_0', \quad \Gamma'' = \Gamma_0''$$

ist, so ergeben sich aus den Substitutionsgleichungen (§ 2)

$$p = L_1 x_1 + L_2 x_2 + \xi x_3 \quad \text{usw.},$$

$$\Gamma = L_1' y_1 + L_2' y_2 + \xi y_3 \quad \text{usw.}$$

c_1, c_1, c_3 als Potenzreihen von p_0, q_0, Γ_0'':

$$c_1 = \frac{\eta p_0 - \xi q_0}{l \lambda_1 N_1'} + \cdots,$$

$$c_1' = \frac{\Gamma_0''}{N_1'} + \cdots,$$

$$c_3 = \frac{L_1 q_0 - M_1 p_0}{l \lambda_1 N_1'} + \cdots,$$

---

1) Wegen $D_2 = 0$ sind die Anmerkungen zu § 7 und § 8 zu berücksichtigen.

vorausgesetzt, daß $N_1' \gtrless 0$ ist[1]); es ist ferner

$$r_0 = \frac{L_1' p_0 + M_1' q_0}{N_1'} + \cdots,$$
$$\Gamma_0 = \frac{L_1'}{N_1'} \Gamma_0'' + \cdots,$$
$$\Gamma_0' = \frac{M_1'}{N_1'} \Gamma_0'' + \cdots.$$

Man hat nun

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + (T)_1 + (T)_2 + \cdots,$$

wo $(T)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νten Grades von c_1, c_1', c_3 und insbesondere $(T)_1$ zu $L_1 q_0 - M_1 p_0$ proportional ist, und

$$p = \sum_{\nu=1}^{\infty} (p)_\nu, \quad q = \sum_{\nu=1}^{\infty} (q)_\nu, \quad r = \sum_{\nu=1}^{\infty} (r)_\nu,$$
$$\Gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Gamma)_\nu, \quad \Gamma' = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Gamma')_\nu, \quad \Gamma'' = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\Gamma'')_\nu,$$

wo $(p)_\nu, \ldots; (\Gamma)_\nu, \ldots$ ganze homogene Funktionen νten Grades von $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ $(\mu = 0, 1, \ldots \nu)$ sind. Es ist insbesondere

$$(p)_1 = L_1 c_1 \cos w + L_1 c_1' \sin w + c_3 \xi,$$
$$(q)_1 = M_1 c_1 \cos w + M_1' c_1' \sin w + c_3 \eta,$$
$$(r)_1 = N_1 c_1 \cos w + N_1' c_1' \sin w + c_3 \zeta;$$
$$(\Gamma)_1 = - L_1' c_1 \sin w + L_1' c_1' \cos w,$$
$$(\Gamma')_1 = - M_1' c_1 \sin w + M_1' c_1' \cos w,$$
$$(\Gamma'')_1 = - N_1' c_1 \sin w + M_1' c_1' \cos w,$$

wo c_1, c_1', c_3 wie oben durch p_0, q_0, Γ'' auszudrücken sind.

Wenn $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ keine ganze Zahl ist, erhält man auf ähnlichem Wege eine periodische Lösung mit drei willkürlichen Konstanten, welche eine von $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ wenig abweichende Periode besitzt.

Beiden Scharen periodischer Lösungen gemeinsam sind die von Staude[2]) nachgewiesenen Drehungen um permanente Rotationsachsen, so weit die letzteren in der Nähe von OS liegen.

Die Differentialgleichungen am Anfang von § 2 mit den abhängigen Veränderlichen $p, q, r; \gamma, \gamma', \gamma''$ werden nämlich befriedigt, wenn man

$$p = \gamma\omega, \quad q = \gamma'\omega, \quad r = \gamma''\omega$$

1) L_1', M_1', N_1' können nicht gleichzeitig verschwinden.

2) Staude, über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt (Crelles Journ. 113). Routh Bd. II, S. 163. — Lecornu, a. a. O.

setzt, wo γ, γ', γ'' und ω konstante Werte sind, welche durch die Gleichungen

$$(B-C)\xi\gamma'\gamma''\omega^2 = g(\eta\gamma''-\zeta\gamma'),$$
$$(C-A)\eta\gamma''\gamma\omega^2 = g(\zeta\gamma-\xi\gamma''),$$
$$(A-B)\zeta\gamma\gamma'\omega^2 = g(\xi\gamma'-\eta\gamma)$$

verknüpft sind, woraus

$$(B-C)\xi\gamma'\gamma''+(C-A)\eta\gamma''\gamma+(A-B)\zeta\gamma\gamma'=0$$

folgt. Es handelt sich um gleichförmige Rotationen (Winkelgeschwindigkeit ω) um lotrechte Achsen (Richtungskosinus γ, γ', γ'' in bezug auf die Hauptachsen des Körpers). Für uns kommen nur Achsen in der Nähe von OS in Betracht. Für die Achse OS ist $\omega=0$, für benachbarte, dem „Schwerpunktskegel“ angehörige Achsen ist ω klein.

Die obigen Gleichungen gehen, wenn man darin

$$\gamma=\frac{\xi}{l}+\Gamma,\quad \gamma'=\frac{\eta}{l}+\Gamma',\quad \gamma''=\frac{\zeta}{l}+\Gamma''$$

setzt, in

$$\omega^2=\frac{gl^2(\eta\Gamma''-\zeta\Gamma')}{(B-C)\eta\zeta}+\cdots=\frac{gl^2(\zeta\Gamma-\xi\Gamma'')}{(C-A)\zeta\xi}+\cdots$$

usw. über. Verbindet man damit die durch Umformung von $\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$ erhaltene Gleichung

$$\xi\Gamma+\eta\Gamma'+\zeta\Gamma''+\frac{l}{2}(\Gamma^2+\Gamma'^2+\Gamma''^2)=0,$$

so ergeben sich

$$\Gamma=\omega^2\cdot\frac{\xi((B-A)\eta^2+(C-A)\zeta^2)}{gl^4}+\cdots,$$
$$\Gamma'=\omega^2\cdot\frac{\eta((C-B)\zeta^2+(A-B)\xi^2)}{gl^4}+\cdots,$$
$$\Gamma''=\omega^2\cdot\frac{\zeta((A-C)\xi^2+(B-C)\eta^2)}{gl^4}+\cdots$$

als Potenzreihen von ω^2, und

$$p=\frac{\xi}{l}\omega+\cdots,\quad q=\frac{\eta}{l}\omega+\cdots,\quad r=\frac{\zeta}{l}\omega+\cdots$$

schreiten nach ungeraden Potenzen von ω fort.[1])

Diese Lösung mit konstanten Werten von p, q, r, Γ, Γ', Γ'' muß in der oben bestimmten periodischen Lösung mit einer von $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ wenig

---

1) Liegt der Schwerpunkt S auf einer Hauptachse von O, ist also z. B. $\xi=\eta=0$, $\zeta\gtrless 0$, so ist bei beliebigem ω $\gamma=0$, $\gamma'=0$, $\gamma''=1$, d. h. es ist eine gleichförmige Rotation mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit um die lotrechte Hauptachse OS möglich.

abweichenden Periode als Spezialfall enthalten sein.[1]) Die obige Lösung kann aber nur dann von t unabhängig sein, wenn $c_1 = 0$, $c_1' = 0$ ist. Da nun $x_1'^1 = x_2'^1 = y_1'^1 = y_2'^1 = y_3'^1 = 0$ ist, so sind

$$p = \xi c_3 + \cdots, \quad q = \eta c_3 + \cdots, \quad r = \zeta c_3 + \cdots,$$
$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = l c_3 + \cdots,$$
$$\Gamma = + \cdots, \quad \Gamma' = + \cdots, \quad \Gamma'' = + \cdots$$

Potenzreihen von c_3, welche außer den angeschriebenen Gliedern nur Glieder mindestens zweiten Grades enthalten. Stellt man hiernach

$$c_3 = \frac{\omega}{l} + \cdots$$

als Potenzreihe von ω dar, so sind auch

$$p = \frac{\xi}{l}\omega + \cdots, \quad q = \frac{\eta}{l}\omega + \cdots, \quad r = \frac{\zeta}{l}\omega + \cdots,$$

sowie Γ, Γ', Γ'' Potenzreihen von ω. Sie müssen mit den im Anschluß an Staude erhaltenen Potenzreihen von ω übereinstimmen, ihre Koeffizienten müssen also von t unabhängig sein.

Wenn man die Quadrate und Produkte kleiner Größen vernachlässigt, tritt an Stelle der Staudeschen Lösung die folgende:

$$\Gamma = 0, \quad \Gamma' = 0, \quad \Gamma'' = 0,$$
$$p = \xi c_3, \quad q = \eta c_3, \quad r = \zeta c_3,$$

welche eine Drehung um die lotrechte Achse OS mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit $\omega = l c_3$ darstellt. In § 2 ist die allgemeine Lösung der auf die linearen Glieder reduzierten Differentialgleichungen mit den 6 Konstanten c_1, c_1', c_2, c_2', c_3, c_3' oder ϱ_1, μ_1, ϱ_2, μ_2, c_3, c_3' dargestellt. Wegen der Beziehung

$$\xi \Gamma + \eta \Gamma' + \zeta \Gamma'' = 0,$$

welche durch Vernachlässigung von $\Gamma^2, \ldots$ aus $\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$ hervorgeht, muß aber $c_3' = 0$ sein. Wir haben also die angenäherte Darstellung der kleinen Schwingungen:

$$p = L_1 \varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1) + L_2 \varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2) + \xi c_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$\Gamma = L_1' \varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1) + L_2' \varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wobei für $i = 1, 2$

$$\varrho_i \sin(\lambda_i t + \mu_i) = c_i \cos \lambda_i t + c_i' \sin \lambda_i t,$$
$$\varrho_i \cos(\lambda_i t + \mu_i) = - c_i \sin \lambda_i t + c_i' \cos \lambda_i t$$

1) Ebenso auch in der Lösung mit von $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ wenig verschiedener Periode.

gesetzt werden kann. Wir haben die drei partikulären Lösungen

$$p = L_1\varrho_1 \sin(\lambda_1 t + \mu_1), \ldots, \quad \Gamma = L_1'\varrho_1 \cos(\lambda_1 t + \mu_1), \ldots;$$
$$p = L_2\varrho_2 \sin(\lambda_2 t + \mu_2), \ldots, \quad \Gamma = L_2'\varrho_2 \cos(\lambda_2 t + \mu_2), \ldots;$$
$$p = \xi c_3, \ldots, \quad \Gamma = 0, \ldots.$$

Die erste stellt eine Drehung mit periodischer Winkelgeschwindigkeit um eine im Körper feste Achse dar, deren Richtungskosinus in bezug auf die Hauptachsen sich wie $L_1 : M_1 : N_1$ verhalten, die zweite eine periodische Drehung um eine feste Achse mit den Richtungskosinus $L_2 : M_2 : N_2$, die dritte die oben erwähnte gleichförmige Drehung um die Lotrechte OS.[1]) Die Zusammensetzung der ersten und dritten Lösung ergibt eine periodische Lösung mit der Periode $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ und mit den drei Konstanten c_1, c_1', c_3, die Zusammensetzung der zweiten und dritten eine periodische Lösung mit den drei Konstanten c_2, c_2', c_3. Wenn man sich nicht auf die linearen Glieder beschränkt, sind diese periodischen Lösungen durch die oben gefundenen zu ersetzen.

Oben waren $p, q, r; \Gamma, \Gamma', \Gamma''$ als periodische Funktionen von t mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + \cdots$ und mit drei Konstanten c_1, c_1', c_3 oder p_0, q_0, Γ_0'' dargestellt. Wir berechnen jetzt die Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ.

Aus den Gleichungen

$$\gamma = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \gamma' = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \gamma'' = \cos\vartheta$$

folgt

$$\cos\vartheta = \gamma'', \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

oder

$$\cos(\vartheta_0 + \Theta) = \frac{\zeta}{l} + \Gamma'', \quad \operatorname{tg}(\varphi_0 + \Phi) = \frac{\frac{\xi}{l} + \Gamma}{\frac{\eta}{l} + \Gamma'}.^{2)}$$

Aus

$$p = \psi'\sin\vartheta\sin\varphi + \vartheta'\cos\varphi,$$
$$q = \psi'\sin\vartheta\cos\varphi - \vartheta'\sin\varphi$$

ergibt sich

$$\psi' = \frac{p\gamma + q\gamma'}{\gamma^2 + \gamma'^2} = \frac{\frac{1}{l}(p\xi + q\eta) + p\Gamma + q\Gamma'}{\frac{k^2}{l^2} + \frac{2}{l}(\Gamma\xi + \Gamma'\eta) + \Gamma^2 + \Gamma'^2}.$$

Man stellt hiernach

$$\Theta = -\frac{l}{k}\Gamma'' + \cdots,$$
$$\Phi = \frac{l}{k^2}(\eta\Gamma - \xi\Gamma') + \cdots,$$
$$\psi' = \frac{l}{k^2}(\xi p + \eta q) + \cdots$$

1) Näheres bei Lecornu, a. a. O. 2) Bezeichnung wie in § 3.

als Potenzreihen von p, q, Γ, Γ' Γ'' dar. Die Einsetzung der oben für p, q, Γ, Γ', Γ'', gefundenen Ausdrücke ergibt

$$\Theta = \frac{lN_1'}{k}(c_1 \sin w - c_1' \cos w) + \cdots,$$

$$\Phi = \frac{l}{k^2}(\xi M_1' - \eta L_1')(c_1 \sin w - c_1' \cos w) + \cdots,$$

$$\psi' = \frac{l}{k^2}(\xi L_1 + \eta M_1)(c_1 \cos w + c_1' \sin w) + lc_3 + \cdots.$$

Ist für $t = 0$

$$\Theta = \Theta_0, \quad \Theta' = \Theta_0', \quad \psi' = \psi_0',$$

so hat man

$$c_1 = \frac{k\Theta_0'}{l\lambda_1 N_1'} + \cdots,$$

$$c_1' = -\frac{k\Theta_0}{lN_1'} + \cdots,$$

$$lc_3 = \psi_0' - \frac{(\xi L_1 + \eta M_1)\Theta_0'}{\lambda_1 N_1'} + \cdots.$$

Nun ist

$$\Theta = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Theta)_\nu, \quad \Phi = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Phi)_\nu, \quad \psi' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi')_\nu,$$

wo

$$(\Theta)_1 = \Theta_0 \cos w + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1}\sin w,$$

$$(\Phi)_1 = \frac{\xi M_1' - \eta L_1'}{kN_1'}\left(\Theta_0 \cos w + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1}\sin w\right),$$

$$(\psi')_1 = \psi_0' + \frac{\xi L_1 + \eta M_1}{kN_1'}\left[\frac{\Theta_0'}{\lambda_1}(\cos w - 1) - \Theta_0 \sin w\right]$$

und $(\Theta)_\nu$, $(\Phi)_\nu$, $(\psi')_\nu$ ganze homogene Funktionen νten Grades von Θ_0, Θ_0', ψ_0' und lineare Funktionen von $\cos \mu w$ $(\mu = 0, 1, \ldots \nu)$ sind. Wenn man

$$\frac{d\psi}{dw} = \frac{T}{2\pi}\psi' = \frac{(\psi')_1}{\lambda_1} + \cdots$$

integriert und $\psi = \psi_0$ für $t = 0$ annimmt, so erhält man

$$\psi - \psi_0 = \Omega w + (\psi)_1 + \cdots + (\psi)_\nu + \cdots,$$

wo

$$\Omega = \frac{\psi_0'}{\lambda_1} - \frac{(\xi L_1 + \eta M_1)\Theta_0'}{k\lambda_1^2 N_1'} + \cdots$$

eine Potenzreihe von Θ_0, Θ_0', ψ_0',

$$(\psi)_1 = \frac{\xi L_1 + \eta M_1}{k\lambda_1 N_1'}\left[\Theta_0(\cos w - 1) + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1}\sin w\right]$$

und $(\psi)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νten Grades von Θ_0, Θ_0', ψ_0' und lineare Funktion von $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ $(\mu = 0, 1, \ldots \nu)$ ist.

§ 11.

Aufgabe III (vergl. § 3). Die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1\left(\frac{x_1'}{\lambda_1}\right), \quad \frac{d\left(\frac{x_1'}{\lambda_1}\right)}{dt} = -\lambda_1 x_1 + \cdots,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2\left(\frac{x_2'}{\lambda_2}\right), \quad \frac{d\left(\frac{x_2'}{\lambda_2}\right)}{dt} = -\lambda_2 x_2 + \cdots,$$

$$\frac{dx_3'}{dt} = \quad + \cdots$$

mit den Integralen

$$\lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \cdots = \text{Const.},$$
$$x_3' + \cdots = \text{Const.}$$

besitzen, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ keine ganze Zahl ist, eine periodische Lösung mit drei Konstanten c_1, c_1', c_3' (den Anfangswerten von x_1, x_1', x_3')

$$x_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\alpha^{(\nu)}, \qquad (\alpha = 1, 2)$$

$$x_\alpha' = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\alpha^{(\nu)}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

worin

$$x_1^{(1)} = c_1 \cos w + \frac{c_1'}{\lambda_1} \sin w, \quad x_2^{(1)} = 0,$$
$$y_1^{(1)} = -c_1 \lambda_1 \sin w + c_1' \cos w, \quad y_2^{(1)} = 0, \quad y_3^{(1)} = c_3'$$

und $(x_\alpha)_\nu$, $(y_\alpha)_\nu$ ganze homogene Funktionen νter Dimension von c_1, c_1', c_3' und lineare Funktionen von $\cos \mu w$, $\sin \mu w$ ($\mu = 0, 1, \ldots \nu$) sind; dabei ist

$$w = \frac{2\pi t}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + T^{(1)} + T^{(2)} + \cdots,$$

wo $T^{(1)}$ proportional c_3' und $T^{(\nu)}$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension von c_1, c_1', c_3' ist.

Nun ist

$$\Theta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 (c_1 \cos w + \frac{c_1'}{\lambda_1} \sin w) + \cdots,$$

$$\Phi = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \beta_1 (c_1 \cos w + \frac{c_1'}{\lambda_1} \sin w) + \cdots,$$

$$\Theta' = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' = \alpha_1(-c_1 \lambda_1 \sin w + c_1' \cos w) + \cdots,$$

$$\Phi' = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' = \beta_1(-c_1 \lambda_1 \sin w + c_1' \cos w) + \cdots,$$

$$\psi' = \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3' = \gamma_1(-c_1 \lambda_1 \sin w + c_1' \cos w) + \gamma_3 c_3' + \cdots.$$

Soll für $t = 0$

$$\Theta = \Theta_0, \quad \Theta' = \Theta_0', \quad \psi' = \psi_0'$$

sein, so hat man

$$c_1 = \frac{\Theta_0}{\alpha_1} + \cdots, \quad c_1' = \frac{\Theta_0'}{\alpha_1} + \cdots, \quad \gamma_3 c_3' = \psi_0' - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\Theta_0' + \cdots.$$

Die Einsetzung dieser Werte ergibt

$$\Theta = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Theta)_\nu, \quad \Phi = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Phi)_\nu, \quad \psi' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\psi')_\nu,$$

wo $(\Theta)_\nu$, $(\Phi)_\nu$, $(\psi')_\nu$ dieselbe Bedeutung haben wie in § 10; jetzt ergibt sich

$$(\Theta)_1 = \Theta_0 \cos w + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1}\sin w,$$

$$(\Phi)_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}(\Theta_0 \cos w + \frac{\Theta_1'}{\lambda_1}\sin w),$$

$$(\psi')_1 = \psi_0' - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\Theta_0' + \frac{\gamma_1}{\alpha_1}(\Theta_0' \cos w - \Theta_0 \lambda_1 \sin w).$$

Ferner ist in

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + (T)_1 + (T)_2 + \cdots$$

$(T)_1$ proportional $\psi_0' - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\Theta_0'$ und $(T)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νten Grades von Θ_0, Θ_0', ψ_0'. Durch Integration erhält man wie in § 10

$$\psi - \psi_0 = \Omega w + (\psi)_1 + \cdots + (\psi)_\nu + \cdots,$$

wo

$$\Omega = \frac{\psi_0'}{\lambda_1} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1}\frac{\Theta_0'}{\lambda_1} + \cdots$$

und

$$(\psi)_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}[\Theta_0(\cos w - 1) + \frac{\Theta_0'}{\lambda_1}\sin w]$$

ist.

Wenn $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ keine ganze Zahl ist, findet man ebenso eine von den drei Konstanten abhängige periodische Lösung Θ, Φ, ψ', deren Periode von $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ wenig abweicht.

§ 12.

Aufgabe IV (vgl. § 4). Die kanonischen Differentialgleichungen, die bekannten Integrale und die periodischen Lösungen haben dieselbe Form wie am Anfang von § 10. Für $t = 0$ sei

$$P = P_0, \quad Q = Q_0, \quad R = R_0.$$

Aus dem Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neuen Veränderlichen folgt

$$c_1 = \frac{P_0}{n - \lambda_1\sigma_1} + \cdots, \quad c_1' = \frac{Q_0}{n\sigma_1 - \lambda_1} + \cdots, \quad c_3 = R_0.$$

Hiernach ist die Periode

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + (T)_1 + (T)_2 + \cdots,$$

wo $(T)_1$ proportional R_0 und $(T)_\nu$ eine ganze homogene Funktion νter Dimension von P_0, Q_0, R_0 ist. Ferner hat man

$$p = P = \sum_{\nu=1}^{\infty}(P)_\nu, \quad q = Q = \sum_{\nu=1}^{\infty}(Q)_\nu, \quad r = n + R = n + \sum_{\nu=1}^{\infty}(R)_\nu,$$

$$\gamma = \Gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma)_\nu, \quad \gamma' = \Gamma' = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma')_\nu, \quad \gamma'' = 1 + \Gamma'' = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\Gamma'')_\nu,$$

wo $(P)_\nu, \ldots; (\Gamma)_\nu, \ldots$ ganze homogene Funktionen νten Grades von P_0, Q_0, R_0 und lineare Funktionen von $\cos\mu w, \sin\mu w$ $(\mu = 0, 1, \ldots \nu)$ sind. Insbesondere ist

$$(P)_1 = P_0 \cos w + Q_0 \frac{n - \lambda_1\sigma_1}{n\sigma_1 - \lambda_1} \sin w,$$

$$(Q)_1 = -P_0 \frac{n\sigma_1 - \lambda_1}{n - \lambda_1\sigma_1} \sin w + Q_0 \cos w,$$

$$(R)_1 = R_0;$$

$$(\Gamma)_1 = \frac{P_0}{n - \lambda_1\sigma_1} \cos w + \frac{Q_0}{n\sigma_1 - \lambda_1} \sin w,$$

$$(\Gamma')_1 = -\frac{P_0\sigma_1}{n - \lambda_1\sigma_1} \sin w + \frac{Q_0\sigma_1}{n\sigma_1 - \lambda_1} \cos w,$$

$$(\Gamma'')_1 = 0.$$

Der Körper führt also, wenn $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ keine ganze Zahl ist, eine Bewegung mit einer von $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ wenig abweichenden Periode aus, wenn ihm eine nahezu lotrechte und von n wenig verschiedene Winkelgeschwindigkeit in einer alsdann bestimmten Anfangslage erteilt wird. Ähnlich findet man, wenn $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ keine ganze Zahl ist, die periodischen Bewegungen mit von $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ wenig verschiedener Periode.

Der Körper kann mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit um die durch den Schwerpunkt gehende vertikal gerichtete Hauptachse rotieren. Unsere Differentialgleichungen (§ 4) besitzen in Übereinstimmung damit die Lösung

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = c_3; \quad \Gamma = \Gamma' = \Gamma'' = 0.$$

Diese Lösung muß aus der oben gefundenen periodischen Lösung mit der Periode $\frac{2\pi}{\lambda_1} + \cdots$ hervorgehen, indem man $c_1 = 0$, $c_1' = 0$ setzt.

Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven.

Von RICHARD V. MISES in Wien.

Die vorliegende Arbeit versucht es, die konstruktiven Probleme der infinitesimalen Geometrie von einem allgemeinen, einheitlichen Gesichtpunkt aus zu behandeln. Sie knüpft an gewisse in der Kinematik übliche Anschauungen an, ohne jedoch, wie dies in bisherigen kinematisch-geometrischen Untersuchungen meist der Fall war, die Betrachtung *starrer* bewegter Systeme zum Ausgangspunkte zu wählen. Die Grundlage der folgenden Erörterungen bildet vielmehr die Aufstellung eines neuen[1]) Begriffes, der sich für die Lösung hierhergehöriger Aufgaben nützlich erweist. Dieser Begriff, die *Charakteristik eines veränderlichen geometrischen Elementes,* fällt für den speziellen Fall des veränderlichen Punktes bezw. der veränderlichen Geraden wesentlich mit dem der kinematischen Geschwindigkeit[2]) bezw. Winkelgeschwindigkeit zusammen. Im allgemeinen kann er als *geometrisches Äquivalent* für den analytischen Begriff der *Ableitung einer veränderlichen Größe* angesehen werden. Denn der ökonomische Grundgedanke der Differentialrechnung — alle Infinitesimalbetrachtungen im vorhinein zu erledigen, um sie im Einzelfalle zu ersparen — war für die Begriffsbildung in erster Linie maßgebend, und durchweg bildete die Analogie unserer Probleme mit jenen der Analysis den leitenden Gesichtspunkt für die hier gebotenen Untersuchungen. Die Aufgaben, mit denen wir uns zu beschäftigen haben, enthalten in ihren Daten in gleicher Weise analytische und rein geometrische Beziehungen. Die Lösung erfordert in jedem Falle eine

---

1) Durch eine Besprechung im Jahrbuch ü. d. Fortschritte d. Mathem. 1897 S. 505 f. erhielt Verfasser, kurz vor Abschlüß dieser Arbeit, Kenntnis von dem Inhalte einer ihm unzugänglichen Abhandlung: Joh. Petersen, *Grundprinciper for den infinitesimale Descriptivgeometri med Anwendelse paa Laeren om variable Figurer.* Inauguraldiss. Kjöb. 1897. Darnach hat Hr. Petersen den hier verwendeten Begriff zum Teil unter dem Namen Fluxion bereits eingeführt und in umfassender Weise zur Anwendung gebracht. Doch dürfte ihm ein großer Teil der in vorliegender Untersuchung gewonnenen Ergebnisse fehlen. — Einer geschätzten Mitteilung des Herrn Prof. Dr. R. Mehmke verdankt Verfasser ferner den Hinweis auf eine hierhergehörige Stelle in: G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale,* Torino 1887. Daselbst ist der hier allgemein verwertete Gedanke für den Fall des Punktes, der Geráden und der Ebene durchgeführt.

2) S. Schadwill, Das Gliederviierseit als Grundlage der ebenen Kinematik. Verhandl. d. Vereines zur Förderung d. Gewerbefleißes in Preußen. 1876. Jahrg. 55. S. 378 ff. § 4. Burmester, Lehrbuch der Kinematik I. Leipzig 1888. S. 12 f.

Differentiation der ersteren; das Analoge für die geometrischen Elemente leistet die Bestimmung ihrer Charakteristiken. Damit sind zugleich die Gebiete abgegrenzt, die in unserer Untersuchung einerseits der Rechnung, andererseits der geometrischen Konstruktion zufallen. Niemals betrachten wir es als unsere Aufgabe, ein errechnetes Resultat in eine Konstruktion umzusetzen.

Eine Erweiterung der hier dargelegten Betrachtungsweise für räumliche Gebilde, sowie eine Spezialisierung derselben für das Gebiet der algebraischen Kurven müssen besonderen Arbeiten vorbehalten bleiben.[1])

I. Zwei Phasen des veränderlichen Systems. Synthetische Kurvendefinition erster Art.

1. Wir betrachten eine Reihe von Punkten, Geraden und beliebigen Kurven (Punkt- oder Geradenörtern), nennen jedes dieser Gebilde ein Element und ihre Gesamtheit ein System. Von jedem Elemente nehmen wir an, es durchlaufe, sich stetig verändernd, eine einfache Mannigfaltigkeit von Phasen und zwischen allen Elementen bestehe ein derartiger Zusammenhang, daß mit der jeweiligen Phase eines einzigen unter ihnen eine oder mehrere entsprechende Phasen jedes andern bestimmt sind. Ist die Beziehung zwischen den zusammengehörigen Phasen eine mehrdeutige, so setzen wir voraus, sie lasse sich durch Zerfällung in Zweige auf eine Anzahl eindeutiger Zuordnungen zurückführen, sodaß wir unsere Betrachtungen auf die letzteren beschränken können. Ein System, das den ausgesprochenen Bedingungen genügt, wollen wir im allgemeinsten Sinne *zwangläufig veränderlich* nennen.

Analytisch würde sich das folgendermaßen darstellen. Die Punkte des Systems seien durch ihre Koordinaten

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2, \ldots \tag{1}$$

bezüglich eines unveränderlichen, in der Ebene festgelegten Achsensystems bestimmt, die übrigen Elemente durch ihre Gleichungen in bezug auf dasselbe Koordinatensystem:

$$f_1(x, y) = C_1, \quad f_2(x, y) = C_2, \ldots \tag{2}$$

Dann sind alle x_i und y_i von (1), sowie alle C_i von (2) stetige Funktionen einer unabhängigen Variablen t

$$x_i = X_i(t), \quad y_i = Y_i(t), \quad C_i = F_i(t). \tag{3}$$

1) Bei Ausführung vorliegender Arbeit ist mir von seiten meines verehrten Lehrers Herrn Prof. Dr. E. Müller in Wien vielfache Förderung zuteil geworden, die mich zu besonderem Danke verpflichtet.

Mit der Annahme irgend eines x_i, y_i oder C_i ist aus der entsprechenden Gleichung (3) das t, daher weiterhin jedes andere x_i usf. bestimmt. Hinsichtlich einer etwaigen Mehrdeutigkeit der Funktionen (3) muß wieder in analoger Weise die Auflösbarkeit in Zweige, oder was dasselbe ist, Eindeutigkeit innerhalb begrenzter Gebiete zur Voraussetzung gemacht werden.

Greift man zwei beliebige Phasen S und S_1 des Systems heraus, so bestimmen zunächst entsprechende Punkte p[1]) und p_1 sowie entsprechende Gerade G und G_1 der beiden Phasen Verbindungsgerade pp_1 und Schnittpunkte GG_1 und mit diesen gewisse Längen und Winkelgrößen $\overline{pp_1}$ und $\overline{GG_1}$. Nähert sich die zweite Phase unaufhörlich der ersten, so nähern sich — von singulären Fällen, die wir aus unserer Betrachtung ausschließen, abgesehen — Verbindungsgerade und Schnittpunkte gewissen Grenzlagen und die Verhältnisse jener Längen und Winkelgrößen bestimmten Grenzwerten. Wir konstruieren nun für jeden Punkt $p, q \ldots$ auf der *Grenzlage* der Geraden $pp_1, qq_1 \ldots$ je einen Punkt $p', q' \ldots$ und für jede Gerade $G, H \ldots$ durch die *Grenzlage* des Punktes $GG_1, HH_1 \ldots$ eine Gerade $G', H' \ldots$ derart, daß die Verhältnisse, welche die Strecken $\overline{pp'}, \overline{qq'} \ldots$ und die trigonometrischen Tangenten der Winkel $\overline{GG'}, \overline{HH'} \ldots$ miteinander bilden, den Grenzwerten der entsprechenden Verhältnisse von $\overline{pp_1}, \overline{qq_1} \ldots \overline{GG_1}, \overline{HH_1} \ldots$ gleichkommen.[2]) Alle Elemente sind nach der Wahl eines einzigen unter ihnen eindeutig bestimmt. Wir nennen p' und G' beziehentlich die *Charakteristiken von p und G*[3]) und bemerken, daß durch die Angabe einer Phase aller Punkte und Geraden des Systems sowie der zugehörigen Charakteristiken zwei aufeinanderfolgende Phasen dieser Elemente vollkommen charakterisiert sind. Offenbar ist die Gerade pp' Tangente an den Ort (p) der Phasen von p und GG' der Berührungspunkt von (G) mit seiner Tangente G.

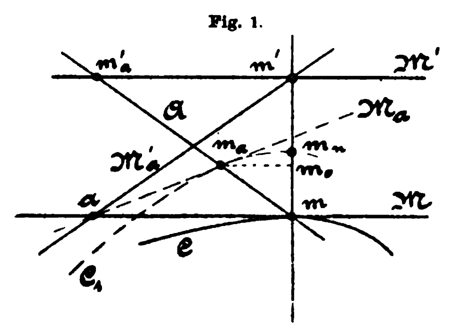
Es seien C und C_1 (Fig. 1) zwei Phasen einer dem System angehörigen Kurve und m ein Punkt von C. Wir legen durch m einen beliebigen Strahl A, den wir uns in der Ebene unveränderlich denken, und beschränken unsere Betrachtungen, um Mehrdeutigkeiten auszuschließen, auf einen solch kleinen Teil von C in der Umgebung von

1) Kleine Buchstaben bezeichnen im folgenden in der Regel Punkte, große Buchstaben Gerade. Immer bedeutet die Aneinanderreihung ab die Verbindungsgerade, $\overline{ab}$ die Entfernung der Punkte a und b; AB den Schnittpunkt, $\overline{AB}$ den Winkel von A und B. Der in Klammer gesetzte Buchstabe (E) eines Elementes bezeichnet den Ort, bezw. den Inbegriff aller Phasen von E.

2) Der Fall, daß der Schnittpunkt GG' im Unendlichen liegt, wird später seine Erledigung finden.

3) Petersen benützt nur p' als „*Fluxion des Punktes p*". Vgl. Jahrbuch a. a. O. S. 505. — Peano, a. a. O. S. 321 nennt pp' „*Derivierte von p*".

m, daß weitere Schnittpunkte von C und A nicht mehr in denselben fallen. Fassen wir jetzt eine infinitesimale Phasenänderung von C ins Auge, so gibt es nur *einen* unendlich nahe an m gelegenen Punkt von A, der zugleich der Nachbarphase von C angehört. Es läßt sich daher im allgemeinen aus der Mannigfaltigkeit der Phasen von C ein derartig begrenztes, die Ausgangsphase selbst enthaltendes Gebiet herausheben, daß innerhalb derselben zwischen den Phasen von C und den Punkten von A eine eindeutige stetige Zuordnung besteht. Eine solche Zuordnung gestattet aber, den jeweiligen Schnittpunkt m_a von A und C als Element des zwangläufigen Systems aufzufassen, und damit ist nach dem Vorangehenden auch eine Charakteristik m_a' für denselben bestimmt, die notwendigerweise auf A liegen muß. Wir können auch sagen, durch den Strahl A werde dem Punkte m von C ein Punkt m_a von C_1 zugeordnet, und dieser Zuordnung von a entspreche die Charakteristik m_a' von m. Läßt man A das ganze Büschel in m durchlaufen, so erhält man eine Reihe von Punkten $m_a', m_b' \ldots$, deren Gesamtheit für das Verhalten von C in der Umgebung von m und in zwei aufeinanderfolgenden Phasen charakteristisch ist. Wir wollen nun zeigen, welches der Ort der m_a' ist, wenn A das Strahlenbüschel in m beschreibt. Bezeichnet man mit M und N Tangente und Normale von C in m und zieht $m_a m_0 \parallel M$, so erkennt man, daß bei unbegrenzter Annäherung von C_1 an C mit $\overline{m m_a}$ zugleich $\overline{m_a m_0}$, sowie der Winkel $\overline{M M_a}$ der Tangenten in m und m_a von gleicher Ordnung unendlich klein werden. Daher ist die Entfernung des Punktes m_0 von $M_a N$ und umsomehr $\overline{m_0 m_n}$ den genannten Größen gegenüber von höherer Ordnung unendlich klein, d. h. m_a *nähert sich der Lage* auf der durch m_n zu M gezogenen Parallelen. Da nun die Punkte m_a' den m_a in der Grenze ähnlich liegen, so folgt der Satz: *Die Charakteristiken eines Punktes m einer Kurve C für alle möglichen Zuordnungen liegen auf einer Parallelen M' zur Tangente M an C in m.*[1]) M' heißt die *Charakteristik von C für den Punkt m.*[2])


Fig. 1.

1) Eine analytische Ableitung dieses Satzes unter Verwendung des Geschwindigkeitsbegriffes gibt G. Scheffers, Anwendung d. Differ. u. Integr.-Rechnung auf Geometrie. 1. Bd. Leipzig 1901. S. 86.

2) Die „*Fluxionslinie*" von Petersen. Vgl. Jahrbuch a. a. O. S. 506. — Für den Fall, daß C eine Gerade ist, heißt M nach Peano a. a. O. S. 321 „*Polare von C in m.*"

Es seien wieder C und C_1 (Fig. 1) zwei Phasen einer Kurve, die jetzt als das Erzeugnis der Tangenten M aufgefaßt werde. Durch eine der vorigen ganz ähnliche Betrachtung gelangt man zu folgender Auffassung. Jeder Punkt a von M ordnet dieser Tangente eine Tangente M_a von C_1 zu, und jeder solchen Zuordnung a entspricht eine Charakteristik M'_a von M, die durch a hindurchgeht. In derselben Weise wie früher erkennt man, daß beim Übergange zu unendlich benachbarten Phasen die Entfernung des Punktes m_n von $M_a N$ gegenüber $\overline{MM_a}$ usw. verschwindet, daß daher die M_a sich *der Lage auf dem Büschel* mit m_n als Scheitel *nähern*. Da die M'_a den M_a in der Grenze affin liegen, kann man den Satz aussprechen: *Die Charakteristiken einer Tangente M einer Kurve C für alle möglichen Zuordnungen gehen durch einen Punkt m' auf der Normalen N von C in m. m'* ist die *Charakteristik von C für ihre Tangente M.*

Da das Ähnlichkeitsverhältnis im ersten und das Affinitätsverhältnis im zweiten Falle einander gleich sind, so folgt, daß für das Linienelement Mm einer Kurve m' und M' vereinigt liegen. Wir werden die Strecke $\overline{mm'}$ gleich dem Abstande der Geraden M und M' auch die *Charakteristik der Kurve C für ihr Linienelement mM nennen.*

2. Die Charakteristiken einer Kurve (m) für alle ihre Punkte bilden ihr *charakteristisches Geradengebilde* (M'), die einer Kurve (M) für alle ihre Tagenten das *charakteristische Punktgebilde* (m'). Aus den gemeinsamen Tangenten von (m) und (M'), sowie den gemeinsamen Punkten von (M) und (m'), erhält man die Linienelemente, in denen (m) bezw. (M) *ihre Enveloppe berührt.* Die beiden charakteristischen Örter einer Kurve C bezeichnen wir als deren *Charakteristiken* C'. Wie die Verbindungsgerade pp' die Tangente an (p), der Schnittpunkt GG' den Berührungspunkt für (G) lieferte, so stellen die gemeinsamen Elemente (Punkte oder Geraden) CC' die *Grundpunkte*, bezw. *Grundtangenten* jener *linearen Schar* (Büschel oder Reihe) dar, mit der die Schar (C) in erster Annäherung *als augenblicklich zusammenfallend* angesehen werden kann.[1])

Für einen Punkt p als degeneriertes *Punktgebilde* ist das Büschel um p' der charakteristische *Geradenort*, für eine Gerade G als degeneriertes *Tangentengebilde* die Punktreihe G' der charakteristische *Punktort*. Die duale Charakteristik besteht im ersten Falle aus den Punkten des

---

1) Hierbei ist von dem Falle abgesehen worden, daß eine Charakteristik M' von C für deren Punkt m die Kurve C in einem andern Punkt als m berühren kann. Eine strenge mathematische Durchführung der in diesem Abschnitte angedeuteten Untersuchung würde eine Beschränkung auf algebraische Kurven erfordern.

über pp' als Durchmesser errichteten *Kreises*, im zweiten aus den Strahlen des *Parallelbüschels* der Richtung G. Als Charakteristik einer Geraden G, die zu ihrer Nachbarphase G_1 parallel ist, erscheint demgemäß eine zu G parallele Gerade G', deren Abstand $\overline{GG'}$ von G durch den Grenzwert der Verhältnisse bestimmt wird, die $\overline{GG_1}$ mit den früher betrachteten Längen $\overline{pp_1}$, $\overline{qq_1}$ usf. bildet.

Die Charakteristik M' einer Kurve C für einen ihrer Punkte m kann zugleich aufgefaßt werden als Charakteristik der Tangente M für den ihr angehörigen Punkt m; und in gleicher Weise der Punkt m' als Charakteristik des Punktes m für die durch ihn gehende Gerade M. Haben daher zwei Kurven C und E *dauernd* ein Linienelement Mm gemeinsam, so fallen auch ihre Charakteristiken $m'M'$ für mM zusammen. Ist nun eine Kurve C allgemein als Einhüllende eines beliebigen Elementes E erzeugt, und trifft man zwischen irgend einem E einerseits und den unendlich benachbarten Elementen E_a, E_b ... der Nachbarphase C_1 von C andrerseits eine *beliebige Zuordnung* a, b ..., so haben alle so entstehenden Charakteristiken E'_a, E'_b ... von E *jene Punkte oder Geraden gemein*, welche den Geraden und Punkten entsprechen, in denen E seine Einhüllende C berührt, bilden also ein Büschel bezw. eine Reihe. Es ist dies die Verallgemeinerung der in 1 für Punkte und Gerade als Elemente E bewiesenen Sätze. Wir bezeichnen demgemäß als *Charakteristik einer Kurve C für ihr Element E* jede der beiden linearen Scharen E'_a, E'_b ... oder was auf dasselbe hinausläuft, deren Grundpunkte, bezw. Grundtangenten. Die Gesamtheit der letzteren für alle Elemente E von C bildet dann wieder einen der beiden charakteristischen Örter, die wir oben mit C' bezeichnet haben.

Die bisher betrachteten *rein geometrischen* Elemente des veränderlichen Systems führen mittelbar zur Behandlung anderer, uneigentlicher oder *metrischer Elemente*. Es sind dies zunächst die durch Punkt- oder Geradenpaare des Systems bestimmten *Längen und Winkel*. Faßt man zwei Phasen eines solchen Paares ins Auge, so erhält man eine Größendifferenz, die bei unendlicher Annäherung der Phasen aneinander zugleich mit den früher betrachteten Größen $\overline{pp_1}$ ... $\overline{GG_1}$ ... von gleicher Ordnung unendlich klein wird und mit ihnen Verhältnisse von bestimmten endlichen Grenzwerten bildet. Als Charakteristiken der metrischen Elemente definieren wir *Größen*, also wieder metrische Elemente, deren *Verhältnisse* zu den bereits definierten Größen $\overline{pp'}$ ... tg $\overline{GG'}$ ... jenen *Grenzwerten* gleichkommen.

Beschreiben beide Punkte eines Paares dieselbe Kurve, so bestimmen sie auf dieser eine veränderliche *Bogenlänge*, deren Charakteristik in gleicher Weise wie die der anderen metrischen Elemente

definiert wird. Man erkennt den Zusammenhang der hier gegebenen Definitionen mit jenen der Differentialrechnung.

Allgemein können wir sagen, daß die Charakteristik E' eines beliebigen Elementes E mit E zusammen ein *Äquivalent für zwei unendlich benachbarte Phasen* von E bildet. Aus dieser Auffassung ergibt sich der für das folgende grundlegende Satz, daß *die Charakteristik eines Elementes mit den Charakteristiken seiner Bestimmungsstücke gegeben ist.*

Betrachtet man ein veränderliches Element *ohne* Rücksicht auf seine Zugehörigkeit zu einem zwangläufigen System, so verliert seine Charakteristik der Definition gemäß im Falle des metrischen Elementes *gänzlich*, im Falle des eigentlichen *teilweise* ihre Bedeutung. Unter der Charakteristik eines *unabhängig veränderlichen* (eigentlichen) Elementes E hat man sonach nur jenes Gebilde zu verstehen, das im allgemeinen mit EE' bezeichnet werden kann, also für einen Punkt p die Tangente pp', für eine Gerade G den Berührungspunkt GG', für eine beliebige Kurve C die gemeinsamen Punkte bezw. Tangenten CC'.

Wir gehen nun daran, die gewonnenen Begriffe auf die Lösung der allgemeinen Probleme der *Infinitesimalgeometrie* anzuwenden.

3. Gegeben sei eine Reihe zunächst unveränderlicher Elemente bestehend aus Punkten, Geraden, beliebigen Kurven, Längen- und Winkelgrößen $F_1, F_2 \ldots F_{m-1}$ und E_1. Alle diese Elemente mögen nach einem ebenfalls gegebenen Gesetze in irgend welcher Weise andere, neue Elemente bestimmen, diese mit den früheren zusammen wieder weitere usf., bis ein einziges letztes Element E_n als Endergebnis der (ihrer Zahl nach endlichen) wiederholten Operationen erscheint. Unterwirft man nun *eines* der ursprünglich gegebenen Elemente, etwa E_1, fortgesetzter stetiger Veränderung, indem man es eine einfache Mannigfaltigkeit von Phasen durchlaufen läßt, während das Operationsgesetz erhalten bleibt, so ändern sich im allgemeinen alle späteren, abgeleiteten Elemente $E_2, E_3 \ldots$ und bilden mit E_1 zusammen ein *zwangläufig veränderliches System* im Sinne unserer Betrachtung. Ist E_n ein eigentliches (nicht metrisches) Element, so erzeugt es allgemein eine Kurve A, die durch das Operationsgesetz definiert ist. Wir nennen eine derartige Darstellungsweise einer Kurve eine *synthetische Definition erster Art* und die Elemente $E_1, E_2 \ldots E_n$ das *erzeugende System* derselben. Bestimmt wird die Kurve durch die Elemente $F_1, F_2 \ldots F_m$, wenn F_m der Ort der Phasen von E_1 ist. Jedes F kann zugleich als Ort der Phasen eines veränderlichen E des Systems angesehen werden.

Die Anwendung der oben gewonnen Begriffe auf den vorliegenden Fall ergibt nun Folgendes. Wenn für E_1 als unabhängig-veränderliches

Element die Charakteristik E_1' bekannt ist, so läßt sich die Charakteristik des die Kurve erzeugenden Elementes E_n, also insbesondere für einen Punkt die Tangente an seine Bahn, für eine Gerade der Berührungspunkt mit seiner Einhüllenden, durch wiederholte Lösung einer *Grundaufgabe* von immer derselben Form ermitteln: *Es ist die Charakteristik eines Elementes aus den Charakteristiken seiner Bestimmungsstücke zu finden.* Die Formen, in denen die im erzeugenden Systeme aufeinanderfolgenden Elemente einander bestimmen, bilden das Analogon zu den einfachen Funktionen der Analysis, und es handelt sich jetzt darum, die Grundaufgabe für einzelne Bestimmungsformen tatsächlich zu lösen. Um jedoch zugleich einen Überblick über die Anwendbarkeit des Verfahrens zu erhalten, wollen wir zunächst eine für unsere Zwecke taugliche Einteilung der Kurven auf Grundlage ihrer Definitionen vornehmen.

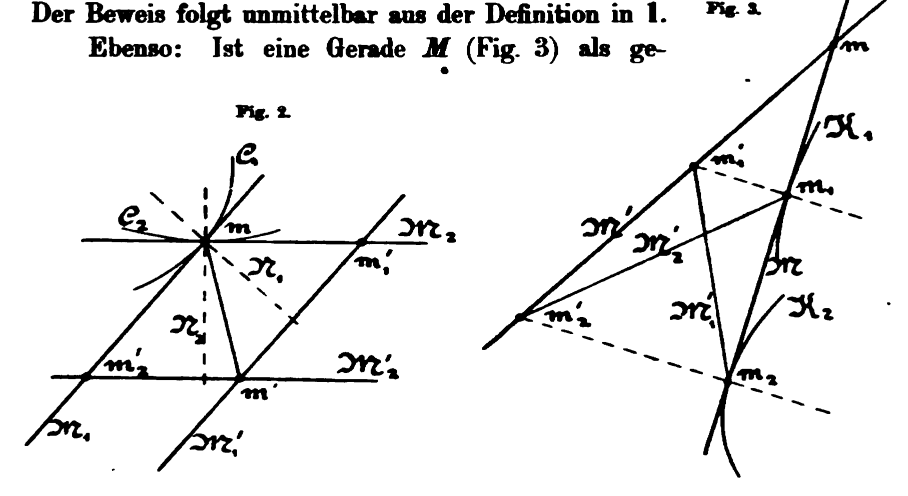
Wir sagen, eine Kurve A sei *mit Hilfe der Kurven* B_1, B_2 ... *konstruierbar*, wenn das erzeugende System der A außer Punkten und Geraden keine anderen Kurven als solche der Gruppe B, und die Definition keine anderen Bestimmungsformen als die folgenden enthält: Jeder Punkt bezw. jede Gerade ist als gemeinsames Element zweier Kurven, jedes metrische Element durch ein Punkte- oder Geradenpaar, jede Kurve B durch gewisse ihr eigentümliche *normale Bestimmungsstücke* gegeben. Der gewöhnliche Begriff der Konstruierbarkeit würde noch eine Einschränkung bezüglich der festen Bestimmungsstücke von A und der Art des unabhängig veränderlichen Elementes erfordern, die wir jedoch fortlassen können. Denkt man sich unter B den Kreis, so fallen die mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Kurven unter den hier aufgestellten Begriff; dabei treten als normale Bestimmungselemente des Kreises Mittelpunkt und Halbmesser auf. Naturgemäß ist immer der Fall schon eingeschlossen zu denken, daß eine B unmittelbar durch andere als die normalen Stücke gegeben erscheint, aus denen sich aber mittelbar die letzteren durch Konstruktionen, die wieder nur aus B usw. bestehen, ableiten lassen.

Wir sagen ferner, *eine Kurve A sei mit Hilfe der Kurven* B_1, B_2 ... *explizite darstellbar*, wenn zu den Bestimmungsformen, die bei den konstruierbaren Kurven vorkommen, noch die eine hinzutritt: Ein metrisches Element y des erzeugenden Systems ist aus anderen bereits gefundenen ebensolchen Elementen durch eine explizite Gleichung von der Form $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ abgeleitet, wobei f eine differenzierbare Funktion ist. Bedeutet B wieder den Kreis, so gehören zu den A die durch explizite Gleichungen in Parallel- oder Polarkoordinatensystemen gegebenen Kurven usf. Alle bisher genannten Bestimmungsformen

nennen wir *explizite* und wird in den folgenden beiden Abschnitten die Lösung der Grundaufgabe für dieselben gebracht. In Abschnitt 7 behandeln wir schließlich einen besonderen, wichtigen Fall der *impliziten Bestimmungsform* eines Elementes, der in folgendem besteht. Ein Punkt oder eine Gerade ist als gemeinsames Element von n Kurven ($n \geq 2$) gegeben, von denen jede eine einfach unendliche Schar durchläuft, und deren zusammengehörige Phasen durch eine Bedingung miteinander verknüpft sind. Eine solche Bedingung kann etwa in einer Gleichung zwischen den n Parametern der Kurvenscharen oder darin bestehen, daß zwei Kurven A und B, die aus jenen n Gebilden ableitbar sind, einander fortdauernd berühren sollen usf.

4. Ist ein Punkt m (Fig. 2) als gemeinsamer Punkt zweier Kurven C_1 und C_2 gegeben, so ist seine Charakteristik m' der *Schnittpunkt der Charakteristiken* M_1' und M_2' von C_1 und C_2 für m. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition in 1.

Ebenso: Ist eine Gerade M (Fig. 3) als ge-



meinsame Tangente zweier Linien K_1 und K_2 gegeben, so ist ihre Charakteristik M' *die Verbindungsgerade der Charakteristiken* m_1' und m_2' von K_1 und K_2 für M.[1])

Bleibt im ersten Falle die eine Kurve C_1 unverändert, so ist M_1' mit der Tangente M_1 identisch und m' fällt nach m_2' (Fig. 2). Ebenso

1) Während die zweite der beiden dualen Aufgaben meines Wissens noch nirgends behandelt wurde, bildete die erste den Kernpunkt aller auf eine allgemeine konstruktive Lösung des Tangentenproblems gerichteter Bestrebungen. Derartige Versuche gehen (nach M. Cantor, Vorles. ü. Geschichte d. Mathematik. Leipzig, B. II, 1900, S. 876ff. u. B. III. 1901, S. 134ff.) auf Roberval (1602—1675) und Barrow (1630—1677) zurück. In neuerer Zeit hat Chr. Wiener, Lehrb. d. darst. Geometrie, I. B., Leipzig 1884 S. 170f. ein Verfahren entwickelt, das in jedem einzelnen Falle die Vornahme von Grenzbetrachtungen fordert. Beispiele

kommt, wenn nur C_1 veränderlich ist, m' nach m'_1 auf der Tangente M_2 an C_2 zu liegen, und man erkennt, daß sich die Strecke mm' als geometrische Summe von mm'_1 und mm'_2 ergibt. Analog ist im zweiten Falle die Ordinate von M', (Fig. 3) gemessen normal zu M, gleich der Summe der entsprechenden Ordinaten der Geraden M'_1 und M'_2, die einer partiellen Änderung von K_1 bezw. K_2 allein als Charakteristiken für M entsprechen. Die hier auftretende Erscheinung ist ein spezieller Fall eines allgemeinen, später zu behandelnden Gesetzes.

Durch Spezialisierung der vorhergehenden Aufgaben erhält man die Charakteristik m' des *Schnittpunktes* m (Fig. 4) *zweier Geraden* A und B als Schnittpunkt der beiden Charakteristiken A'_m und B'_m von A und B für m. Gleichzeitig erkennt man durch eine einfache Infinitesimalbetrachtung, daß die *Charakteristik des Winkels* $\overline{AB}$

Fig. 4.

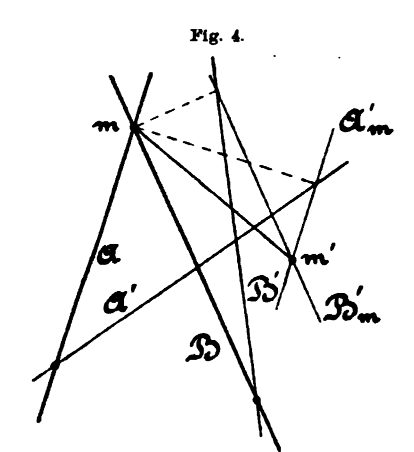
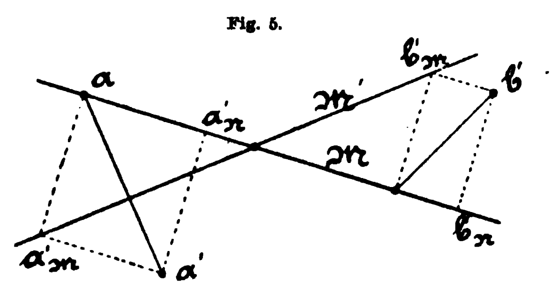


Fig. 5.



durch die algebraische Summe $-\operatorname{tg}\overline{AA'} + \operatorname{tg}\overline{BB'}$ gegeben ist, beide Winkel im Sinne der in betracht kommenden Drehung von A nach B positiv, im entgegengesetzten negativ gerechnet. Dual ergibt sich die Charakteristik M' (Fig. 5) der *Verbindungsgeraden* M *zweier Punkte* a und b als Verbindungsgerade der Charakteristiken a'_M und b'_M von a und b für ihre Gerade M, sowie die *Charakteristik der Länge* $\overline{ab}$ als algebraische Summe $-\overline{aa'_N} + \overline{bb'_N}$.

Die Charakteristik der Bogenlänge $\widehat{ab}$ ist $-\overline{aa'} + \overline{bb'}$ bei analoger Festsetzung der Zeichen (Fig. 6).

Die gegebenen Ausdrücke für die Charakteristiken der metrischen Elemente bilden den wesentlichen Inhalt der „*formules fondamentales*“,

---

dazu gibt Rohn u. Papperitz, Lehrb. d. darst. Geometrie, Leipzig 1901, I. B., 6. Kap. Für starre Kurven enthält viele Konstruktionen L. Burmester, Lehrb. d. Kinematik I. Leipzig 1884, 1. Kap. Vgl. ferner v. Mangoldt in der Encykl. d. mat. Wiss. III. D. 1, 2 (6) und Schönfließ ebenda IV. 3. (9). Petersen gibt eine mit der hier gebrachten identische Lösung. (Vgl. Jahrb. f. Fortschr. d. Math., 1897, S. 506.)

die zuerst **Mannheim**[1]) und nach ihm **d'Ocagne**[2]) aufgestellt und zur Grundlage der ganzen Infinitesimalgeometrie der Ebene gemacht haben. Sie reichen auch tatsächlich zur Bewältigung aller auf metrische Beziehungen gegründeten Aufgaben hin. Sind etwa (Fig. 7) a und b zwei Punkte, deren Abstand *konstant* ist, und a_3, b_3 die Projektionen von a' und b' auf ab, so ist $\overline{aa_3} = \overline{bb_3}$. Soll der Punkt c von a und b unveränderliche Entfernung haben, so ist seine Charakteristik dadurch bestimmt, daß $\overline{cc_2} = \overline{aa_2}$ und $\overline{cc_1} = \overline{bb_1}$ ist. Man erkennt leicht, daß die in a, b, c errichteten Normalen zu aa', bb' und cc' durch einen Punkt 0 gehen, daß die von O auf A, B, C gefällten Lote

Fig. 6.

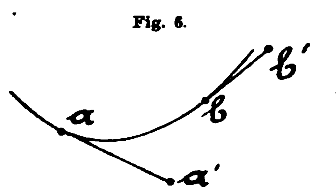
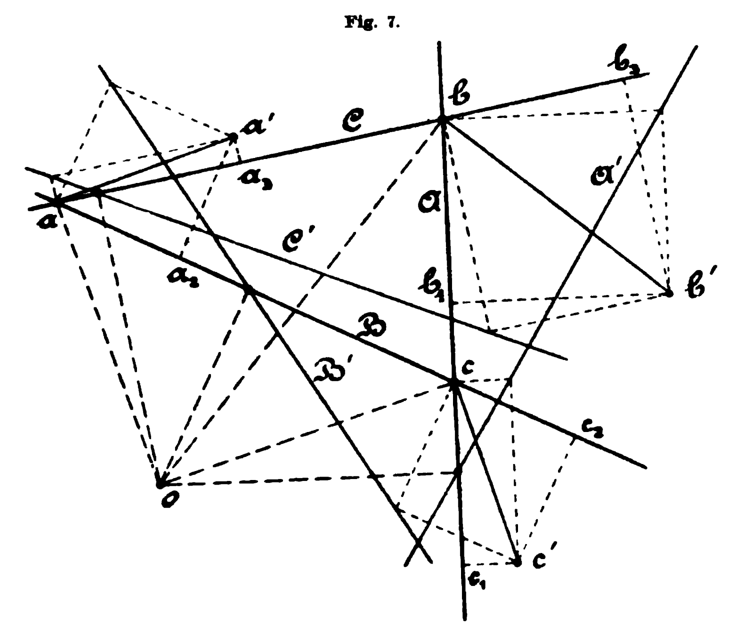


Fig. 7.



die Berührungspunkte AA', BB', CC' bestimmen, und daß A', B', C' miteinander dieselben Winkel einschließen wie A, B, C.[3]) Wir werden von diesen bekannten Sätzen in der Folge Gebrauch machen.

Ist das metrische Element y aus den metrischen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die Gleichung

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

1) A. **Mannheim**, Principes et développements de géométrie cinématique. Paris 1894. S. 44 ff.

2) M. **d'Ocagne**, Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale. Paris 1896. S. 258 ff.

3) Vgl. den ähnlichen Gedankengang bei **d'Ocagne**, a. a. O. S. 267.

abgeleitet, so folgt durch Differentiation die Charakteristik von y:

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n,$$

wobei $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ die Charakteristiken der Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind.

Es soll hier noch folgendes bemerkt werden. Gehört die Kurve C_1 (Fig. 2) bezw. K_1 (Fig. 3) zu den unveränderlichen Bestimmungsstücken F von A, so bedarf es zur Ermittelung von m' bezw. M' bezüglich C_1 oder K_1 nur der Kenntnis der Tangente M_1 in m. bezw. des Berührungspunktes m_1 in M. Allgemein kann man sagen, daß zur Behandlung des *Tangentenproblems*[1]) für jedes unveränderliche Bestimmungsstück F von A die Angabe zweier benachbarter Phasen jenes Elementes E erforderlich ist, als dessen Ort F erscheint, oder mit anderen Worten die Angabe der Charakteristik von E, das als *unabhängig* veränderliches Element betrachtet wird. Dies stimmt auch damit überein, daß prinzipiell jedes der E als Ausgangspunkt für die Erzeugung von A gewählt werden kann; es ändern sich dann nur die in der Definition auftretenden Bestimmungsformen.

5. Es erübrigt nun noch, für die letzte der expliziten Bestimmungsformen eines Elementes die Lösung der Grundaufgabe anzugeben: Die Charakteristik einer veränderlichen Kurve B aus den Charakteristiken ihrer normalen Bestimmungsstücke zu ermitteln. Wir bezeichnen die letzteren jetzt mit $F_1, F_2 \ldots$ und wollen sagen, eine Kurve B sei *aus ihren normalen Bestimmungsstücken explizite darstellbar*, wenn die $F_1, F_2 \ldots$ die festen Elemente sind, welche gemäß dem in **3** Gesagten einer expliziten Definition von B entsprechen. Dann beweisen wir den Satz, daß die eben ausgesprochene Grundaufgabe für eine Kurve B lösbar ist, *sobald B aus seinen normalen Bestimmungsstücken mit Hilfe der Kurven $C_1, C_2 \ldots$ explizite dargestellt werden kann, und die Aufgabe für die C als gelöst angesehen wird.*

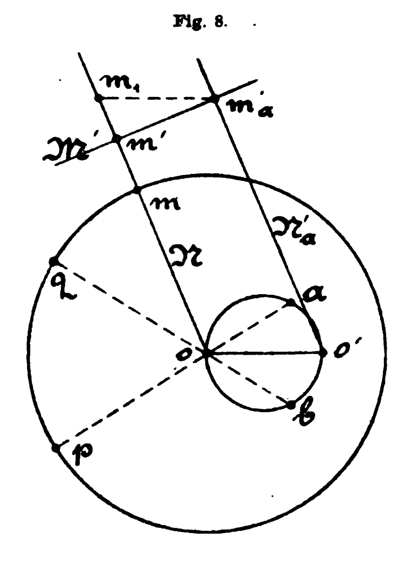
Es seien $E_1, E_2, \ldots E_n$ zusammengehörige Phasen der veränderlichen Elemente des Systems, von denen speziell E_n den Ort B beschreibt. E_1 sei das unabhängig-veränderliche Element, und F_n der Ort von E_1. Nun werden die $F_1 \ldots F_n$ einer Änderung unterworfen, die ihnen die gegebenen Charakteristiken $F'_1, \ldots F'_n$ erteilt; man soll die Charakteristik der erzeugten Kurve B für ihr Element E_n ermitteln. Zu diesem Zwecke denken wir uns zwischen den Elementen E_1 der zwei aufeinanderfolgenden Phasen von F_n eine beliebige Zuordnung a

1) Unter Tangentenproblem verstehen wir hier den Inbegriff aller jener Aufgaben, die ein einmaliges Eingehen in Infinitesimalbetrachtungen erfordern, die also, analytisch gesprochen, durch einmalige Differentiation gelöst werden.

getroffen, d. h. wenn E_1 ein Punkt ist, so wählen wir E'_{1a} auf der gegebenen Charakteristik E'_1 von F_n für E_1 usf. Da nun in jeder Phase alle folgenden Elemente $E_2, E_3 \ldots E_n$ sukzessive aus E_1 und den $F_1, F_2 \ldots F_{n-1}$ *explizite* ableitbar sind, so können der Voraussetzung gemäß (wonach für alle E die Grundaufgabe gelöst, für alle F Tangente usw. bekannt ist) aus den gegebenen Charakteristiken $F'_1 \ldots$ und der gewählten E'_{1a} die Charakteristiken $E'_{2a} \ldots E'_{na}$ ermittelt werden. Mit E'_{na} aber haben wir für E_n eine Charakteristik gefunden, die einer gewissen Zuordnung a zwischen den erzeugenden Elementen E_n von B in zwei Nachbarphasen entspricht. Ist etwa E_n ein Punkt, so liegt E'_{na} auf der gesuchten Charakteristik E'_n von B für E_n. Eine Wiederholung des Verfahrens bei anderer Wahl der Zuordnung liefert eine zweite Charakteristik E'_{nb}, die mit E'_{na} zusammen die lineare Schar bestimmt, die wir in 2 als Charakteristik E'_n von B für E_n bezeichnet haben. Statt den Vorgang für eine zweite Zuordnung durchzuführen, genügt es auch, die Linienelemente, die E_n mit B gemein hat, aufzusuchen. Wenn z. B. E_n ein Punkt ist, so braucht man außer E'_{na} noch die Richtung der Tangente an B in E_n.

Um jetzt einen Überblick über die Tragweite der gewonnenen Ergebnisse zu erhalten, betrachten wir ein einfaches hierhergehöriges Beispiel, den *Kreis*. o (Fig. 8) sei der Mittelpunkt, $r = \overline{om}$ der Radius. o' die Charakteristik von o, und $r' = \overline{mm_1}$ die von r. Ferner sei $om \equiv N$ das unabhängig-veränderliche Element, dessen Ort der Punkt o ist. Wir wählen, entsprechend einer Zuordnung im unendlich fernen Punkte von N, als seine Charakteristik N'_a die durch o' gehende Parallele. Die zugehörige Charakteristik m'_a von m ergibt sich auf Grundlage der Definitionsbestimmung, daß $\overline{om} = r$ ist, indem man durch m_1 die Parallele zu oo' zieht. Denn es muß die Charakteristik von $\overline{om}$, also $\overline{o'm'_a} - \overline{om} = r'$ sein. Die Normale zu N durch m'_a ist die gesuchte Charakteristik M' des

Fig. 8.



Kreises K für den Punkt m. Man erkennt, daß (M') *ein Kreis* mit dem Zentrum in o' und dem Halbmesser $r + r'$ ist, der Ort (m') aller $m' \equiv NM'$ eine *Pascalsche Schnecke* mit dem über oo' als Durchmesser errichteten Kreise als Basis, o als Pol und $r + r'$ als Parameter. Die

Punkte p, q, in denen K seine Enveloppe berührt, findet man als Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an K und (M'), indem man $\overline{oa} = \overline{ob} = r'$ macht und die durch a und b gehenden Radien zieht.

Die Anwendung der früher entwickelten allgemeinen Betrachtungen auf den jetzt behandelten Spezialfall führt unmittelbar zu folgenden Sätzen. *Ist eine Kurve* als Ort von Punkten, Geraden oder Kreisen (p, G, K) *in der Weise definiert, daß sich alle Phasen des erzeugenden Elementes in steter Folge mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen*, so kann man mit *denselben* Hilfsmitteln die Tangente, bezw. die Berührungspunkte konstruieren. Ist die Reihe der einander aufeinanderfolgend bestimmenden Elemente p, G, K ein- oder mehrmals *unterbrochen*, und in den Lücken die Verbindung durch gegebene explizite Gleichungen zwischen linearen Größen des Systems hergestellt, so *hängt die Konstruierbarkeit* der Tangenten usw. nur mehr *von der Möglichkeit ab*, die aus der Differentiation jener Gleichungen sich ergebenden Größen wieder konstruktiv darzustellen. Schließlich können wir für alle explizite definierten Punkt-, Geraden- und Kreisörter, deren erzeugendes System beliebige Kurven enthält, die *sich in letzter Linie* auf p, G, K *zurückführen lassen*, die betreffenden Aufgaben mit Zirkel und Lineal lösen, sobald wir eine vollständige Phase aller in betracht kommenden Elemente als gezeichnet vorliegend voraussetzen. Damit ist wohl der größte Teil aller Erzeugungsformen algebraischer und transzendenter Kurven erschöpft. Es braucht nicht erst hervorgehoben zu werden, daß auch alle analytischen Kurvendefinitionen, insoweit sie in endlichen expliziten Gleichungen zwischen zwei Variablen bestehen, hierin einbezogen sind.

6. An die in Nr. 4 gegebene Konstruktion der Charakteristik des Schnittpunktes und der gemeinsamen Tangente zweier Kurven knüpfen wir die Ableitung eines allgemeinen Gesetzes, das nötigenfalls auch direkt aus Infinitesimalbetrachtungen gewonnen werden kann.

Es sei zunächst der veränderliche Punkt m in seiner jeweiligen Phase von n veränderlichen Elementen $E_1 \ldots E_n$ abhängig. Wir teilen diese Elemente in zwei Gruppen A und B, von denen wir voraussetzen, daß sie voneinander unahbängig seien, d. h. daß die Elemente, die zur Gruppe A gehören, mit denen der Gruppe B gar keine oder nur unveränderliche Bestimmungsstücke gemein haben. Dann wird die Rücksichtnahme auf die Elemente A allein die Lage des Punktes m auf eine Kurve C_1 beschränken und ebenso die bloße Rücksichtnahme auf B auf eine zweite Kurve C_2. Der Punkt m ist also wieder wie in 4 als gemeinsames Element zweier veränderlicher Kurven C_1 und C_2 bestimmt. Denkt man sich jetzt die Elemente B unverändert gelassen, während die A die ihnen zukommenden Änderungen erhalten,

so gewinnt man als Charakteristik des Punktes m einen auf der Tangente M_2 an C_2 gelegenen Punkt m_1', und analog bei partieller Änderung von B einen Punkt m_2' auf der Tangente M_1. Nach der schon in 4 gemachten Bemerkung findet sich die tatsächliche Charakteristik m' des Schnittpunktes m aus m_1' und m_2' durch Zusammensetzung von mm_1' und mm_2' nach dem *Parallelogrammgesetz.* Wir nennen kurz einen Punkt m', der sich in dieser Weise aus m, m_1' und m_2' ergibt, *die Summe von m_1' und m_2' bezüglich m.* Dann können wir sagen, die *totale* Charakteristik von m, herrührend von der Änderung sämtlicher Bestimmungsstücke, sei gleich der bezüglich m genommenen Summe der *partiellen* Charakteristiken, herrührend von den partiellen Änderungen der Gruppen A und B. Beachtet man nun, was als Charakteristik einer Kurve C für einen ihrer Punkte definiert wurde, so erkennt man, daß ein ähnlicher Satz auch für die Charakteristik von Kurven gilt, sobald man *als Summe zweier Paralleler M_1' und M_2' bezüglich eines Punktes m* eine Gerade M erklärt hat, deren Abstand von m gleich der algebraischen Summe der Abstände $\overline{mM_1'} + \overline{mM_2'}$ ist. Daraus folgt aber ferner, daß man die vorher betrachteten Gruppen A und B noch beliebig weiter spalten kann und dabei immer m' als Summe aller partieller Charakteristiken erhält, — sinngemäße Begriffsbestimmung für die Summe *mehrerer* Punkte vorausgesetzt. Es ist daher, vorläufig für Punkte und Punktörter, der Satz bewiesen: *Die totale Charakteristik eines Elementes ist gleich der Summe der partiellen Charakteristiken* genommen in bezug auf dieses Element selbst. Bedeutet (m) einen beliebigen Punktort, (M_1') und (M_2') partielle Charakteristiken desselben, so erhält man die totale Charakteristik (M'), indem man jedes Paar zusammengehöriger, paralleler Geraden M_1' und M_2' bezüglich des entsprechenden Punktes m in der angegebenen Weise summiert.

Naturgemäß kann man dieselbe Betrachtung auf die Gerade als veränderliches Element und beliebige Geradenörter anwenden. Denkt man sich in den Schnittpunkten zweier Geraden M_1' und M_2' mit einer festen Geraden M parallele Vektoren errichtet, deren Längen proportional den Werten von $\operatorname{tg} \overline{MM_1'}$ und $\operatorname{tg} \overline{MM_2'}$ sind, sucht den resultierenden Vektor und deutet ihn in entsprechender Weise als Gerade M', so nennen wir M' die *Summe von M_1' und M_2' bezüglich M.* Einfacher gelangt man zu M' auf Grund der Bemerkung, daß die Ordinaten von M' in bezug auf M als Achse sich durch Addition der zugehörigen Ordinaten von M_1' und M_2' ergeben. Als *Summe zweier Punkte m_1' und m_2' bezüglich einer auf $m_1'm_2'$ senkrechten Geraden M* hat man schließlich den Punkt m' anzusehen, dessen Abstand von M

gleich der algebraischen Summe der Abstände $\overline{m_1'M} + \overline{m_2'M}$ ist. Auf Grund dieser Definitionen gilt dann der oben ausgesprochene Satz nicht nur für veränderliche Gerade und Geradenörter, sondern mit Rücksicht auf die in 4 gegebenen Konstruktionen auch für die metrischen Elemente, sohin überhaupt für *alle* von uns in Betracht gezogenen Gebilde. Freilich entfällt für den Fall der metrischen Elemente der dann bedeutungslose Hinweis auf das Bezugselement der Summe.

Die Analogie unseres Satzes mit dem vom *totalen Differentiale* einer Funktion mehrerer Variabler ist unverkennbar.

7. Eine erfolgreiche Anwendung des vorangehenden Satzes geschieht bei der Lösung der Grundaufgabe für die in Nr. 3 erwähnte implizite Bestimmungsform eines Punktes oder einer Geraden.

Es sei der Punkt m in allen seinen Phasen gemeinsames Element der zusammengehörigen Phasen der n Kurven $C_1, C_2 \ldots C_n$. A und B seien zwei weitere Kurven, die aus den C_i mit Hilfe gegebener, unveränderlicher Elemente auf Grund eines Konstruktionsgesetzes explizite ableitbar sind und einander in allen ihren Phasen berühren sollen. Nach dem in 2 Gesagten müssen die beiden Gebilde A und B, von denen auch das eine in eine Gerade, das andere in einen Punkt ausarten kann, für ihr gemeinsames Linienelement *gleiche* Charakteristik haben. Wir bezeichnen für die Kurve C_i Tangente und Normale in m mit M_i und N_i, ferner ihre Charakteristik für M_i bezw. m_i mit m_i', M_i' und den Winkel, den C_i mit (m), also auch M_i mit $mm' \equiv M$ bildet, mit φ_i. Dann gilt, weil alle M_i' durch den Punkt m' gehen, also alle m_i' auf dem über mm' als Durchmesser errichteten Kreise liegen,

$$(1) \quad \overline{mm_1'} = \overline{mm'} \sin \varphi_1, \quad \overline{mm_2'} = \overline{mm'} \sin \varphi_2 \quad \ldots \quad \overline{mm_n'} = \overline{mm'} \sin \varphi_n.$$

Wir errichten nun zu jeder Tangente M_i in m in einem beliebigen, aber für alle gleichen, Abstand e eine Parallele M_i^0, und denken uns zunächst alle C_i bis auf C_1 unverändert und nur C_1 einer Änderung unterworfen, die ihr für m die Charakteristik M_1^0 erteilt und sie im übrigen ihrer gegebenen Schar angehören läßt. Dann entsprechen auf Grund des vorgeschriebenen Zusammenhanges zwischen den C_i einerseits und den A und B andererseits dieser Änderung gewisse Charakteristiken a_1' und b_1' von A und B für ihr gemeinsames Linienelement. Ebenso erhält man bei bloßer Variation von C_2 die Größen a_2', b_2' usf. Bei der tatsächlich vor sich gehenden Phasenänderung des Systems ist nun die Charakteristik von C_i für m nicht M_i^0, sondern M_i', daher die zugehörige partielle Charakteristik von A nicht a_i', sondern *proportional dem Produkte* $a_i' \cdot \overline{mm_i'}$. Die aufgestellte Bedingung, wonach die totale

Charakteristik von A jener von B (für das Berührungselement) gleich sein muß, liefert daher die Gleichung

$$(2)\qquad a_1'\cdot\overline{mm_1'}+a_2'\cdot\overline{mm_2'}+\cdots a_n'\cdot\overline{mm_n'} \\ =b_1'\cdot\overline{mm_1'}+b_2'\cdot\overline{mm_2'}+\cdots b_n'\cdot\overline{mm_n'}.$$

Führt man die Werte aus (1) in diese Gleichung ein, so fällt $\overline{mm'}$ heraus, und es bleibt

$$(3)\qquad (a_1'-b_1')\sin\varphi_1+(a_2'-b_2')\sin\varphi_2+\cdots(a_n'-b_n')\sin\varphi_n=0.$$

Trägt man daher die Strecken $(a_i'-b_i')$ in den Richtungen der Tangenten M_i in m auf, so gelangt man durch *geometrische Summierung* derselben *zu einem Punkte der gesuchten Tangente* M an (m). Man erkennt nun auch leicht, daß das vorstehende Verfahren überall Anwendung finden kann, wo aus der gegebenen Bedingung, welche die zusammengehörigen Phasen der C_i verknüpft, eine lineare Beziehung zwischen den Größen $\overline{mm_i'}$ gefolgert werden kann. Dies ist insbesondere der Fall, wenn zwischen den n Parametern der Kurvenscharen eine Gleichung

$$(4)\qquad f(p_1, p_2\ \ldots\ p_i)=0$$

gegeben ist. Man hat hier zunächst das Verhältnis zwischen der Charakteristik p_i' des Parameters und der Größe $\overline{mm_1'}$ zu ermitteln, was auf Grund der Definition der C_i möglich sein muß. Es sei

$$(5)\qquad \overline{mm_1'}=c_1\cdot p_1',\quad \overline{mm_2'}=c_2\cdot p_2'\ \ldots\ \overline{mm_n'}=c_n\cdot p_n'.$$

Durch Differentiation von (4) erhält man

$$(6)\qquad \frac{\partial f}{\partial p_1}p_1'+\frac{\partial f}{\partial p_2}\cdot p_2'+\cdots\frac{\partial f}{\partial p_n}p_n'=0$$

und mit Berücksichtigung von (1) und (5)

$$(7)\qquad \frac{1}{c_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}\sin\varphi_1+\frac{1}{c_2}\frac{\partial f}{\partial p_2}\sin\varphi_2+\cdots\frac{1}{c_n}\frac{\partial f}{\partial p_n}\sin\varphi_n=0,$$

woraus zu ersehen ist, daß jetzt die Größen $\frac{1}{c_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$ in der früher angegebenen Weise zu summieren sind.[1])

1) Den Keim zu der hier entwickelten Konstruktion für den Fall, daß die gegebene Bedingung die Form einer Gleichung hat, enthält nach M. Cantor, a. a. O. III. S. 153 ff. u. S. 258 ff. schon eine Abhandlung von Fatio de Duillier (1664—1753). Sie behandelt den speziellen Fall, in dem die Kurvenscharen Büschel konzentrischer Kreise sind. Die Methode ist von Poinsot auf Parallelscharen im allgemeinen ausgedehnt worden (Journ. de l'école polyt. 1806 cah. 13) und nach ihm benannt in zahlreiche Lehrbücher übergegangen. Vgl. Koenigs, Leçons de cinématique, Paris 1897, S. 88 ff., Scheffers, a. a. O. S. 86. Hierher gehören auch einige Konstruktionen von d'Ocagne a. a. O. S. 268 ff., der auch einen dualen Fall behandelt (S. 277 f.).

Die ganze Untersuchung kann fast unverändert auf den dualen Fall übertragen werden. Es sei M die gemeinsame Tangente der n Kurven C_i, m_i der Berührungspunkt, m_i', M_i' die Charakteristik von C_i für M_i bezw. m_i, ferner d_i der Abstand des Punktes m_i vom Berührungspunkt $m \equiv MM'$. Dann tritt an Stelle von (1) wenn man statt des Abstandes MM_i' die Entfernung $\overline{m_i m_i'}$ schreibt:

$$(1') \quad \overline{m_1 m_1'} = \operatorname{tg} \overline{MM'} \cdot d_1, \quad \overline{m_2 m_2'} = \operatorname{tg} \overline{MM'} \cdot d_2 \ldots \overline{m_n m_n'} = \operatorname{tg} \overline{MM'} \cdot d_n$$

und an Stelle von (3), da jetzt $\operatorname{tg} \overline{MM'}$ herausfällt,

$$(3') \qquad (a_1' - b_1')d_1 + (a_2' - b_2')d_2 + \cdots (a_n' - b_n')d_n = 0.$$

Denkt man sich daher in den Berührungspunkten m_i' *den Werten* $(a_i' - b_i')$ proportionale Massen wirksam, so ist ihr Schwerpunkt der gesuchte Punkt m. Hat die Bedingung die Form der Gleichung (4), so sind die $(a_i' - b_i')$ durch $\frac{1}{c_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$ zu ersetzen. Die Konstruktion kann in der Weise ausgeführt werden, daß durch die Punkte m_i Gerade M_i^0 gezogen werden, für die $\operatorname{tg} \overline{MM_i^0}$ einen der Größe $(a_i' - b_i')$ bezw. $\frac{1}{c_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$ proportionalen Wert hat. Die Gerade, deren Ordinaten bezüglich M die Summe der zugehörigen Ordinaten aller M_i^0 sind, geht durch den gesuchten Berührungspunkt m.

II. Drei und mehr Phasen des veränderlichen Systems. Synthetische Kurvendefinition zweiter Art.

8. Wir betrachten wieder ein zwangläufig veränderliches System S und denken uns zu jedem seiner Elemente E in einer bestimmten Phase die Charakteristik E' ermittelt. Bei Festsetzung der Charakteristik des unabhängig veränderlichen Elementes E_1 konnte eine Größe, die wir jetzt mit s bezeichnen, willkürlich gewählt werden. Fassen wir jedoch s als gegeben auf, so bilden die E und E' zusammen wieder ein zwangläufiges Sytsem — es sei mit $S + S'$ bezeichnet —, das wir der gleichen Betrachtung unterwerfen können. Dabei sei vorausgesetzt daß jetzt zur Bestimmung der Charakteristik E_1' von E_1, das wir auch im Systeme $S + S'$ als unabhängig veränderliches Element beibehalten, *dasselbe s gewählt* werde, sodaß die E' Charakteristiken der E bleiben. Es steht uns dann noch frei, für s als metrisches Element von $S + S'$ eine willkürliche Größe s', die auch Null sein kann, als Charakteristik zu bestimmen, und wir erhalten nach Annahme irgend eines solchen s' für *jedes Element* E' von $S + S'$ eine *Charakteristik* E''. Wir nennen die Elemente E'', die von zwei willkürlich bestimmten

Größen s und s' abhängen, die *Charakteristiken zweiter Ordnung der Elemente* E. In derselben Weise definieren wir die Charakteristiken E''', $E^{(IV)}$.., $E^{(n)}$ dritter, vierter ... $n$ter Ordnung, die drei, vier ... n willkürliche Größen enthalten. Es ist sofort klar, daß die E', E''...$E^{(n)}$ mit E zusammen ein *Äquivalent für* $n+1$ *aufeinanderfolgende Phasen* von E bilden. Die Charakteristiken beliebiger Ordnung eines Punktes, einer Geraden, eines metrischen Elementes sind immer wieder Elemente derselben Art. Die eines Punkt- oder Geradenortes (m) oder (M) sind abwechselnd Geraden- oder Punktörter $(M')(m'')$ ... bezw. $(m')(M'')$ ...

Für alle im ersten Teile dieser Arbeit betrachteten Bestimmungsformen eines Elementes E, für die wir eine explizite Bestimmungsform von E' gefunden haben, können wir dieselbe Aufgabe auch bezüglich der Charakteristiken höherer Ordnung E'', E'''... sofort lösen. Es handelt sich noch darum, zu zeigen, in welcher Weise aus der Charakteristik $n$ter Ordnung eines Elementes jene Elemente gefunden werden können, die in der Infinitesimalgeometrie zur *Charakterisierung von* $n+1$ *aufeinanderfolgenden Phasen* eines als *unabhängig* veränderlich betrachteten Elementes verwendet werden. Wir denken hier zunächst an Scharen von Punkten und Geraden (m) bezw. (M), für welche die Angabe der Krümmungen bis zur $(n-1)$ten Ordnung ein allgemein verwendetes Äquivalent für $(n+1)$ Nachbarphasen von m bezw. M bildet.[1]) Nun ist bekannt, daß der erste Krümmungsmittelpunkt n einer Kurve C nichts anderes als der Berührungspunkt der veränderlichen Kurvennormalen N mit ihrer Einhüllenden (N) bezw. (n) ist, n_1 aus (N) in derselben Weise abgeleitet wird usf. Da wir nun die Normale N an (m) und (M) mit Hilfe von m' oder M' konstruieren können, so sind wir auch imstande, aus m'' oder M'' den Krümmungsmittelpunkt n zu finden, also für alle Kurven, für die wir das „Tangentenproblem" gelöst haben, auch die *Probleme höherer Ordnung zu erledigen.* Insbesondere soll noch der Satz ausgesprochen werden: Ist eine Kurve als Ort von Punkten, Geraden oder Kreisen in der Weise definiert, daß sich alle Phasen des erzeugenden Elementes in steter Folge mit *Zirkel und Lineal* konstruieren lassen, so kann man mit *denselben Hilfsmitteln* auch die *Krümmungsmittelpunkte beliebiger Ordnung* finden.[2])

Die am Ende von Abschnitt 4 gemachte Bemerkung bezüglich der festen Bestimmungsstücke F einer durch eine synthetische Definition

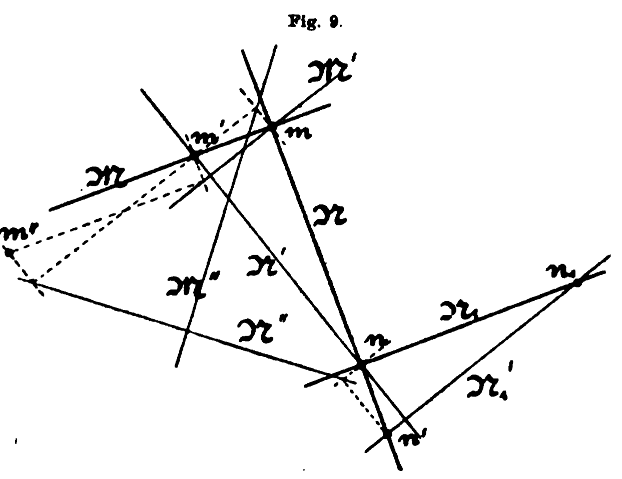
---

1) Ein ähnliches Mittel, um mehr als zwei Phasen eines *beliebigen* (unabhängig) veränderlichen Elementes zu charakterisieren, ist nicht bekannt.

2) Dieser Satz findet sich zum Teil schon bei Petersen. Vgl. Jahrbuch a. a. O. S. 506.

erster Art gegebenen Kurve hat jetzt sinngemäße Ergänzung dahin zu erfahren, daß zur Lösung der Infinitesimalprobleme $n$ter Ordnung stets $n+1$ aufeinanderfolgende Phasen des Elementes E gegeben sein müssen, als dessen Ort F erscheint. Tritt ein Punkt m oder eine Gerade M als unabhängig veränderliches Element auf, so müssen von dem Ort (m) bezw. (M) die $n-1$ ersten Krümmungsmittelpunkte $n, n_1 \ldots$ gegeben sein. Daß aus diesen bei willkürlichen Annahmen über die $s, s' \ldots$ die Charakteristiken $m', m'' \ldots$ bezw. $M', M'' \ldots$ gefunden werden können, lehrt die folgende Betrachtung. Für jeden Punkt m mit der Charakteristik m' (Fig. 9) gewinnen wir aus m'' zunächst die Charakteristik M' der Tangente $M \equiv mm'$ an (m) und für jede Gerade M mit der Charakteristik M' aus M'' die Charakteristik m' des Berührungspunktes $m \equiv MM'$ mit (M). In beiden Fällen gibt die durch m' zu M' gezogene Senkrechte N', die Charakteristik der Normalen N, in ihrem Durchschnittspunkt mit N das erste Krümmungszentrum n von (m) bezw. (M) Umgekehrt kann man aus m und n, wenn $\overline{mm'} = s$ angenommen wird, den Punkt m' auf der Senkrechten M zu $mn \equiv N$ und weiter nach Verfügung über die Größe s'' auch m'' finden. Daher sind zur Bestimmung der Charakteristik m''' von m'' bloß die Charakteristiken von m, n und s'' erforderlich. Man erhält aber n', das auf N liegen muß, mit Hilfe von $N_1' \perp N'$ aus n_1, ebenso n_1' aus n_2 usf. Es ist daher tatsächlich möglich, aus $n, n_1, n_2 \ldots n_i$ die Punkte $m'', m''', m^{(IV)} \ldots m^{(i+1)}$ zu finden.

Fig. 9.



Der Umstand, daß die Probleme höherer Ordnung sich durchweg in solche der ersten Ordnung auflösen, zeigt wieder die *Analogie* der vorliegenden Untersuchungen mit dem Gedankengang der *Differentialrechnung*.

9. Als synthetische *Kurvendefinition zweiter Art* führen wir die folgende Bestimmungsweise einer Kurve ein. Gegeben seien eine Anzahl fester Elemente $F_1, F_2 \ldots$, ferner n Phasen eines veränderlichen, eigentlichen, Elementes E und ein Gesetz, nach welchem aus den

Elementen F und den n Phasen von E eine und nur eine $(n+1)$te Phase des letzteren (oder auch eine endliche Anzahl solcher) abgeleitet werden kann. Die gewonnene $(n+1)$te Phase bestimmt mit $(n-1)$ der früheren eine $(n+2)$te usf., sodaß im allgemeinen eine einfach unendliche Schar von Phasen definiert ist. Je nachdem das Operationsgesetz nur explizite oder auch andere Bestimmungsformen enthält, können wir die Definitionen zweiter Art explizite oder implizite nennen, und ebenso auch den Begriff der Konstruierbarkeit hierher übertragen.

Uns soll nur der spezielle Fall beschäftigen, in dem die $n+1$ Phasen von E alle unendlich benachbart liegen, somit die Definition die *Charakteristik $n$ter Ordnung des unabhängig veränderlich gedachten E* liefert. Für den Punkt als Element E und $n=1$ besteht die Definition in der Angabe der Tangentenkonstruktion für die Kurve; ist $n=2$, so liefert sie zu jedem gegebenen oder willkürlich gewählten Linienelement den ersten Krümmungsmittelpunkt usf. Das analytische Analogon zu den jetzt betrachteten Kurvendefinitionen ist die Bestimmung der Funktion einer Veränderlichen durch *Differenzen- bezw. Differentialgleichungen.*

Die Aufgaben, welche der konstruktiven Infinitesimalgeometrie mit Rücksicht auf die Kurvendefinitionen zweiter Art erwachsen[1]), (unendlich nahe Lage der $n+1$ Phasen vorausgesetzt) bestehen in der Ermittelung der Charakteristiken $(n+2)$ter und höherer Ordnung des erzeugenden Elementes E. Diese erhält man aber durch die Charakteristiken erster, zweiter ... Ordnung jenes Elementes, das zur Charakterisierung der $(n+1)$ten Phase von E diente und aus gegebenen Stücken auf Grund der Definition ableitbar war. Daher sind die hier auftretenden Aufgaben ebenfalls auf die früher behandelten zurückgeführt.

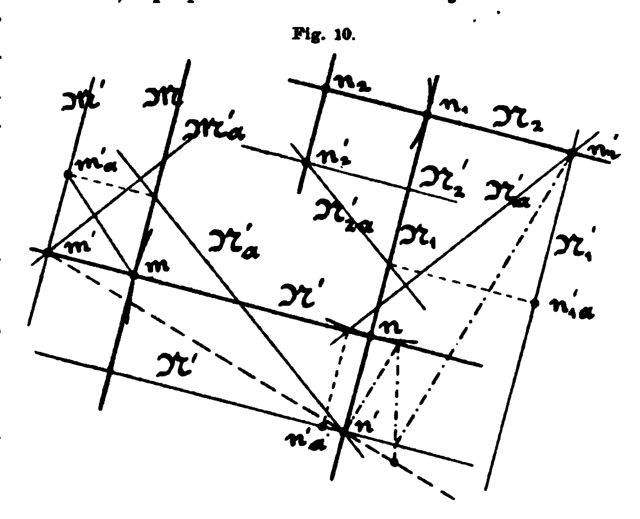
Die Möglichkeit, eine Kurve in der genannten Weise durch eine Infinitesimaleigenschaft zu bestimmen und aus einer derartigen Definition die weiteren Infinitesimalkonstruktionen abzuleiten, gibt uns ein für die praktische Behandlung vieler spezieller Aufgaben wichtiges Prinzip. Haben wir nämlich für irgend eine Kurve eine Tangentenkonstruktion abgeleitet, so können wir aus dieser, ohne erst auf die ursprüngliche Definition der Kurve zurückzugehen, die Krümmungsmittelpunkte ermitteln usf. Es ist dies ein tatsächlich vielfach verwendeter, wenn auch nicht ausdrücklich hervorgehobener Grundsatz.

10. Es sei C (Fig. 10) ein beliebiger Punkt- oder Geradenort,

1) Es ist hierbei nur an Differentiationsprobleme gedacht. Doch dürfte die Behandlung inverser Aufgaben auf Grund der hier abgeleiteten Begriffe nicht aussichtslos sein.

mM ein Linienelement desselben, $M'm'$ die zugehörige Charakteristik. Die dem mM entsprechenden Linienelemente der ersten, zweiten ... Evolute von C seien mit nN, n_1N_1 ... bezeichnet. Da jede veränderliche Kurve mit der Reihe ihrer sukzessiven Evoluten ein zwangläufig veränderliches System bildet, so entsprechen den genannten Linienelementen der letzteren ebenfalls bestimmte Charakteristiken $n'N'$, $n_1'N_1'$... Die Angabe der $m, n, n_1 \ldots n_i$ und der zugehörigen $M', N', N_1' \ldots N_i'$

Fig. 10.

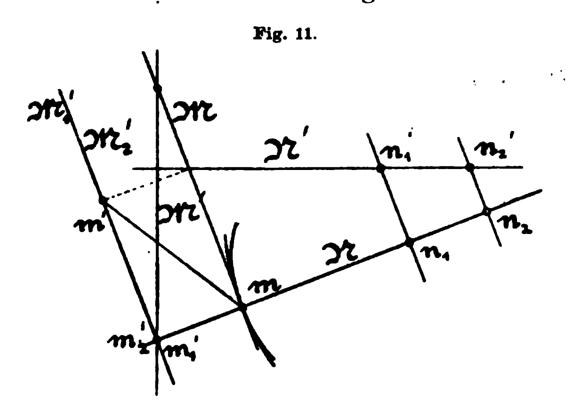


(oder, was dasselbe ist, der $M, N, N_1 \ldots N_i$ und $m', n', n_1' \ldots n_i'$) ist ein Äquivalent für die Kenntnis zweier aufeinanderfolgender Phasen von $i + 2$ benachbarten Linienelementen der Kurve C.

Jede Gerade M_a' durch m' ist nach Abschn. 1 eine Charakteristik von M entsprechend einer gewissen Zuordnung a zwischen den Tangenten der aufeinanderfolgenden Phasen von C. Eine jede solche Zuordnung a zwischen den M zieht auch eine Zuordnung zwischen den ersten, zweiten ... Normalen N, N_1 ... der Nachbarphasen von C nach sich, die je einen Strahl N_a', N_{1a}' ... durch n', n_1' ... als Charakteristik bedingt. Da aber die M, N, N_1 ... aufeinander sukzessive normal stehen, bilden die M_a', N_a', N_{1a}' bei Änderung der Zuordnung a kongruente Strahlenbüschel mit m' n' n_1' ... als Scheitel. Die tangentenweise Zuordnung zweier Kurven bedingt nun immer auch eine bestimmte punktweise Beziehung zwischen ihnen, die im vorliegenden Fall leicht abgeleitet werden kann. m ist der stete Schnittpunkt der Geraden M und N. Die Charakteristik von M für den Punkt m ist immer M', die von N ist für jede Zuordnung mit Hilfe von N_a' gegeben. Die Charakteristik m_a' von m entsprechend der Zuordnung a wird daher erhalten, indem man durch den Schnittpunkt MN_a' die Parallele zu N zieht und sie mit M' zum Schnitte bringt. In gleicher Weise ergibt sich mit Hilfe von N_{1a}' der Punkt n_a' auf N' usf. Die Punktreihen auf M', N', N_1' ... sind sämtlich untereinander ähnlich und mit den Strahlenbüscheln m', n', n_1' ... projektiv.

Die vorstehenden Betrachtungen finden zunächst Verwertung in jenen Fällen, in denen von einer veränderlichen Kurve des Systems zum Zwecke der Ableitung weiterer Elemente mehr als ein Punkt, bezw. eine Tangente in Betracht kommt. Es sei z. B. (Fig. 11) mM gemeinsames Linienelement zweier einander stetig berührender Kurven C_1 und C_2; man soll die Charakteristiken von m und M ermitteln. Zu diesem Behufe müssen von den beiden Kurven die ersten Krümmungsmittelpunkte

Fig. 11.



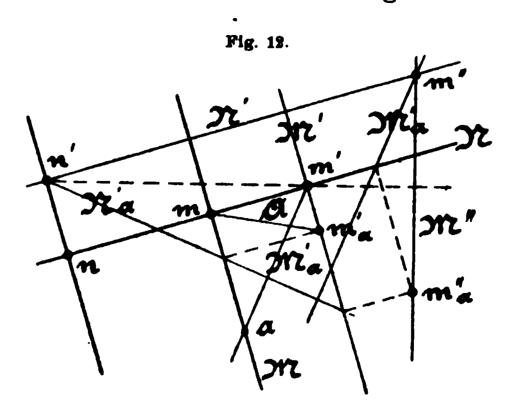
n_1 und n_2 und die zugehörigen Charakteristiken der ersten Evoluten n_1' und n_2' gegeben sein. Die Verbindungsgerade $n_1'n_2'$ ist Charakteristik N' der gemeinsamen Normale, die durch $m_1' \equiv m_2'$ gezogene Senkrechte dazu ist Charakteristik M' von M, die Projektion von $N'M$ auf $M_1' \equiv M_2'$ liefert m'.

Es ist schließlich von Interesse, den Zusammenhang zwischen den jetzt betrachteten Elementen $n'N'$, $n_1'N_1' \ldots$ (Fig. 10) und den Normalen, Krümmungszentren usf. der charakteristischen Punkt- und Geradenörter C' von C kennen zu lernen. Betrachtet man die Kurve C in zweiter Annäherung als Kreis mit dem Zentrum in n, so entspricht ihm nach Abschnitt 5 als Ort der M' ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf N' liegt. Daher ist N' die Normale von (M') im Berührungspunkt der Tangente M und ebenso N_1' Normale von (N') usf. Man erkennt also, daß die Folge der Geraden M', N', $N_1' \ldots$ für (M') dieselbe Bedeutung hat, wie die der Geraden M, N, $N_1 \ldots$ für (M) selbst. Minder einfach sind die analogen Beziehungen für (m'). Faßt man m' in jeder Phase als Schnittpunkt von M' und N auf, so lassen sich auf Grund der in dieser Arbeit entwickelten Methoden Konstruktionen für die Reihe der Krümmungsmittelpunkte von (m') ableiten. Um jedoch später zu Besprechendem nicht vorzugreifen, sei hier nur angegeben: $m'n'$ ist die Normale von (m'), $n'n_1'$ die von (n') usf. Den ersten Krümmungsmittelpunkt von (m') erhält man, indem man in n' und m' die Senkrechten zu $n'm'$ zieht, sie mit N bezw. N' zum Schnitte bringt und schließlich die Verbindungsgerade der so erhaltenen Schnittpunkte mit $m'n'$ schneidet.[1])

1) Vgl. dazu die Definitionen in Abschnitt 13. n' ist gedrehte Charakteristik von m', n_1' die von n' usf., wenn n als gedrehte Charakteristik von m an-

11. Drei aufeinanderfolgende Phasen einer veränderlichen Kurve (m) Fig. 12 sind durch das charakteristische Geradengebilde (M') und das charakteristische Punktgebilde (m'') des letzteren gegeben. Da N' die jeweilige Normale von (M') ist, liegt jedes m'' auf der zugehörigen N'. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Charakteristik M'' von (m') für das ins Auge gefaßte Element m' zu finden. Dem Vorangehenden gemäß muß M'' zu $m'n'$ normal stehen. m' ist der stete Schnittpunkt von M' und N. Man erhält also einen Punkt von M'', indem man M' und N zusammengehörige Änderungen erteilt, das sind aber solche, die zueinander normal stehende Charakteristiken bedingen. Wir ziehen durch m'' eine Gerade M''_a normal zu der durch n' gehenden N'_a und finden in bekannter Weise m''_a. Man erkennt, daß M'', der Ort der m''_a, als Erzeugnis zweier ähnlicher Parallelstrahlbüschel entsteht und erstens wirklich auf $m'n'$ senkrecht ist, zweitens durch m'' hindurchgeht. Jedem Punkte m'_a von M' entspricht eine gewisse durch m'' gehende Gerade M''_a als Charakteristik von M' gemäß der Zuordnung a; und jedem Strahle M'_a durch m' entspricht in dualer Weise ein Punkt auf M''. Beide Beziehungen, die durch den Punkt n' vermittelt werden, sind, wie leicht einzusehen, linear.

Fig. 12.

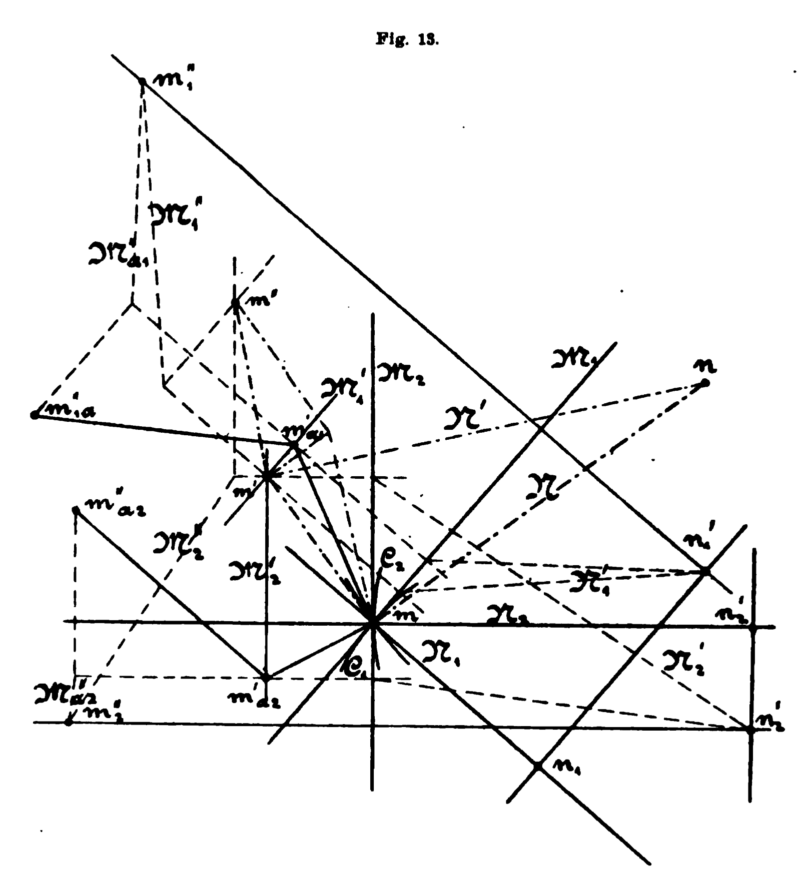


Ist etwa der Krümmungsmittelpunkt n (Fig. 13) des Ortes (m) des Schnittpunktes zweier beliebig veränderlicher Kurven C_1 und C_2 zu ermitteln, so hat man folgendermaßen vorzugehen. Die Definitionen von C_1 und C_2 ergeben zunächst Konstruktionen der beiden Tangenten M_1 und M_2 sowie der ersten Krümmungsmittelpunkte n_1 und n_2. Ferner erhält man nach dem in 5 angegebenen Verfahren für jede Kurve einen Punkt m'_{a1} und m'_{a2} der betreffenden Charakteristiken M'_1 und M'_2, deren Richtungen schon bekannt sind, und wendet man dieses Verfahren auch auf die ersten Evoluten (N_1) und (N_2) an, so gewinnt man deren Charakteristiken n'_1 und n'_2. Die Konstruktion, die zu den Punkten m'_{a1} und m'_{a2} geführt hat, liefert auch deren Charakteristiken m''_{a1} und m''_{a2}. Projiziert man die letzteren auf die in m'_{a1} und m'_{a2} zu M'_1 und M'_2 errichteten Normalen, so erhält man je einen Punkt von M''_{a1}

gesehen wird. Die Konstruktion des Krümmungszentrums benützt die für die Richtung von N versetzte Charakteristik von $n'm'$.

und M''_{a2}, d. s. Charakteristiken von M'_1 bezw. M'_2 für die Zuordnung in der Richtung mm'_{a1} bezw. mm'_{a2}. Die Richtung von M''_{a1} und M''_{a2} findet man mit Hilfe von N'_{a1} und N'_{a2}, die n'_1 und n'_2 mit den Projektionen von m'_{a1} und m'_{a2} auf M_1 und M_2 verbinden. Da n'_1 und n'_2 bekannt sind, hat man nun auch die Punkte m''_1 und m''_2, durch welche alle Charakteristiken von M'_1 und M'_2 hindurchgehen. Die

Fig. 13.



Charakteristik m' von m ist der Schnittpunkt von M'_1 und M'_2. Projiziert man m' auf die Tangenten M_1 und M_2, verbindet die Projektionen mit n'_1 bezw. n'_2, so hat man in den Verbindungsgeraden N'_1 und N'_2 Charakteristiken von N_1 und N_2 gefunden, die der Zuordnung in der Richtung mm' entsprechen. Die durch m''_1 und m''_2 gehenden Normalen zu N'_1 bezw. N'_2 sind die in Betracht kommenden Charakteristiken M''_1 und M''_2 von M'_1 und M'_2, mit deren Hilfe man sofort m'' und daraus den Krümmungsmittelpunkt n von (m) findet. Die ganze Konstruktion kann auf den dualen Fall übertragen werden, und es hat

prinzipiell keine Schwierigkeit, durch weitere „Differentiationen" zu Krümmungsmittelpunkten höherer Ordnung zu gelangen.

12. Einer Erwähnung bedarf noch die Behandlung analytischer Beziehungen in dem Falle, in dem Probleme höherer Ordnung in Frage kommen. Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ n metrische Elemente, $x_1', x_2' \ldots x_n'$ ihre Charakteristiken, so folgt, wie in 4 erwähnt, aus $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'.$$

Ebenso ergibt sich

$$y'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} x_1'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} x_2'^2 + \cdots + 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} x_1' x_2' + \cdots\right] + \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'' + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2'' + \cdots$$

usw.

Zu den speziellen Fällen, in denen von dieser allgemeinen Gleichung Gebrauch gemacht wird, gehören namentlich die vielfach untersuchten Konchoiden[1]), für die Funktion f die Form einer Summe von Gliedern gleicher Dimension (meist plus oder minus eins) besitzt.

Ist $n = 1$, so hat man

$$\begin{aligned} y &= f(x), \\ y' &= f'(x) \cdot x', \\ y'' &= f''(x) \cdot x'^2 + f'(x) x'' \text{ usf.} \end{aligned}$$

Enthält eine Kurvendefinition erster Art eine derartige Bestimmungsform eines Elementes y, so kann man durch Änderung der funktionalen Beziehung f im allgemeinen jede beliebige Kurve mit Hilfe desselben erzeugenden Systems darstellen. Man sagt dann auch, die Kurven seien durch ihre Gleichungen analytisch definiert, u. zw. bezüglich eines Koordinatensystemes, das eben durch das (zwangläufig) veränderliche erzeugende System bestimmt wird. Was unsere Untersuchung in diesem Falle leistet, ist gewissermaßen eine Ergänzung zu den unmittelbaren Resultaten der Differential-Analysis. Sie zeigt, in welcher Weise die geometrischen Charakteristiken der erzeugenden Elemente (Punkte oder Gerade) nämlich Tangente, bezw. Berührungspunkt, Krümmungszentra usf. aus den sukzessiven Ableitungen der Funktion f sich ermitteln lassen.

Wählt man x als unabhängig-veränderliches Element des Systems, so kann zur Vereinfachung $x'' = x''' = \cdots = 0$ gesetzt werden, also $x' = a = \text{const.}$, so daß

$$y = f(x), \tag{1}$$

$$y' = af'(x), \tag{2}$$

$$y'' = a^2 f''(x) \text{ usf.} \tag{3}$$

1) Vgl. auch Abschnitt 16.

Betrachtet man die Gleichungen (2), (3) als Definitionsgleichungen neuer Kurven für dasselbe Koordinatensystem, für das (1) gilt, wobei die y', y'' ... an Stelle von y treten, so erhält man die sog. Differentialkurven von (1), die Sobotka[1]) mit vielem Erfolge zur Behandlung konstruktiver Infinitesimalaufgaben benutzt hat.

Enthält eine Kurvendefinition erster Art die in Nr. 7 behandelte implizite Bestimmungsform eines Elementes, so findet man auf Grund der angegebenen expliziten Bestimmung der Tangente, bezw. des Berührungspunktes den ersten Krümmungsmittelpunkt und die folgenden. Hat die Beziehung, welche die zusammengehörigen Phasen der n Kurven verknüpft, die Form einer Gleichung, so muß man die Charakteristiken der an genannter Stelle benützten Ausdrücke $\frac{1}{c_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$ ermitteln. Das c_i ist durch Konstruktion gefunden, daher seine Charakteristik auf demselben Wege bestimmbar. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial p_i}$ müssen total nach sämtlichen p_i differenziert werden, wobei an Stelle der p_i' die durch die Konstruktion der Tangente (bezw. des Berührungspunktes) gefundenen Werte einzusetzen sind.

III. Beispiele.

13. Die Hauptergebnisse der vorangegangenen Untersuchung sollen durch einige Beispiele erläutert werden. Zunächst seien einige konstruktive Hilfsmittel hervorgehoben, die bei Durchführung der Aufgaben Verwendung fanden.

a) *Die Charakteristik des unabhängig veränderlichen Elementes.* — Wählt man die Größen s, s', s'' ... (vgl. Abschn. 8) nicht völlig willkürlich, sondern in irgend einer Beziehung zu einem der Elemente des veränderlichen Systems, so wird die ganze durchzuführende Konstruktion oft sehr bedeutend vereinfacht.[2]) Ist z. B. (Fig. 14) der Radius r des Kreises K mit dem festen Mittelpunkte f unabhängig veränderlich, so nehmen wir $r' = -r$ an, so daß das charakteristische Tangentengebilde für K das Strahlenbüschel in f wird. Der analoge Vorgang bei analytischer Behandlung der Probleme besteht darin, daß an Stelle einer willkürlichen unabhängigen Variablen ein (metrisches) Element gesetzt wird, das für die vorliegende Aufgabe bestimmte geometrische Bedeutung hat.

---

1) J. Sobotka, Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralkurven. Sitzungsber. d. k. Akad. Wien 1898. Bd. 107, Abt. 2a.

2) Vgl. Burmester a. a. O. S. 66ff., woselbst zahlreiche namentlich mit Zirkel und Lineal konstruierbare Kurven in äußerst eleganter Weise behandelt sind.

b) Als *gedrehte Charakteristik* eines Punktes p definieren wir jenen Punkt p_1, der aus der Charakteristik p' durch eine in bestimmtem Sinne vor sich gehende Vierteldrehung um p hervorgeht.[1] In Übereinstimmung mit den Definitionen in **1** ergibt sich demgemäß als gedrehte Charakteristik einer Kurve für einen ihrer Punkte eine zur Kurvennormale N parallele Gerade M_1 im Abstande $\overline{NM_1} = \overline{MM'}$. Es bedarf keiner besonderen Erwähnung, in welcher Weise die einfachen Konstruktionen für die Charakteristik des Schnittpunktes zweier Kurven, sowie für die der Länge einer durch ein Punktepaar gegebenen Strecke sich mit Hilfe der gedrehten Charakteristiken ausführen lassen. Wichtig ist, daß die gedrehten Charakteristiken A_1, B_1, $C_1 \ldots$ einer Geraden G für ihre Punkte $a, b, c \ldots$ ein zu $a, b, c \ldots$ ähnliches Parallelstrahlbüschel bilden und insbesondere alle in die im Drehpunkt GG' zu G errichtete Normale fallen, sobald dies für einen einzigen Punkt außer GG' selbst zutrifft. Offenbar ist dies der Fall, sobald $\operatorname{tg} \overline{GG'} = 1$, $\overline{GG'} = 45^0$ ist; dann stellen die Charakteristiken sämtlicher uneigentlicher Elemente des Systems die Ableitungen dieser Größen nach dem Winkel ϑ dar, den G mit irgend einer festen Geraden bildet. Ist z. B. die gedrehte Charakteristik eines Punktes m der Krümmungsmittelpunkt n von (m), so ist das zweite Krümmungszentrum n_1 gedrehte Charakteristik von n_1, n_2 die von $n_1 \ldots$ usf. Gleichzeitig ist $\overline{nn_1}$ die Ableitung von $\overline{mn} = \varrho$ nach dem Tangentenwinkel ϑ, $\overline{n_1 n_2}$ die von $\overline{nn_1} = \varrho_1$ usw.

c) Die konstruktive Lösung der häufig wiederkehrenden Aufgabe, aus den gedrehten Charakteristiken A_1, B_1 einer Geraden G für zwei ihrer Punkte a und b die für einen dritten Punkt c zu ermitteln, erleichtern wir durch Einführung der *versetzten Charakteristik* einer Geraden. Bringt man nämlich die Strahlen A_1, B_1, $C_1 \ldots$ mit den in $a, b, c \ldots$ zu irgend einer Richtung R gezogenen Parallelen zum Schnitte, so erhält man als Erzeugnis der beiden ähnlichen Parallelstrahlenbüschel eine *Gerade*, die durch den Drehpunkt von G geht, und die *für die Richtung von R versetzte Charakteristik von G heißen soll.*[2]

14. Als erstes Beispiel diene die gewöhnliche *Parabel*. Man gelangt zu einem ihrer Punkte m in folgender Weise. Um den festen Punkt f als Zentrum (Fig. 14) wird ein Kreis K mit beliebigem Radius $\overline{fm} = r$ beschrieben und dieser mit einer Parallelen A zur festen Geraden A_0 im Abstande $\overline{AA_0} = a$ geschnitten. Dabei ist

$$a = r. \tag{1}$$

1) Die „gedrehte Geschwindigkeit" wurde von Schadwill eingeführt, a. a. O. § 13. Sie ist vielfach verwendet bei Burmester a. a. O. S. 23 ff.

2) Bei Verwendung der versetzten Charakteristiken lassen sich die meisten Mannheimschen Konstruktionen von unserem Gesichtspunkt aus deuten.

Die Charakteristik von r, dem unabhängig-veränderlichen Element, wählen wir $r' = \overline{mf}$, daher ist die Charakteristik von K für m, die durch f gehende Normale K'_m zu mf. Aus (1) folgt durch Differentiation

$$a' = r', \tag{1'}$$

daher ist A_0 Charakteristik von A für alle seine Punkte. $m' \equiv A_0 K'_m$ ist ein Punkt der Tangente, und man erkennt, daß diese den Winkel von fm mit der Achsenrichtung halbiert.

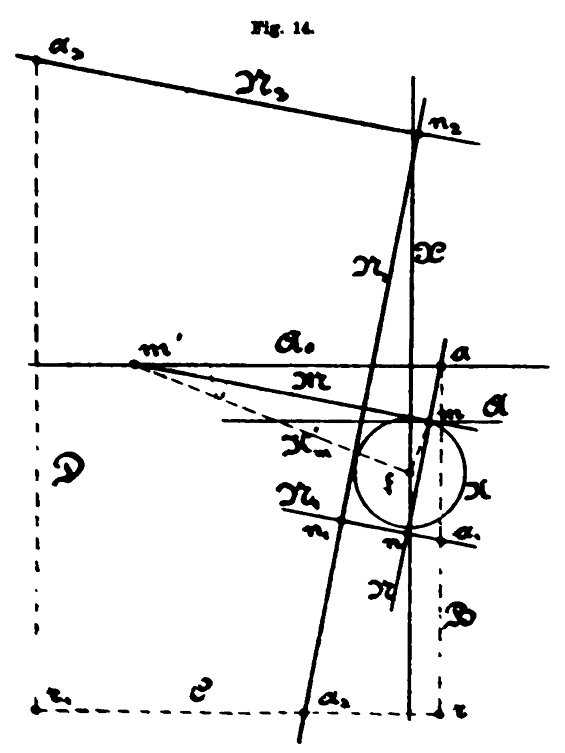


Fig. 14.

Bezeichnet R den Strahl mf, N die Kurvennormale in m, X die Achse, so haben wir zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes n die Gleichung

$$\overline{NX} = \tfrac{1}{2}\overline{RX} \tag{2}$$

als Kurvendefinition zweiter Art. Betrachtet man m' als Charakteristik von m, so ist $\sphericalangle fmm' = mam'$ gleich dem Winkel, den R mit seiner durch f gehenden Charakteristik R' einschließen muß. Nun gibt aber die Differentiation von (2) mit Rücksicht auf die Ergebnisse in Abschnitt 4

$$\text{tg}\, NN' = \tfrac{1}{2}\,\text{tg}\, RR'. \tag{2'}$$

Macht man daher $mn = 2am$, so ist $m'n \equiv N'$ die Charakteristik von N und n der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Ausgehend von der Beziehung

$$mn = 2am \tag{3}$$

konstruieren wir n_1, nachdem wir, die bisherige Annahme fallen lassend, n als gezirchte Charakteristik von m gewählt haben. Aus (3) folgt

$$(mn)' = 2(am)'. \tag{3'}$$

und wir wissen bereits, daß $(\overline{mn})'$ nichts anderes als den zweiten Krümmungshalbmesser $\overline{nn_1}$ darstellt. Die gedrehte Charakteristik a_1 von a ergibt sich als Schnittpunkt von B, der in a zu A_0 errichteten Senkrechten, mit der zweiten Normalen N_1. $\overline{a_1 n}$ ist Charakteristik der Strecke $\overline{am}$. Wir haben in

$$(4) \qquad \overline{nn_1} = 2\overline{a_1 n}$$ [1]

zugleich den Ausgangspunkt für die Konstruktion von n_2. Die gedrehte Charakteristik a_2 von a_1 ist der Schnittpunkt von N_2 mit C, der gedrehten Charakteristik von B für deren Punkt a_1. Da der Drehpunkt von B unendlich fern liegt, hat man $\overline{a_1 r} = \overline{aa_1}$ zu machen und durch r die Normale zu B zu ziehen. $\overline{a_2 n_1}$ ist die Charakteristik der Länge $\overline{a_1 n}$, und aus

$$(4') \qquad (\overline{nn_1})' = 2(\overline{a_1 n})'$$

erhalten wir

$$(5) \qquad \overline{n_1 n_2} = 2\overline{a_2 n_1}.$$

Die gedrehte Charakteristik D von C für a geht durch r_1, wenn $\overline{a_2 r_1} = 2\overline{ra_2}$ ist; denn $\overline{ra_2}$ ist die Charakteristik der Länge $\overline{aa_1}$, und C ist eben dadurch bestimmt, daß sein Abstand von der festen Geraden A_0 gleich $2\overline{aa_1}$ ist. Der Schnittpunkt von D und N_3 gibt a_3. Wieder ist $\overline{n_3 a_3}$ Charakteristik der Länge $a_2 n_1$ und mit $\overline{n_2 n_3} = 2\overline{a_3 n_2}$ erhält man den vierten Krümmungsmittelpunkt n_3 der Parabel. Eine Fortsetzung des Verfahrens bietet keine weiteren Schwierigkeiten.

15. Die höheren Krümmungsmittelpunkte der zentrischen Kegelschnitte ermitteln wir auf Grundlage der von Maclaurin herrührenden bekannten Konstruktion des zweiten Krümmungszentrums n_1. Haben $m, n, n_1 \ldots$ (Fig. 15) dieselbe Bedeutung wie früher, während o den Mittelpunkt der Kurve bezeichnet, und errichtet man $np \perp mn$, so ist nach Maclaurin $\overline{nn_1} = 3\overline{pn}$.[2] Wählt man n als gedrehte Charakteristik von m, so ist no die für die Richtung von N versetzte Charakteristik von mo. Ihr Schnittpunkt s mit der durch p gehenden Parallelen zu N ist ein Punkt der gedrehten Charakteristik von mo für den Punkt p. Fällt man daher $sp_1 \perp mo$, so ist p_1 auf N_2 die gedrehte Charakteristik von p, $\overline{n_1 p_1}$ Charakteristik der Länge $\overline{np}$. Daher gibt $\overline{n_1 n_2} = 3\overline{p_1 n_1}$ den dritten Krümmungsmittelpunkt n_2.[3]

---

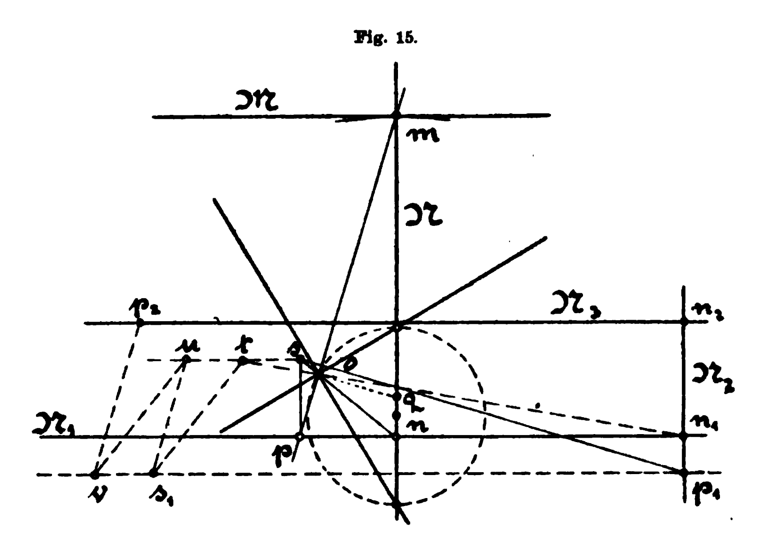
1) Bis hierher ist die Konstruktion bekannt. Man vgl. Mannheim a. a. O. Seite 22.

2) Eine kinematische Ableitung dieser Konstruktion s. Mannheim a. a. O. S. 38f. und S. 62ff.

3) Eine andere Konstruktion gibt Mannheim a. a. O. S. 51.

Die durch p_1 gezogene Normale zu N ist gedrehte Charakteristik von ps für alle Punkte dieser Geraden, also auch für s. $n_1 o$ ist die für die Richtung von N_1 versetzte Charakteristik von no und gibt in ihrem Schnittpunkte t mit der durch s zu N_1 gezogenen Parallelen einen Punkt der gedrehten Charakteristik von no für den Punkt s. Ist daher $ts_1 \perp no$ so ist s_1 auf der durch p_1 gehenden Parallelen zu N_1 gedrehte Charakteristik von s. Die Gerade sp_1 ist dadurch bestimmt, daß sie durch s geht und zu mo normal ist. Macht man $s_1 u \perp sp_1$, so ist u ein Punkt der für die Richtung von N_1 versetzten Charakteristik von sp_1; diese muß aber, wie man leicht erkennt auf on normal stehen, da on die

Fig. 15.



für die Richtung von N versetzte Charakteristik von mo ist und der Winkel zwischen mo und sp_1 beständig ein Rechter ist. Also hat man $uv \perp on$ und $vp_2 \perp sp_1$ zu errichten; dann ist p_2 gedrehte Charakteristik von p_1 und $\overline{n_2 n_3} = 3\overline{p_2 n_2}$.

Die hier gegebene Konstruktion von n_3 ist auch umkehrbar und kann in einfacher Weise zur konstruktiven Lösung der Aufgabe benützt werden, den oskulierenden Kegelschnitt für einen Punkt einer beliebigen Kurve zu finden. Gegeben sind m, n, n_1 und n_2. Man bestimmt zunächst die Punkte p_1 und p, indem $\overline{n_1 p_1} = \frac{1}{3}\overline{n_2 n_1}$ und $\overline{np} = \frac{1}{3}\overline{n_1 n}$ ist, zieht durch p die Parallele zu mn, durch p_1 die Normale zu pm und verbindet den Schnittpunkt s mit n. sn und pm schneiden einander in o.[1]) Die jetzt noch übrige Aufgabe kann auf Grund einer bekannten

1) Vgl. die analytischen Ableitungen von Godefroy (Journ. de l'école polyt. II. série, 2. cah. 1897. S. 19ff.), der zu einer andern Konstruktion gelangt.

Konstruktion von n gelöst werden.[1]) Man zieht $oq \perp mo$, und zeichnet mit dem Zentrum im Halbierungspunkt von qn einen Kreis durch o. Er bestimmt auf der Normalen N deren Schnittpunkte mit den Achsen. Diese liefern im Vereine mit m und N die übrigen Bestimmungsstücke. Man findet daher aus m, n, n_1 und n_2 auch den vierten Krümmungsmittelpunkt n_3. Der konstruktive Zusammenhang zwischen den Punkten m, n, n_1, n_2 und n_3 ist der geometrische Ausdruck für die von Cesàro eingeführte Krümmungsinvariante[2]) der Kegelschnitte.

16. Gegeben sei eine Reihe unveränderlicher Kurven $(m_1), (m_2) \ldots (m_n)$ und ein Punkt o. Auf jedem Strahl O durch o bestimmt man einen Punkt m derart, daß

$$(1) \qquad c \cdot \overline{om} = \sum_1^n c_i \cdot \overline{om_i},$$

wobei sämtliche c bekannte Konstante und die m_i Schnittpunkte von o mit (m_i) sind. Dann heißt (m) eine *allgemeine Konchoide.*[3]) Man könnte derart definierte Örter bezeichnender *Strecken-Additionskurven* nennen und ihnen dual *Winkel-Additionskurven* gegenüberstellen: Gegeben die Geradenörter (M_1), $(M_2) \ldots (M_n)$ und eine Gerade O. Durch jeden Punkt o von O bestimmt man eine Gerade M derart, daß

$$(2) \qquad c \cdot \overline{OM} = \sum_1^n c_i \cdot \overline{OM_i},$$

wenn c dieselbe Bedeutung hat wie oben und M_i die von o ausgehenden Tangenten an (M_i) sind. Beide Gleichungen geben durch Differentiation wieder Gleichungen derselben Form, und die allgemeine Aufgabe, welche der konstruktiven Geometrie der betrachteten Kurvengattung gegenüber erwächst, ist die folgende: Es sind aus der Tangente und den aufeinanderfolgenden Krümmungsmittelpunkten einer (m_i) bezw. (M_i) die sukzessiven Charakteristiken $(\overline{om})'$, $(\overline{om})'' \ldots$ von $\overline{om}$ bezw. $(\overline{OM})'$, $(\overline{OM})'' \ldots$ von $\overline{OM}$ konstruktiv abzuleiten und umgekehrt.

In Fig. 16 ist die Konstruktion für den Fall der Konchoide bis zum Krümmungsmittelpunkt zweiter Ordnung durchgeführt. Unabhängig

---

1) Mannheim a. a. O. S. 19 (4).

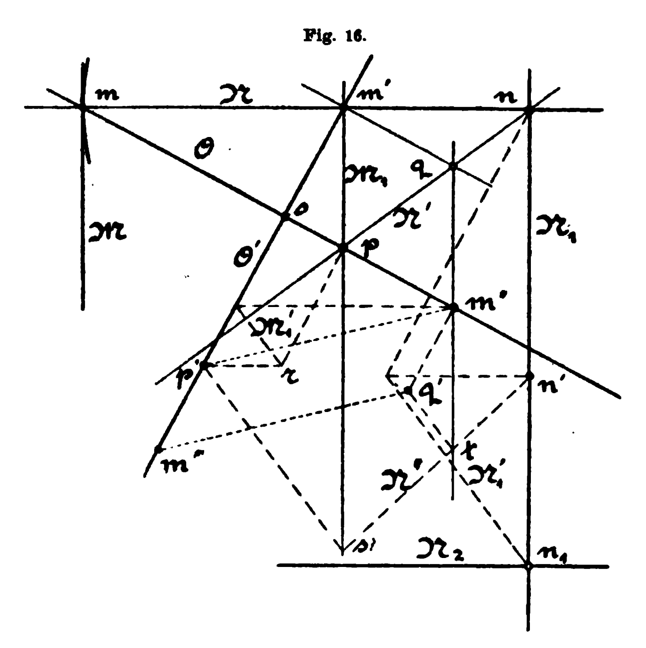
2) Cesàro, Vorles. üb. Natürliche Geometrie, deutsch von Kowalewski. Leipzig 1901. S. 75f. Vgl. auch Godefroy a. a. O.

3) Vgl. Chr. Wiener, Lehrb. d. darstell. Geom. Leipzig 1884. II. B. S. 181ff. und 223ff. Sobotka, Zur infinitesim. Geometrie der Plankurven. Sitzungsber. d. k. böhm. Akad. 1898 S. 18ff. d'Ocagne a. a. O. S. 286f. Mannheim a. a. O. S. 55ff.

veränderliches Element ist der Strahl O, als gedrehte Charakteristik für alle seine Punkte wählen wir den zu ihm senkrechten Strahl O'. Dann fällt m' (gedr. Char. von m) in den Schnittpunkt der Normalen N mit O' und es ist $\overline{om'} = (\overline{om})'$. Die Normale M_1 zu N durch m' ist gedrehte Charakteristik von N für den Punkt m; daher geht die für die Richtung von O versetzte Charakteristik N' von N außer durch n (ersten Krümmungsmittelpunkt von (m) in m) noch durch den Schnittpunkt $p \equiv M_1 O$. $m'q \parallel O$ und $qm'' \parallel M_1$ liefern den Punkt m'' auf O, für den $\overline{om''} = (\overline{om})''$.

Zur Bestimmung der gedrehten Charakteristik p' von p bedient man sich der für die Richtung von O' versetzten Charakteristik M_1' von M_1; sie ist normal zu N' und schneidet O' in dem Punkte, in dem diese Gerade von der durch m'' gehenden Normalen zu M_1, der gedrehten Charakteristik von M_1 für m', getroffen wird. $pr \parallel O'$ und $rp' \parallel N$ geben den Punkt p' auf O'. Die für die Richtung von O' versetzte Charakteristik N_1' von N_1 geht durch n_1 (zweiten Krümmungsmittelpunkt von (m) in m) normal zu N'; mit ihrer Hilfe findet man die gedrehte Charakteristik n' von n, die auf N_1 liegt. Macht man $p's \perp N'$ und $ps \parallel N_1$, so geht durch n' und s die für die Richtung von N_1 versetzte Charakteristik N'' von N'. $qt \parallel M_1$, $tq' \perp N'$ geben den Punkt q', der auf der Parallelen zu O' durch m'' gelegen ist. Mit p' und q' ist aber m'' sofort gefunden; denn da $pm'qm''$ ständig die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden, so muß dies, wie man leicht erkennt, auch für die gedrehten Charakteristiken $p'm''q'm'''$ der Fall sein. Man macht also $\overline{p'm'''} = \overline{m''q'}$ und hat in m''' den Punkt, für den wieder $\overline{om'''} = (\overline{om})'''$ gilt.

Fig. 16.

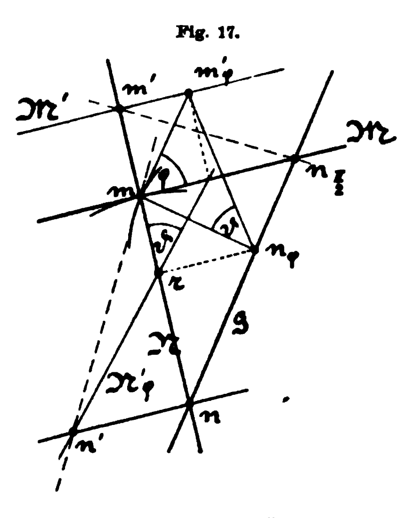


Die Konstruktion ist durchwegs umkehrbar. Man erhält, wenn m und m' gegeben ist, die Normale N; aus m, m' und m'' den ersten

Krümmungsmittelpunkt n, schließlich aus m, m', m'' und m''' den zweiten Krümmungsmittelpunkt n_1.

17. Dreht man jedes der ∞^2 Linienelemente einer einfach unendlichen Kurvenschar, indem man seinen Punkt festhält, um einen bestimmten Winkel φ, so erhält man ebensoviele neue Linienelemente, die im allgemeinen sich wieder zu ∞ viel Kurven einer Schar zusammensetzen. Man nennt die letzteren die *isogonalen Trajektorien* oder die *Loxodromen* des Winkels φ zu der ursprünglich gegebenen Kurvenschar. Sind zwei aufeinanderfolgende Phasen einer veränderlichen Kurve gegeben, so muß es möglich sein, die ersten Krümmungsmittelpunkte der entsprechenden Loxodromen für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu finden. Es mögen (Fig. 17) $m\mathfrak{M}$, $m'\mathfrak{M}'$ dieselbe Bedeutung haben, wie früher, und es sei $\sphericalangle\, m'mm'_\varphi = 90 - \varphi$. Man bestimmt gemäß Abschnitt **10** die Charakteristik N'_φ der Normalen N, welche der Zuordnung mm'_φ entspricht und mit N den Winkel $\overline{NN'_\varphi} = \vartheta$ einschließt. Da die Normale mn_φ der Loxodrome mit N den *konstanten* Winkel φ bildet, so muß auch die Charakteristik von mn_φ, die durch m'_φ geht, mit dieser Geraden den Winkel ϑ einschließen. Macht man daher den Winkel $mm'_\varphi n_\varphi = 90 - \vartheta$, so erhält man in n_φ den *Krümmungsmittelpunkt der Loxodrome des Winkels* φ *für den Punkt* m. Einfacher gelangt man jedoch zu n_φ, indem man durch den Schnittpunkt $NN'_\varphi \equiv r$ die Parallele zu $\mathfrak{M}$ zieht, wie man sich auf Grund einfacher Überlegung leicht überzeugt. Denn es ist $\overline{mn_\varphi} = \overline{mm'_\varphi} \cdot \operatorname{ctg} \vartheta = \overline{m'm'_\varphi} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\cos \varphi}$, während $\overline{mr} = \overline{m'm'_\varphi} \operatorname{ctg} \vartheta$ ist. Aus dieser Konstruktion ersieht man, daß bei Änderung des Winkels φ der Ort der Punkte n_φ als Erzeugnis zweier perspektiver Strahlbüschel erscheint, deren Scheitel beziehlich in m und $\mathfrak{M}^\infty$ liegen. *Die Krümmungsmittelpunkte aller Loxodromen für den Punkt m liegen daher auf einer Geraden G,* welche die Normale N in n und die Tangente $\mathfrak{M}$ in $n_{\frac{\pi}{2}}$ schneidet.[1])

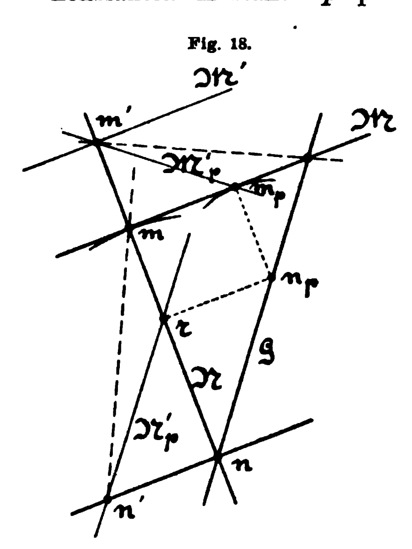
Fig. 17.



1) Dieser Satz ist von G. Scheffers analytisch abgeleitet worden. Siehe Leipziger Berichte, 50, 1898, S. 261 ff. Vgl. auch: Anwendung der Differentialrechnung usw. S. 96.

Es ist nun interessant, die duale Aufgabe zu behandeln. Verschiebt man nämlich die ∞^2 Linienelemente einer Kurvenschar längs ihrer Geraden um eine bestimmte Strecke p, so erhält man ∞^2 neue Linienelemente, die im allgemeinen eine neue Kurvenschar bilden. Man könnte sie etwa die *Schar der Dilatorien* nennen. Es sei (Fig. 18) $\overline{m m_p} = p$ und $M'_p \equiv m' m_p$ die Charakteristik der Geraden M für die Zuordnung im Punkte m_p, $N'_p \perp M'_p$ die zugehörige Charakteristik von N. Dann muß, weil die Normale $m_p n_p$ der Dilatorie zu N im konstanten Abstande p parallel bleibt, auch die Charakteristik von $m_p n_p$ aus N'_p durch Parallelverschiebung um die Strecke p in der Richtung von M hervorgehen. Man erhält demnach den Krümmungsmittelpunkt n_p in derselben Weise wie früher n_φ, indem man durch $NN'_p \equiv r$ die Parallele zu M zieht, und erkennt: *Die Krümmungsmittelpunkte aller Dilatorien einer gegebenen Kurvenschar für eine Tangente M liegen auf einer Geraden G.* Die Gerade G ist, wie leicht einzusehen, mit der früher gefundenen identisch. Man kann an diesen Satz ähnliche Betrachtungen anknüpfen, wie sie Scheffers für den dualen Fall angestellt hat. So z. B. bestimmt die Schar der Dilatorien eine Geradentransformation der Ebene, in der jeder Geraden M eine Gerade P zugeordnet ist, sodaß die Krümmungskreise aller Dilatorien, die M berühren, P zur gemeinsamen Tangente haben usf. Es sei noch bemerkt: Die sämtlichen Loxodromen einer Punktschar fallen mit dieser selbst zusammen, wobei jedes der ∞^2 Linienelemente ∞ fach zu zählen ist; ebenso sind die Dilatorien einer Geradenschar mit dieser identisch. Die Loxodromen eines Strahlenbüschels sind die logarithmischen Spiralen, die Dilatorien der geraden Punktreihe die Traktorien der Geraden. Für jede Schar kongruenter Kreise sind die Dilatorien zugleich Loxodromen einer ebensolchen Schar mit gleicher Mittelpunktslinie und anderem Kreisradius.

Fig. 18.



18. Es sei wieder eine Reihe fester Kurven (A_1), $(A_2) \ldots (A_n)$ gegeben. Ein Punktort (m) ist bestimmt durch eine Gleichung

$$F(l_1, l_2, \ldots l_n) = 0,$$

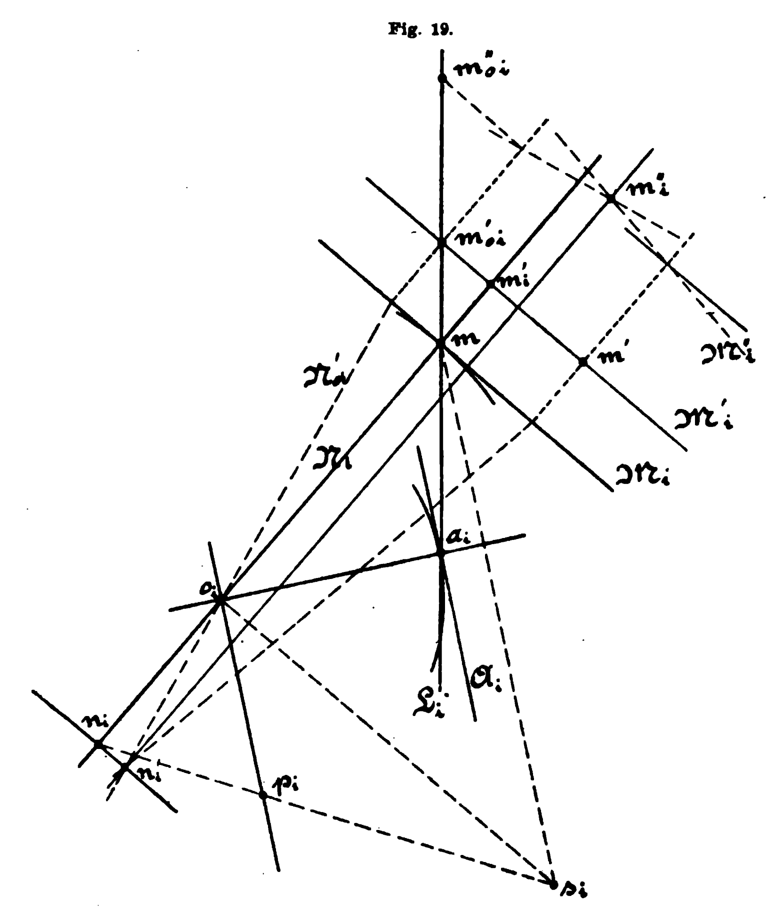
worin die l_i *die unter den Winkeln α_i gemessenen Abstände*[1]) eines

1) Diese Bezeichnung wurde von d'Ocagne eingeführt. Vgl. a. a. O. S. 268ff.

Punktes m von (A_i) bedeuten. Die α_i sind gegebene Konstante. Wir suchen zunächst die Tangente von (m).

In Fig. 19 ist A_i Erzeugende einer der gegebenen Kurven, a_i der Berührungs-, o_i der erste Krümmungsmittelpunkt, $\overline{A_i L_i} = \alpha_i$ und $\overline{a_i m} = l_i$. m erscheint als gemeinsamer Punkt von n Kurven (m_i), für die $l_i = \text{const.}$, und es handelt sich zunächst um die Ermittlung der

Fig. 19.



Tangente und der Charakteristik einer (m_i). Nehmen wir o_i als gedrehte Charakteristik von a_i an, so fällt für $l_i = \text{const.}$ wegen der Unveränderlichkeit von α_i und l_i auch die gedrehte Charakteristik von m in denselben Punkt. Daher ist $m o_i \equiv N_i$ Normale der Koordinatenlinie (m_i), und ihre Charakteristik M_i' für den Punkt m muß zu $m o_i$ senkrecht stehen. Einen Punkt m_{oi}' der Charakteristik M_i' erhält man, indem man dem Punkte m von (m_i) den auf derselben L_i gelegenen Punkt der Nachbarphase zuordnet. Es ist dann $\overline{m m_{oi}'} = l_i'$ und

$\overline{mm'_i} = l'_i \cdot \cos \overline{L_i N_i}$. Damit ist die in Abschnitt 7 Gleichung (5) eingeführte Größe c_i für den vorliegenden Fall gleich $\cos \overline{L_i N_i}$ gefunden.[1])

Ist $n = 2$ und hat die Definitionsgleichung die Form $l_2 = f(l_1)$, so bestimmt man den Krümmungsmittelpunkt entsprechend dem in **11** angegebenen Verfahren. Man braucht hierzu den Krümmungsmittelpunkt n_i von (m_i) sowie die Charakteristik der Evolute n'_i. Ist p_i das gegebene zweite Krümmungszentrum von (A_i), so erhält man unter Beibehaltung der vorigen Annahme, wenn $o_i s_i \perp N_i$ und $m s_i \parallel A_i$ ist, in $p_i s_i$ die für die Richtung von A_i versetzte Charakteristik von N_i und in deren Schnittpunkt mit N_i den gesuchten Punkt n_i. Die Charakteristik N'_{oi} von N_i für die Zuordnung mm'_{oi} in der Richtung L_i geht jedenfalls durch o_i, und damit ist n'_i ebenfalls gefunden. Die Charakteristik m''_{oi} von m'_{oi} liegt auf L_i u. zw. ist $\overline{m'_{oi} m''_{oi}} = l'_i + l''_i$. Wenn also $l'_1 = a$, $l''_1 = 0$ gewählt wurde, hat man $\overline{m'_{o2} m''_{o2}} = \overline{mm'_{o2}} + a^2 f''(l)$. Alles Weitere findet man wie in **11**. Durch Spezialisierung der Kurven (A_i) erhält man eine große Reihe gebräuchlicher Koordinatensysteme und kann aus der angegebenen Konstruktion Ausdrücke für die Krümmungshalbmesser herleiten. Ist ein Winkel $\alpha_i = 90^0$, so fallen n_i und n'_i in o_i zusammen.

In ganz derselben Weise wird die duale Aufgabe erledigt: Gegeben n Kurven $(a_1), (a_2) \ldots (a_n)$ und eine Gleichung $F(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n) = 0$.

Auf jeder Tangente A_i von (a_i) wird eine konstante Länge $\overline{a_i l_i} = p_i$ abgetragen, die von l_i ausgehende Tangente an die Kurve (M) schließt mit A_i den Winkel λ_i ein. Haben o_i und p_i analoge Bedeutung wie vorhin, so geht die Normale N_i der Kurve (M_i), für die $\lambda_i =$ const., durch o_i, der Krümmungsmittelpunkt n_i liegt auf der durch p_i gehenden Parallelen zu M. m'_i und n'_i findet man mit Hilfe einer Zuordnung im Punkte l_i usf. Zu beachten ist, daß $\operatorname{tg} \overline{MM'_{oi}} = \lambda'_i$, aber

$$\operatorname{tg} \overline{M'_{oi} M''_{oi}} = \lambda'_i + (\operatorname{arc\,tg} \lambda'_i)' = \lambda'_i + \frac{\lambda''_i}{1 + \lambda'^2_i}$$

zu setzen ist; also wenn $\lambda'_1 = a$, $\lambda''_1 = 0$, so ist für $\lambda_2 = f(\lambda_1)$

$$\operatorname{tg} \overline{M'_{o2} M''_{o2}} = \operatorname{tg} \overline{MM'_{o2}} + a^2 f''(\lambda_1) \cos^2 \overline{MM'_{o2}}.$$

19. Es ist der Krümmungsmittelpunkt einer durch ihre Gleichung in *trimetrischen Koordinaten* gegebenen Kurve zu ermitteln.

Es sei (Fig. 20) m ein Punkt, dessen Abstände x_1, x_2, x_3 von den drei festen Geraden A_1, A_2, A_3 durch die Beziehung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

---

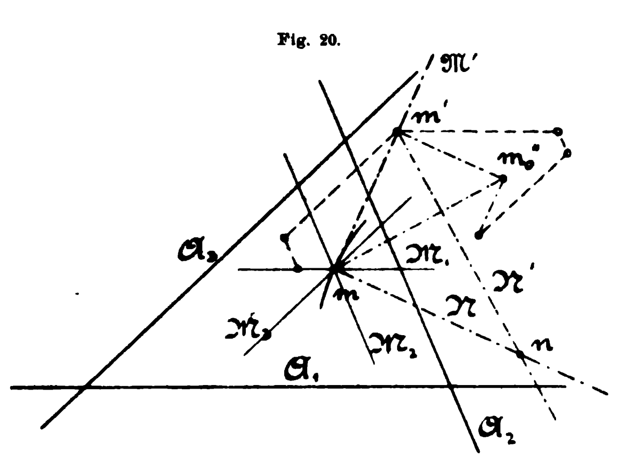
1) Zu demselben Resultate gelangt d'Ocagne auf anderem Wege a. a. O. S. 271.

verbunden sind. Die Koordinatenlinien $x_i = \text{const.}$ sind die durch m gehenden Parallelen M_i zu jenen festen Geraden. Als positive Seite der A_i sei diejenige festgesetzt, auf der die Innenfläche des Dreiecks liegt; man hat dann auf jeder Koordinatenlinie jenen Durchlaufungssinn als positiv zu betrachten, der sich aus einer bestimmten Umlegung der positiven Normalenrichtung, in der die x_i wachsen, ergibt. Durch Differentiation von (1) erhält man

$$f_1 x_1' + f_2 x_2' + f_3 x_3' = 0; \tag{2}$$

Die Größen c_i des Abschnittes 7 sind hier sämtlich gleich 1. Wir tragen daher auf den Richtungen der M_i Strecken von der Länge εf_i auf, wobei ε ein beliebiger Proportionalitätsfaktor ist, summieren sie geometrisch und erhalten als Resultat einen Punkt m' auf der Tangente M von (m). Nun ist die Charakteristik m'' von m' aufzusuchen. Sie ergibt sich, wenn man von m' aus zuerst mm' der Größe und Richtung nach und hierauf die Charakteristiken der Strecken εf_i in den Richtungen der M_i aufträgt und addiert. Die letzteren ergeben sich durch Differentiation

Fig. 20.



$$(\varepsilon f_i)' = \varepsilon [f_{i1} x_1' + f_{i2} x_2' + f_{i3} x_3'], \tag{3}$$

wofür man auch schreiben kann

$$(\varepsilon f_i)' = \varepsilon \cdot \overline{mm'} [f_{i1} \sin \tau_1 + f_{i2} \sin \tau_2 + f_{i3} \sin \tau_3],$$

wen τ_i den Winkel von M mit M_i bedeutet. Trägt man daher die Strecken $\varepsilon \cdot \overline{mm'} f_{i1}$, $\varepsilon \cdot \overline{mm'} f_{i2}$, $\varepsilon \cdot \overline{mm'} \cdot f_{i3}$ in den Richtungen der M_i auf, so ist die zu M senkrechte Komponente ihrer Summe gleich der Charakteristik von εf_i. Die Bestimmung von m'' und n erfolgt dann ohne Schwierigkeit. Man erkennt auch, daß das Hinzufügen des Summanden $\overline{mm'}$[1]) zur Ermittlung von m'' für das Endresultat belang

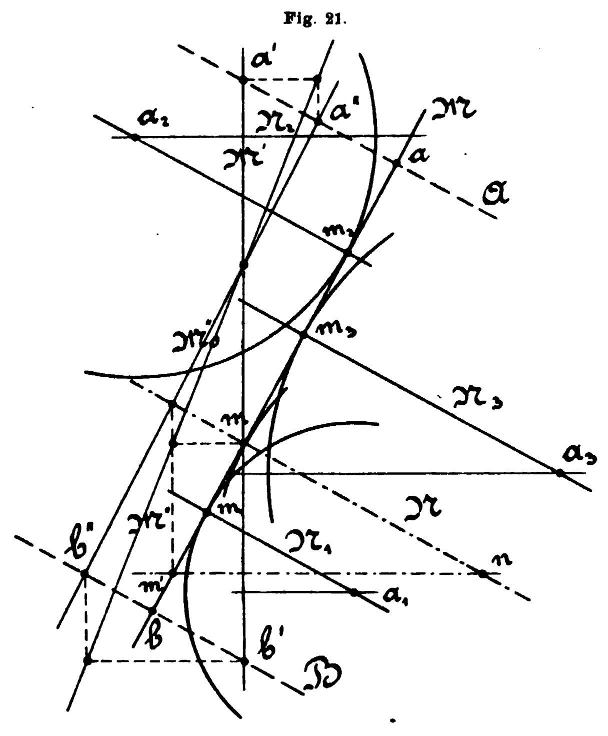
1) In der Figur fortgelassen.

los bleibt. Aus der Konstruktion ergibt sich für den Krümmungshalbmesser der Ausdruck

$$\varrho = \frac{\sum_1^3 f_i \cos \tau_i}{\sum_1^3 f_{ij} \sin \tau_i \sin \tau_j}. \tag{4}$$

Ähnlich geht man vor, wenn eine Gleichung in trimetrischen Linienkoordinaten

Fig. 21.



$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{5}$$

vorliegt. Es sei (Fig. 21) M eine Gerade, deren Abstände von den festen Punkten a_1, a_2 und a_3 die u_i sind. Als Koordinatenlinien $u_i = \text{const.}$ erscheinen hier Kreise mit a_i als festen Mittelpunkten, sämtliche c_i sind gleich 1. Der gesuchte Berührungspunkt m ist demnach der Schwerpunkt der in m_i vorhanden gedachten Massen $\varepsilon\varphi_i$. Die Konstruktion kann etwa in folgender Weise ausgeführt werden. Man wählt zwei beliebige zu M normale Gerade A und B, die M in a und b schneiden, und trägt auf ihnen die Strecken

$$\overline{aa'} = \varepsilon(\overline{m_1 a} \cdot \varphi_1 + \overline{m_2 a} \cdot \varphi_2 + \overline{m_3 a} \cdot \varphi_3),$$
$$\overline{bb'} = \varepsilon(\overline{m_1 b} \cdot \varphi_1 + \overline{m_2 b} \cdot \varphi_2 + \overline{m_3 b} \cdot \varphi_3)$$

auf. Dann geht die Verbindungsgerade $a'b'$ durch m und kann als Charakteristik M' von M angesehen werden. Will man jetzt den Krümmungsmittelpunkt n finden, so handelt es sich zunächst um die Charakteristik von M', also um die von a' und b', in letzter Linie um die der Längen $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$. In jedem Produkte $\overline{a_i m} \cdot \varphi_i$ sind beide Faktoren veränderlich; die Charakteristik von $\overline{m_i a}$ erhält man unmittel-

bar, indem man durch a_i die Senkrechte zu M' zieht und sie mit M zum Schnitte bringt. In derselben Weise wie früher ergibt Differentiation nach sämtlichen u_i die Charakteristik von $\varepsilon \cdot \varphi_i$

$$(\varepsilon\varphi_i)' = \varepsilon \operatorname{tg} \overline{MM'}[t_1\varphi_{i1} + t_2\varphi_{i2} + t_3\varphi_{i3}], \tag{6}$$

wenn t_i den Abstand $\overline{mm_i}$ bedeutet. Daraus gewinnt man die Charakteristik von $\overline{aa'}$ und die von $\overline{bb'}$, macht $\overline{a'a''} = \overline{aa'} + (\overline{aa'})'$, $\overline{b'b''} = \overline{bb'} + (\overline{bb'})'$, und erhält M''. Man erkennt, daß zur Ermittelung von n statt M'' auch die Gerade $a''b'' \equiv M_0''$ selbst benützt werden kann, und daß das Hinzufügen der Strecken $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$ zur Bildung der Summen $\overline{a'a''}$ und $\overline{b'b''}$ für das Endresultat belanglos bleibt. Der Ausdruck für die Länge des Krümmungsradius in trimetrischen Linienkoordinaten lautet dann

$$\varrho = \frac{\sum_1^3 \varphi_{ij} t_i t_j + \sum_1^3 \varphi_i u_i}{\sum_1^3 \varphi_i}. \tag{7}$$

Ist die Gleichung (1) homogen in den x_i, so kann m als der Schwerpunkt der in den Eckpunkten des Fundamentaldreiecks $A_1A_2A_3$ vorhandenen Massen x_i angesehen werden. Aus der Eulerschen Beziehung

$$f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = 0 \tag{8}$$

erkennt man, daß dann M Richtungslinie der Resultierenden der in den A_i angreifenden Kräfte f_i ist.

Hat man eine homogene Gleichung in Linienkoordinaten, so kann die durch die u_i bestimmte Gerade M in derselben Weise durch Zusammensetzung der in den Seiten des Dreieckes $a_1a_2a_3$ liegenden Strecken u_i gewonnen werden, desgleichen der Berührungspunkt m als Schwerpunkt der in den a_i wirkenden Massen φ_i. Damit sind wir zu den bekannten Beziehungen zwischen homogenen Punkt- und Linienkoordinaten gelangt.

Hat die Gleichung (1) die besondere Form

$$c_1x_1^n + c_2x_2^n + c_3x_3^n = 0, \tag{9}$$

so stellt sie die vielfach untersuchten symmetrischen Dreieckskurven[1]) dar. Man erhält

$$f_{ij} = 0, \quad (i \neq j), \tag{10}$$

$$f_{ii} = \frac{n-1}{x_i} f_i. \tag{11}$$

---

1) Vgl. Cesàro, Vorles. üb. Natürl. Geom. Deutsch v. Kowalewski. Leipzig 1901. S. 129 ff.

Daraus ergibt sich auf Grundlage unserer Konstruktion der Satz von Jamet[1]): Berühren einander zwei Kurven, deren Gleichungen die Form (9) haben, und sind ihre Exponenten n und n', so gilt für die Krümmungsradien im gemeinsamen Linienelement

$$\varrho(n-1) = \varrho'(n-1). \tag{12}$$

Man erkennt, daß der Satz seine Gültigkeit behält, wenn in (9) an Stelle jedes x_i eine beliebige Funktion X_i von x_i tritt.[2]) Die Übertragung für Linienkoordinaten geschieht ohne Schwierigkeit.

20. Nach dem Graßmannschen Hauptsatz[3]) über die Erzeugung der ebenen algebraischen Kurven entsteht die allgemeine Plankurve $n$ter Ordnung als Ort der Schnittpunkte von n veränderlichen Geraden, deren zusammengehörige Phasen dadurch miteinander verknüpft sind, daß ein Punkt und eine Gerade, die mit Hilfe jener n Strahlen lineal konstruiert werden, ineinander liegen müssen. Wir haben es hier mit einem besonderen Fall der in Abschnitt 7 betrachteten impliziten Bestimmungsform eines Punktes zu tun und können nach den daselbst angegebenen Grundsätzen die Tangente an C^n konstruieren.

In Fig. 22 ist m der Schnittpunkt der drei um a_1, a_2, a_3 sich drehenden Geraden A_1, A_2, A_3. Die Schnittpunkte b_1 und b_3 von A_1 und A_3 bezw. mit den festen Geraden B_1 und B_3 bestimmen im Vereine mit den festen Punkten c_1 und c_3 die beiden Geraden C_1 und C_3, deren Schnittpunkt p auf A_2 liegen muß.[4]) Wir suchen die Tangente an die von m erzeugte *Kurve dritter Ordnung.* Es sei zunächst die Gerade A_2 allein als veränderlich betrachtet; wir wählen als ihre Charakteristik für das Linienelement in m (vgl. Abschn. 1) eine Strecke gleich der Entfernung $\overline{ma_2}$. Dann ist ihre Charakteristik für das in Betracht kommende Element in p gleich $\overline{pa_2}$. Faßt man den Schnittpunkt p von C_1 und C_2 als Linie erster Klasse auf, so bildet die Gerade A_2 mit p ihr Linienelement, das zugleich der Geraden A_2 angehört, und die Projektion der Charakteristik p' von p auf die in p zu A_2 errichtete Normale bestimmt die Charakteristik von p für dieses Linienelement. Nun hat man einmal A_1 und dann wieder A_3 als allein veränderlich anzusehen, in jedem Falle als Charakteristik von A_1 bezw.

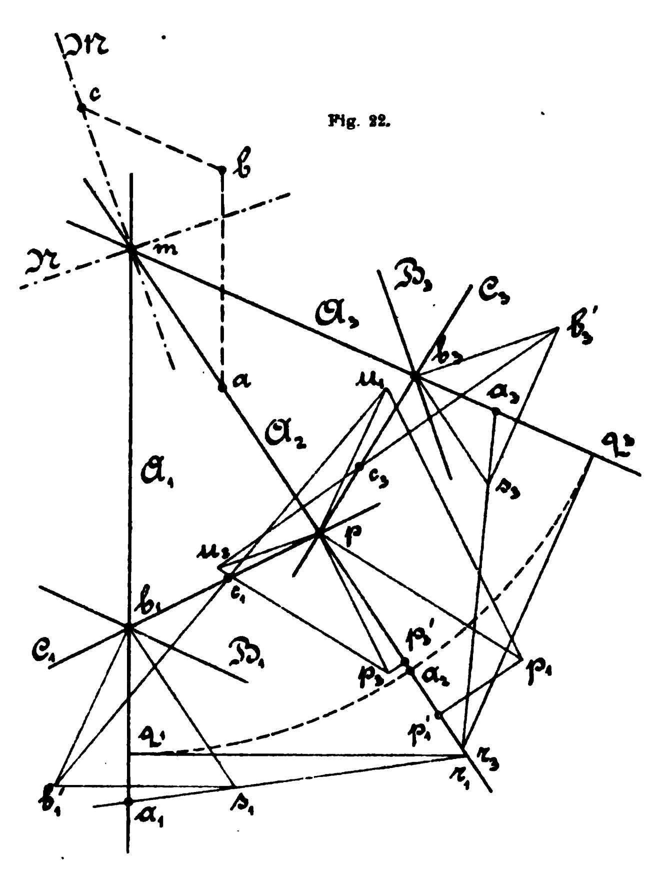
1) Annal. de l'École Norm. supér. (3) IV. 1887 Suppl.

2) Vgl. Pellet in Comptes Rendus, B. CXV. Paris 1892. S. 498.

3) Vgl. A_1 225 § 146. Ferner Crelles Journal Bd. 31. Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse.

4) Graßmann, Über die Erzeugung der Kurven dritter Ordnung durch gerade Linien usw. Crelles Journal Bd. 36.

A_3 für m eine Strecke gleich ma_2 anzunehmen und demgemäß die Charakteristik p_1' bezw. p_3' von p zu bestimmen. In Fig. 22 ist $\overline{mq_1} = \overline{ma_2}$ gemacht, hierauf $q_1 r_1 \perp A_1$ errichtet. $a_1 r_1$ ist die für die Richtung von A_2 versetzte Charakteristik von A_1. $b_1 s_1$ parallel zu A_2, $s_1 b_1'$ normal zu A_1, $b_1 b_1'$ normal zu B_1 gibt in b_1' die gedrehte Charakteristik von b. $b_1' c_1$ ist die für die Richtung von $b_1 b_1'$ versetzte Charakteristik von C_1, $pu_1 \parallel b_1 b_1'$, $u_1 p_1 \perp C_1$ und $pp_1 \perp C_3$ gibt in p_1 die gedrehte Charakteristik von p bei allein veränderlichem A_1. In gleicher Weise erhält man in p_3 die gedrehte Charakteristik von p für partielle Änderung von A_3. Die Projektionen $\overline{pp_1'}$ und pp_3' von $\overline{pp_1}$ und pp_3 auf A_2 sind die partiellen Charakteristiken von p für A_2. Man hat daher $ma = pa_2$, $\overline{ab} = \overline{pp_1'}$, $\overline{bc} = \overline{pp_3'}$ zu machen, wenn $ab \parallel A_2$ und $bc \parallel A_3$ ist, und erhält in c einen Punkt der Tangente M. Das Verfahren ist allgemein für Kurven beliebiger Ordnung und Klasse anwendbar.


Fig. 22.

Neue Rechenmaschine.

Von Eduard Selling in Würzburg.

Schon bei der Leibnizischen Rechenmaschine war die Multiplikation mit 2, 3, ... 9 nicht wie bei der sonst dieselben Mittel benützenden Thomas-Burckhardtischen durch 2, 3, ... 9maliges Umdrehen einer Handkurbel auszuführen, sondern durch je eine einfache nur verschieden begrenzte Bewegung (S. die Beschreibung in Jordan, Handbuch der Vermessungskunde 5. Auflage, Bd. 2, S. 142). Dasselbe war bei der in Chicago prämiierten in meiner Broschüre Eine neue Rechenmaschine (Berlin, Springer, 1887), auch in Dinglers Polyt. Journal Bd. 271, bei Jordan u. a. a. O. beschriebenen Maschine, und zwar hier ohne irgendwie lästige Reibungswiderstände erreicht. Aber die mit der durchaus stetigen Zehnerübertragung und Teilproduktenbildung dort verbundene Art der Ablesung, bei welcher am Indexfaden nicht immer der Anfang, sondern, dem rechts folgenden Teil der Zahl entsprechend, eine gegen das Ende des betreffenden Zifferninterválls zu abweichende Stelle desselben lag, wie auch z. B. bei gewöhnlichen Uhren der Stundenzeiger nicht immer bei der ganzen Stunde, sondern, der Minutenzahl entsprechend, schon bei einer späteren Stelle steht, schien vielen Reflektanten in der Hand eines weniger geübten Personals als zu gefährlich trotz der damals zuerst eingeführten automatischen Kopierung, welche allerdings auch nicht ganz nach Wunsch gelungen war, und schließlich bei sonst vorzüglicher Ausführung vom Verfertiger Max Ott † ganz weggelassen wurde. Alle diese Mißstände sind bei der nun zu beschreibenden Maschine, wie sie als Fortbildung von D. R. P. 149564 von der Firma H. Wetzer in Pfronten hergestellt wird, vermieden. Zur Herstellung der Teilprodukte benützen wir bei ihr noch immer ein Paar sogen. Nürnberger Scheren *a* in Fig. 1 und der die wirkliche pultförmige Aufstellung darstellenden Fig. 2, nur künftig in der vereinfachten in Fig. 3 dargestellten Form, welche nur 10 statt 20 Stäben nötig hat. Wird in ihr der Punkt 0 festgehalten, und entfernt sich von diesem der Punkt 1 um eine die Multiplikatorziffer darstellende Strecke, so stellen die gleichzeitigen Vergrößerungen der Strecken 02, 03, ... 09 das Produkt aus dieser Ziffer in 2, 3, ... 9 dar. Das Gleiche gilt bei entsprechender Lage zweier kongruenter solcher Scheren von den zu diesen Strecken parallelen Bewegungen der Querstäbe d^1, d^2, ... d^9; welche einander gleich und parallel, den Scheren durch Stifte an den Punkten 1 und 1, 2 und 2, ... 9 und 9 angegliedert

sind, wie die Ansicht von rechts in Fig. 1 zeigt, und a. a. O. genauer beschrieben ist. Dieselben sollen senkrecht gegen die beiderseitigen

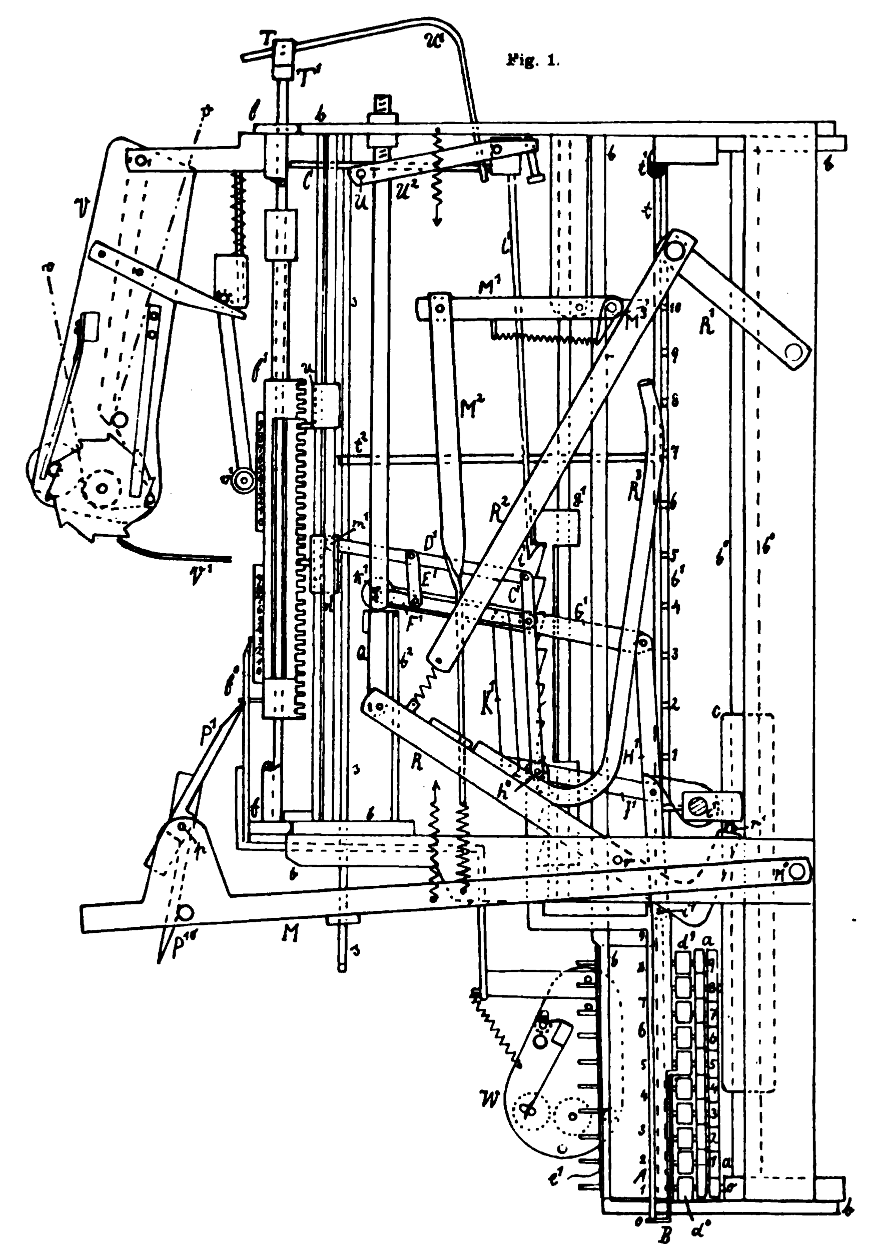
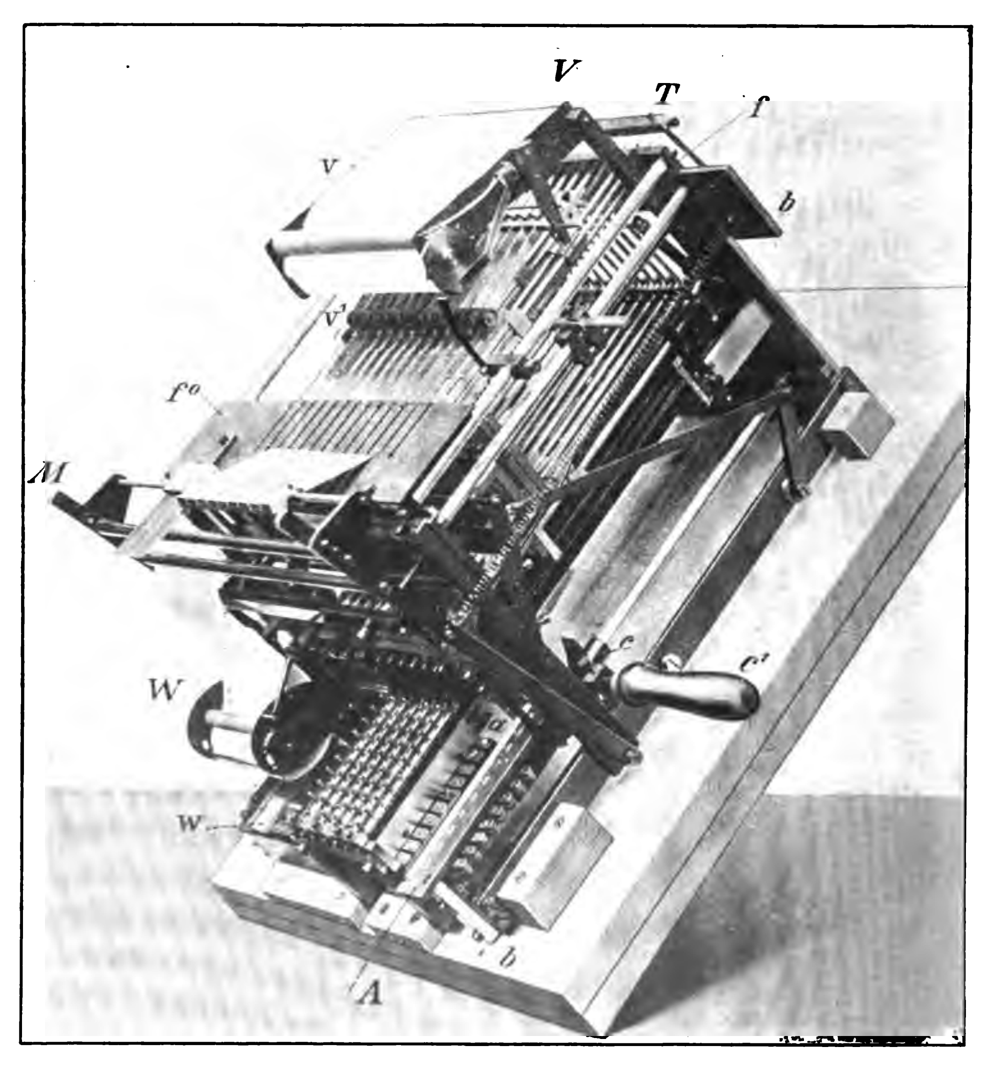


Fig. 1.

parallelen Strecken 09 liegen, in deren Richtung einer derselben, in der vorliegenden Maschine der d^8, durch einen an den festen Stäben b^0 ge-

führten Schieber c sich selbst parallel geführt wird, während der analoge Querstab d^0 mit dem unbeweglichen Gestell b fest verbunden bleibt. Zwischen unbeweglichen, auch mit b bezeichneten den Stäben b^0 parallelen Längsstäben werden der von rechts 1., 2., 3., ... Multiplikandenstelle

Fig. 2.



entsprechend Kapseln e^1, e^2, e^3, ... geführt, welche, je nachdem die betreffende Multiplikandenziffer 0, 1, 2, ... oder 9 ist, mit dem Querstab d^0, d^1, d^2, ... oder d^9 so verbunden werden sollen, daß sie deren Bewegungen mitmachen. Diese Kapseln haben nämlich je 10 mit 0, 1, ... 9

bezeichnete Stifte, in deren Verlängerung bei der in Fig. 1 und 2 angenommenen Nulllage je ein Spalt in den Querstäben d^0, d^1, ... d^9 liegt, sodaß, wenn einer und nur einer der 10 Stifte wie eine Taste seiner Länge nach in die Kapsel eingedrückt wird, und dann auf der anderen Seite aus ihr hinaus und in den Spalt oder das betreffende Loch des betreffenden Querstabs d^0, d^1, ... oder d^9 hineinragt, durch diesen Stift die Kapsel gezwungen wird die Bewegung des Querstabs mitzumachen, welche bei der dann folgenden Öffnung der Scheren proportional 0, 1, ... oder 9 und der gemeinsamen Multiplikatorziffer ist. Mit dem Eindrücken eines solchen Stiftes springt der vorher in derselben Kapsel eingedrückt gewesene wieder zurück, dies alles wie in meiner früheren Maschine.

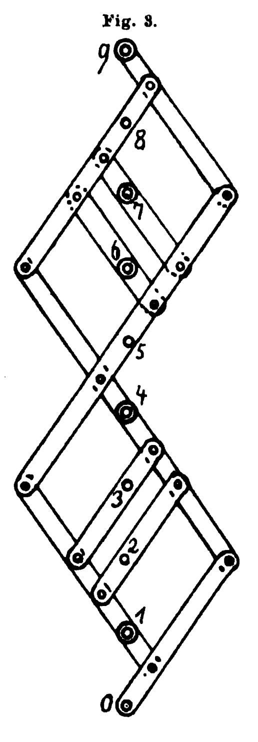


Fig. 3.

Mit dem Schieber c ist ein Riegel c^1 in der Art verbunden, daß er an ihm nach rechts und links eine Strecke weit verschoben werden kann. Die rechts und links aus der Maschine herausragenden Enden dieses Riegels sind mit Handhaben versehen für die die Maschine treibende Hand, welche allein oder mit der anderen zusammen den Riegel auch ihm selbst parallel in der Richtung der Stäbe b^0 verschieben und hierdurch dem Schieber c die verlangte Bewegung mitteilen kann. Zur Abmessung dieser Bewegung dient ein vierkantiger fester den Stäben b^0 paralleler Stab b^1, in welchen 11 Nuten eingefräßt sind in gleichen Abständen (von in der vorliegenden Maschine 18 mm). Um 1, 2, ... oder 9mal diesen Abstand hat sich der Schieber c nach hinten oben zu bewegen, wenn der durch die Kapseln eingesetzte Multiplikand mit 1, 2, ... oder 9 multipliziert werden soll. Gleichzeitig geht dann der am Querstab d^5 befestigte Zeiger B auf der rechts vorn gelegenen Skala A von dem Punkt, bei welchem in der rechten mit M (Multiplikation) bezeichneten Zifferreihe die 0 steht, auf den mit 1, 2, ... 9 bezeichneten Punkt fort.

Während die bisherigen Rechenmaschinen die irgendwie gebildeten Teilprodukte je auf einen Zifferträger übertrugen, welcher, kreisförmig, nur in sich zurücklaufend 0 bis 9 angab, und sprungweise oder stetig mit jedem Durchlaufen dieser 10 Ziffern einen Fortgang des links folgenden Zifferträgers um 1 bewirkte, zerlegt sich in der hier zu beschreibenden Maschine von selbst jedes Teilprodukt in einen durch 10

teilbaren Teil und einen positiven oder negativen einziffrigen Rest. Dieser Rest geht auf den unmittelbar zugehörigen Zifferträger über und bestimmt sich so, daß dieser Zifferträger weder 9 noch 0 zu überschreiten braucht, und der Faktor von 10 in dem anderen Teil geht unmittelbar auf den links folgenden Zifferträger über. Diese Einrichtung ermöglicht den Gebrauch von Zifferstäben statt Zifferrädern, womit unter anderem auch die Einrichtung automatischer Kopierung erleichtert wird, und leistet automatisch, was für bloße Addition und Subtraktion und mit bewußter Unterscheidung zweier Fälle der von D'Ocagne (Le calcul simplifié, 1re éd. p. 6) beschriebene Apparat von Troncet leistet.

Entsprechend einer Äußerung von Leibniz, welcher im Brief an Tschirnhaus, März 1694, eine Maschine sine rotis als wünschenswert erklärt (Werke, herausgeg. von Gerhardt) wähle ich hier für die zweierlei Maschinenelemente von doppelter Bewegung, welche zu den genannten Übertragungen für jede Stelle nötig sind, zwei Storchschnäbel wie, Fig. 1, den rechten $C^1 D^1 E^1 F^1$ und den linken mit den nur in der Zeichnung zur Unterscheidung breiter angenommenen Stäben G^1, H^1, I^1, K^1. Die Stifte h^0, k^1, m^1, liegen immer in einer Ebene, die Mittelpunkte der in Fig. 1 sie darstellenden Kreise in einer Geraden, und das Teilungsverhältnis $\frac{h^0 m^1}{k^1 m^1}$, welches ich im allgemeinen mit β bezeichne, ist konstant, in Fig. 1 gleich $\frac{35}{8}$. Das Analoge gilt von den Stiften, beziehungsweise Punkten i^1, h^1, k^1 im linken Storchschnabel, dessen Stift h^1 bei der angenommenen Lage in der Verlängerung des Stiftes h^0 liegt, also in Fig. 1 verdeckt ist. Das sonst mit γ bezeichnete konstante Teilungsverhältnis $\frac{i^1 k^1}{i^1 h^1}$ ist hier $= \frac{16}{7}$. Mit je um 1 vergrößerten Indexen gilt das Gesagte auch je für die links folgenden Stellen, abgesehen davon, daß Stift h^0 allein am Gestell b fest ist wie auch der dem k^1 analoge Stift in dem links letzten, dem $G^1 H^1 I^1 K^1$ analogen Storchschnabel am Gestell b fest ist. Die Stäbe und Stifte der links auf das erste folgenden Storchschnabelpaare sind bei der in Fig. 1 angenommenen Nulllage von den erstgenannten gedeckt. Die Stifte m^1, m^2, m^3, ... sind in Schiebern n^1, n^2, n^3, ... fest, welche an festen den Leitungsstäben b^0 parallelen Stäben gleiten können, ebenso sind die Stifte h^1, h^2, h^3, ... an Zackenstäben g^1, g^2, g^3, ... fest, welche ebenfalls an zu den erstgenannten parallelen, am Gestell b festen Stäben gleiten können. Durch die Stifte h^0 und m^1, h^1 und m^2 usw. sind auch den Stiften k^1, k^2, usw. ihre Wege gewiesen, ebenfalls parallel den Stäben b^0, dann durch die Stifte k^1 und h^1, k^2 und h^2 usw. den Stiften i^1, i^2 usw., durch welche die Stäbe H^1, H^2, ... den Kapseln e^1, e^2, ... angegliedert sind. Für den Fall, daß infolge kleiner Verbiegungen oder sonstiger

Ungenauigkeiten die hiermit gegebenen zweierlei Führungen der Stifte i^1, i^2, ... nicht absolut genau übereinstimmen und dadurch Klemmungen entstehen sollten, ist senkrecht auf die Führung den Stiften i^1, i^2, ... oder schon den Kapseln e^1, e^2, ... ein minimaler Spielraum frei gelassen.

Bleibt der Zackenstab g^1, also auch der Stift h^1, unbewegt, so ist in der ersten Stelle nur eine *Bewegungsart* möglich, welche ich die *erste* nenne. Mit der Bewegung der Kapsel e^1 um eine Wegeinheit ($\frac{9}{4}$ mm) verbindet sich dann die $(1-\gamma)$fache, also bei dem angenommenen Wert $\frac{16}{7}$ von γ entgegengesetzt gerichtete Bewegung des Stiftes k^1, welcher die zwei Storchschnäbel der ersten Stelle miteinander verbindet, durch dessen Bewegung um $1-\gamma$ also eine Bewegung des Stiftes m^1 und Schiebers n^1 um $\frac{(1-\gamma)\cdot\beta}{\beta-1}$, wofür ich die Bezeichnung α gebrauche, bewirkt wird. Der Schieber n^1 besitzt nun einen nach oben vorn abstehenden Zahn, der zum Eingriff in die Verzahnung an dem Zifferstab f^1, wie in Fig. 2 angenommen, oder f^2, f^3, ... bestimmt ist. Diese in einem seitlich verschiebbaren Rahmen f parallel den Stäben b^0 geführten Zifferstäbe tragen in Abständen von α Wegeinheiten, hier also von $\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{3}$ mm von vorn unten nach hinten oben fortlaufend die Ziffern 0, 1, ... 9 zur Ablesung an der hinteren Kante der Platte f^0 am Rahmen f, bei welcher in Fig. 1 die Ziffer 4 steht, und in der Verlängerung der Zifferstäbe nach hinten oben sind in gleichen Abständen nochmals die gleichen Ziffern aus weichem Kautschuk zur Kopierung angebracht. Durch Bewegungen der ersten Art, gleichzeitig analog in allen Stellen mit der Bewegung des Schiebers c verbunden, könnten also alle Teilprodukte aus demselben Multiplikator gleichzeitig je zu den vorher durch die Zifferstäbe f^1, f^2, ... dargestellten Ziffern addiert oder von ihnen subtrahiert werden, könnte also das Produkt aus dem ganzen vielziffrigen Multiplikanden in eine Multiplikatorziffer addiert oder subtrahiert werden, wenn dabei auf den Zifferstäben nicht die 9 oder die 0 überschritten werden müßte.

Wenn dagegen Schieber n^1 mit Stift m^1 unbewegt bleibt, oder doch von seiner Bewegung abgesehen wird, so verbindet sich mit der Bewegung des Stiftes i^1 die *zweite Bewegungsart*. Der Fortgang von i^1 um je eine der genannten Wegeinheiten (von $2\frac{1}{4}$ mm) bewirkt dann, da auch k^1 dann als ruhend anzunehmen ist, den Fortgang des Stiftes h^1 und Zackenstabes g^1 um $\frac{\gamma-1}{\gamma}$, (hier $2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}$ mm), und dieser, wenn auch Stift k^2 als ruhend angenommen wird, den Fortgang des Stiftes m^2, Schiebers n^2 und des dem Obigen analog von diesem mitgenommenen Zifferstabes f^2 um $\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{1}{1-\beta}$, (hier um $2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{27}$ mm). Die Anpassung

an das Dezimalsystem erfordert nun, daß diese Größe $\frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - \beta}$ der 10. Teil der oben für f^1 gefundenen $\frac{(1-\gamma)\cdot\beta}{\beta - 1}$, daß also $\beta \cdot \gamma = 10$ sei, sodaß α, das Verhältnis der Ziffernabstände zu der Wegeinheit der Kapseln, die Vergrößerung, $= \frac{\beta - 10}{\beta - 1}$, (hier $= -\frac{5}{3}$) wird. Die Abstände der Zacken an den Zackenstäben g^1, g^2, ... sind so gewählt, daß bei der zweiten Bewegungsart dem Fortgang eines Stiftes wie i^1 um 10 Wegeinheiten, also dem (hier entgegengesetzten) Fortgang des zugehörigen Zifferstabes wie f^2 um einen Zifferabstand der Fortgang des Zackenstabes g^1 um einen Zackenabstand entspricht. Durch solche Bewegungen zweiter Art kann der Faktor von 10 in einem durch 10 teilbaren Teil des rechts ersten Teilprodukts unmittelbar auf den rechts zweiten Zifferstab übertragen werden; und das Analoge gilt für je zwei benachbarte folgende Stellen.

Eine *dritte Bewegungsart*, bei welcher der Stift i^1, also die Kapsel e^1 unbewegt bleibt, läßt sich als zusammengesetzt ansehen aus einer Bewegung der ersten Art mit einer der zweiten, bei welcher die Kapsel e^1 mit Stift i^1 wieder um ebensoviel zurückgeht. Die Bewegung des Stiftes m^1 und des vom Schieber n^1 mitgenommenen Zifferstabes, etwa f^1, ist dann entgegengesetzt gerichtet und 10mal so groß als die des Stiftes m^2, Schiebers n^2 und des von diesem mitgenommenen Zifferstabes. Diese dritte Bewegungsart, welche natürlich nicht mit Bewußtsein eingeleitet zu werden braucht, sondern im Bedarfsfall von selbst eintreten muß, dient dazu, Bruchteile von Zifferabständen, Zehntel derselben, um welche bei der zweiten Bewegungsart der Weg des Zifferstabes f^2 von einer ganzen Zahl abweichen kann, auf einen ganzen Zifferabstand zu ergänzen oder durch Rückbewegung zu beseitigen, je nachdem nämlich in dem einen oder dem anderen Fall Stab f^1 durch die entgegengesetzte zehnfache Bewegung von einer der Ziffern 0, 1, ... 9 wieder auf eine derselben kommen kann. Da bei der zweiten wie auch der dritten Bewegungsart die ganze oder gebrochene Zahl von Zifferintervallen, um welche im angenommenen Beispiel Stab f^2 fortgeht, mit der Zahl von Zackenabständen übereinstimmt, um welche dabei in entgegengesetzter Richtung Stab g^1 fortgeht, so kann der naturgemäße Wunsch, daß schließlich alle Zifferstäbe nur um ganze Anzahlen von Zifferintervallen fortgegangen sind, dadurch erfüllt werden, daß man bewirkt, daß bei beiden Bewegungen zusammen, welche übrigens nicht nur nacheinander, sondern auch gleichzeitig stattfinden können, die Zahl der Zackenabstände, um welche Stab g^1 fortgegangen ist, eine ganze wird. Da bei der dritten Bewegungsart der Schieber c, also die Kapseln e^1, e^2, ... und

Stifte i^1, i^2, ... ruhen, und das für die erste Stelle Beschriebene ebenso für die folgenden gilt, so muß für diese Bewegungsart noch eine besondere, und zwar am besten eine jederzeit bereite Kraft mitwirken, welche automatisch im Bedarfsfall ausgelöst wird. Bei der vorliegenden Ausführung ist dazu einfach die Schwere der ohnehin nötigen Maschinenteile gewählt. Dadurch, daß man dieselben nicht senkrecht fallen, sondern in geneigten Richtungen gleiten läßt, wird die sonst zu lästigen und schädlichen Stößen führende Geschwindigkeit gemildert und die bequeme pultförmige Aufstellung ermöglicht.

Zur Vermeidung unnötigen Hin- und Hergehens der Zifferstäbe, unnötigen Ausrückens und Wiedereinfallens der die Zackenstäbe g^1, g^2, ... arretierenden Sperrhaken l^1, l^2, ..., sowie dazu, daß man nicht für Addition und Subtraktion der Teilprodukte zweierlei die Zackenstäbe g^1, g^2, ... nach entgegengesetzten Richtungen hin sperrende Sperrhaken nötig hat, dient noch eine *vierte Bewegungsart*, bei welcher die Stifte m^1, m^2, ... unbewegt bleiben, wie bei der ersten die h^1, h^2, ..., bei der zweiten die k^1, k^2, ..., bei der dritten die i^1, i^2, ... unbewegt blieben. Bei der Division könnte auf diese vierte Bewegungsart verzichtet werden, weil die eingeführten Sperrhaken l^1, l^2, ... unmittelbar die bei der Subtraktion nötigen Sperrungen ausführen, nicht aber bei der Multiplikation, wenn man nicht noch eine zweite Art von Sperrhaken einführt. Ich beschränke mich nun hier darauf, das Verfahren mit Benützung dieser vierten Bewegungsart zu beschreiben.

Bei der Multiplikation des eingesetzten Multiplikanden mit einer Ziffer, zunächst etwa der Einerziffer des Multiplikators, samt Addition des Produktes zu der durch die anfänglichen Stellungen der Zifferstäbe f^1, f^2, ... dargestellten Zahl sollen die Zähne an den Schiebern n^1, n^2, n^3, ... in die Verzahnungen an den Zifferstäben f^1, f^2, f^3, ... eingreifen und ist der Schieber c mittels des Riegels c^1, von der in Fig. 1 und 2 dargestellten Nulllage aus nach hinten oben zu verschieben, bis der am Querstab d^5 befestigte Zeiger B auf den der Multiplikatorziffer entsprechenden Punkt der Skala A deutet, worauf der Riegel c^1 in die entsprechende Nute des Stabes b^1 einschlagen kann. Durch diese Bewegung des Schiebers c ist zwar die Bewegung der Kapseln e^1, e^2, e^3, ... und Stifte i^1, i^2, i^3, ..., nicht aber die der Zifferstäbe vollständig bestimmt. Denn, da Bewegungen der Zackenstäbe g^1, g^2, g^3, ... nach oben hinten durch die Sperrhaken l^1, l^2, l^3, ... nicht gehindert werden, bleiben Bewegungen der zweiten Art neben oder anstatt Bewegungen der ersten Art noch möglich. Es ist nun am Gestell b um zwei horizontale Zapfen wie M^0 drehbar ein Rahmen M angebracht und sind auf den horizontalen runden Querstab p desselben in den gleichen Ent-

fernungen (12 mm) wie die Kapseln e^1, e^2, ... und Zifferstäbe f^1, f^2, ... entsprechend durchlochte Stäbchen P^1, P^2, ... aufgesteckt, welche nach Bedarf durch Drehung um denselben in zweierlei Lagen, eine wirksame, wie in Fig. 1, 2 die P^1 bis P^9 oder die unwirksame wie in Fig. 1, 2 die P^{10}, P^{11}, P^{12} gebracht werden können. In der wirksamen Lage gleitet ihr hinterer Rand, wenn der Rahmen M nach hinten oben gedreht wird, auf der schon genannten am Rahmen f festen Platte f^0, welche für jeden der Zifferstäbe f^1, f^2, ... je einen Spalt besitzt, durch den ein am vorderen Ende dieses Zifferstabes befestigter Stift hindurchgeht. Mittels dieses Stiftes wird dann durch das wirksame Stäbchen der betreffende Zifferstab, wie er auch vorher gestanden sein mag, in seine Nullstellung geschoben, was eine Bewegung der dritten Art in jeder Stelle ergibt. Dann wird er in dieser Stellung gehalten, bis die Bewegung des Schiebers c nach hinten oben vollendet ist, mit welcher sich Bewegungen der Stifte i^1, i^2, ..., h^1, h^2, ..., k^1, k^2, ... von der vierten Art verbinden, wie sie anfangs auch gleichzeitig mit den ebengenannten Bewegungen der dritten Art stattfanden. Bewirkt wird nämlich die Drehung des Rahmens M nach oben hinten schon mittels der Bewegung des Schiebers c um das erste Nuteninterval, während welcher der Rahmen mittels eines beim Wiedervorgehen unwirksamen Sperrkegels von einem Ansatz des Riegels mitgenommen wird. Bis zur Erreichung der beschriebenen Endlage wird dann der Rahmen M von einer Sperrfeder s festgehalten, sodaß die auf null geschobenen Zifferstäbe zunächst nicht wieder hinabsinken können.

Von den Stiften k^1, k^2, ... werden an ihnen feste, ebenso benannte kleine runde Scheibchen getragen, an welchen bei der in Fig. 1 und 2 dargestellten Anfangslage der sonst auf dem festen Stab b^2 gleitende Querstab des Rahmens Q anliegt. Dieser Rahmen Q ist an den Rahmen R angegliedert, der um zwei am Gestell b feste Zapfen wie r etwas drehbar ist. Die soeben beschriebenen Bewegungen der dritten und vierten Art konnten durch diesen Querstab nicht gehindert werden, weil bei ihnen die direkt erzwungenen Bewegungen der Stifte n^1, n^2, ... und i^1, i^2, ... nur nach hinten oben gingen und ebenso gerichtete Bewegungen der Stäbe g^1, g^2, ... nicht gehindert waren. Eben deshalb wären aber auch die beschriebenen Bewegungen dieselben geblieben, wenn während derselben der Querstab mit dem Rahmen R nach vorn unten ausgewichen wäre. Dies muß nun geschehen, wenn nach Erreichung der der Multiplikatorziffer entsprechenden Endlage des Schiebers c der Riegel c^1 nach links geschoben wird, sodaß er in die Nute eintritt, und mit einem nach oben gehenden Ansatz die Sperrfeder s ausrückt, oder, wie in Fig. 1 und 2 einen über dem Stab b^1 liegenden um einen festen

Zapfen an seinem vorderen Ende drehbaren, durch die schief laufende Feder t^1 nach rechts gedrückten Stab t nach links dreht, womit zugleich durch den auf Stab t feststehenden Pfosten t^2 die Sperrfeder s ausgerückt wird. Der Rahmen M, der Wirkung der Schwere überlassen, wird dann nach vorn unten wieder in seine ursprüngliche Lage gehen. Dann können auch die Zifferstäbe $f^1, f^2, \ldots$ mit den Schiebern $n^1, n^2, \ldots$ der Wirkung der Schwere folgen. Die auf Null geschoben gewesenen werden so weit nach vorn unten gehen, bis die zugehörigen in derselben Richtung gehenden Zackenstäbe $g^1, g^2, \ldots$ je von dem aufliegenden durch seine Schwere nach unten getriebenen Sperrhaken $l^1, l^2, \ldots$ am nächsten Zacken gehemmt werden. Nicht auf Null geschoben gewesene der Zifferstäbe können dabei auch durch die rechts vorausgehenden mit dem zehnfachen Moment sich senkenden um einen Bruchteil eines Zifferabstandes gehoben werden. Die sämtlichen Zifferstäbe stellen sich so genau auf eine der Ziffern 0, 1, ... 9, und diese Ziffern geben die gesuchte Summe der vorher eingesetzt gewesenen Zahl und des gebildeten Produkts aus dem eingesetzten Multiplikanden und der Multiplikatorziffer. Denn, wie beschrieben, lassen sich die stattgehabten Bewegungen der dritten und vierten Art als aus Bewegungen der ersten und zweiten Art zusammengesetzt ansehen. Bei der Gesamtheit der dann anzunehmenden Bewegungen der zweiten Art sind aber die Zackenstäbe $g^1, g^2, \ldots$ nur um ganze Anzahlen von Zackenabständen, also die Zifferstäbe $f^1, f^2, \ldots$ nur um ganze Anzahlen von Zifferabständen fortgegangen, entsprechend Vielfachen von 10 in dem rechts 1., 2., ... Teilprodukt, und die den positiven oder negativen Resten dieser Teilprodukte entsprechenden Bewegungen erster Art bei den Zifferstäben $f^1, f^2, \ldots$ betragen auch nur ganze Anzahlen von Zifferabständen. Die Anzahl der Zifferabstände, um welche ein Zifferstab $f^1, f^2, \ldots$ zuletzt von 0 nach vorn sinkt, kann nicht 10 erreichen, weil damit ein Vorsinken des Zackenstabes $g^1, g^2, \ldots$ um ein ganzes Zackenintervall verbunden wäre und dies als unmöglich daraus erkannt wird, daß dann der Zackenstab schon weiter oben wäre festgehalten worden.

Es ist nun noch von der Beseitigung eines Fehlers zu sprechen, welcher bei dem beschriebenen Verfahren sich einstellen könnte. Wenn z. B. bei der richtigen Endlage f^1, f^2 und f^3 auf 9 zu stehen kommen sollen, so kann man sich die Gesamtlage, bei welcher sie noch auf 0 standen, auch aus dieser Endlage durch solche Verschiebungen dieser Zifferstäbe von 9 auf 0 entstanden denken, bei welchen die Stifte i^1, i^2, i^3 unbewegt bleiben. Durch die Verschiebung des Stabes f^1 von 9 auf 0 wird nun aber nicht nur Stab g^1 um 0,9 Zackenabstände in derselben Richtung verschoben, sondern, insoweit f^2 und f^3 ruhen, auch Stab g^2

um 0,09 und Stab g^3 um 0,009 Zackenabstände. Kommt dazu darnach oder gleichzeitig noch die Verschiebung des Stabes f^2 von 9 auf 0, so gehen g^2 und g^3 um weitere 0,9, beziehungsweise 0,09 Zackenabstände in derselben Richtung fort und die Verschiebung des Stabes f^3 von 9 auf 0 bewirkt noch einen dritten Fortgang des Stabes g^3 um 0,9 Zackenabstände, sodaß also im ganzen f^1, f^2 und f^3 um beziehungsweise 0,9; 0,99 und 0,999 Zackenabstände nach hinten oben gegangen sind. So genau läßt sich aber der Mechanismus nicht herstellen, daß nicht der Erfolg so werden könnte als wenn hier 1 an Stelle von 0,999 stünde und selbst bei 0,99 bestände die gleiche Gefahr, sodaß dann also f^2 von der Stellung auf 0 nicht herabsinken könnte, weil Stab g^2 fälschlich oben zurückgehalten würde. Daß die Abweichung nicht ein volles Zehntel des Zackenabstandes betragen kann, also im angenommenen Beispiel nicht auch die Stäbe g^1 und f^1 fälschlich oben gehalten werden können, ist dagegen leicht sicher zu erreichen. Um auch in den anderen Fällen Abhilfe zu schaffen, gibt man je dem Sperrhaken l^1, l^2, ... außer dem den Stäben b^0 nahe parallelen die sperrende Kante tragenden Arm noch einen zu diesem senkrechten, nach vorn oben abstehenden und macht man die Zifferstäbe f^1, f^2, ... so lang daß, wenn sie die Stellung auf 0 nach hinten oben zu um einen kleinen Bruchteil δ eines Zifferabstandes überschreiten, sie an den genannten zweiten Arm eines Sperrhebels wie l^1, l^2, ... anstoßen, die geeignete Lage des Rahmens f vorausgesetzt, und daß sie bei einer solchen Überschreitung der 0 um einen gewissen größeren Bruchteil ε eines Zifferabstandes die Ausrückung des Sperrhebels vollenden. Wenn dann im angenommenen Beispiel Stab f^1 beim Wiedervorfallen des Rahmens M von 0 auf 9 vorgleitet, während infolge der fälschlichen Sperrung des Stabes g^2, also auch des Stiftes k^2 nicht auch Stift m^2 mit Schieber n^2 und Stab f^2 vorgleiten können, so bewirkt das Vorgleiten des Stabes g^1 mit dem Stift h^1 eine Bewegung des Schiebers n^2 mit dem Stab f^2 nach oben hinten. Diese Bewegung würde im angenommenen Beispiel bis zu 0,9 Zifferabständen reichen, wenn nicht schon bei dem kleineren Betrag von ε Zifferabständen der Sperrhaken l^2 durch den Stab f^2 ausgerückt würde, worauf auch die Stäbe g^2 und f^2 wieder vorsinken, der g^2 um den ganzen Zackenabstand, um den er fälschlicherweise anstatt um 0,99 desselben gehoben worden war. Der Stab f^2 geht nun mit dem Vorsinken des Stabes g^2 zunächst wieder in die Nulllage vor und mit dem Sinken desselben um die ferneren 0,9 Zifferabstände vollends von 0 auf 9. Mit dieser Bewegung des Stabes f^2 von 0 auf 9 verbindet sich wieder, wenn auch Stab g^3 fälschlich gesperrt war, um 1 statt 0,999 Zackenabstände nach hinten oben gegangen war, ein Fortgang des Stabes f^3 von 0 ins

Negative, und wenn dieser Fortgang auch nur ε statt 0,9 Zackenabstände betragen hat, wird auch der Sperrhebel l^3 ausgerückt, und geht Stab g^3 bis zum nächsten Zacken weiter vor, f^3 von 0 auf 9. Das Entsprechende gilt ebenso, wenn noch mehr als 3 benachbarte Stellen mit 9 besetzt sein sollen. Bei den Ziffern 8, 7, ... 1 kommt diese Schwierigkeit nicht vor. Bei 0 aber kann die entgegengesetzte Schwierigkeit vorkommen, daß ein Zacken eines Stabes g^1, g^2, ... bei seiner Verschiebung nach hinten oben von dem betreffenden Sperrhaken nicht mehr gefaßt wird, während er gefaßt werden sollte, daß er etwa nur um 0,999 oder nur um 0,99 eines Zackenabstandes anstatt um einen ganzen verschoben worden ist. Diese Gefahr kann man dadurch beseitigen, daß man die durch die Stäbchen P^1, P^2, ... auf 0 zu schiebenden Zifferstäbe zunächst noch um einen kleinen Bruchteil δ eines Zifferabstandes weiter schiebt, indem man den Rahmen M stoßweise hebt.

Nachdem in der beschriebenen Weise das Produkt addiert ist, müssen die Scheren, Kapseln und Storchschnäbel wieder in die Ausgangslage zurückgebracht werden, während die Zifferstäbe ihre Lage im Rahmen f behalten. Zu diesem Zweck zieht man den Riegel c^1 wieder nach rechts, sodaß er aus der Nute heraustritt. Mit dieser Verschiebung des Riegels c^1 nach rechts verbindet sich nun in naheliegender einfacher, in den Figuren aber nicht ersichtlich gemachter Weise eine Verschiebung des Rahmens f nach links um den halben Abstand der Zifferstäbe (um 6 mm), wodurch bewirkt wird, daß der Eingriff der Zähne an den Schiebern n^1, n^2, ... in die Zifferstäbe f^1, f^2, ... aufhört, wogegen andere seitlich zugeschärfte an einem Querstab u in den gleichen Entfernungen (12 mm) wie die Zifferstäbe angebrachte Zähne seitlich in die Verzahnung der Zifferstäbe eintreten und nicht nur eine Verstellung derselben verhindern, sondern sogar kleine einen kleinen Bruchteil eines mit dem Zifferabstand (3,75 mm) natürlich übereinstimmenden Zahnabstandes betragende Abweichungen korrigieren, sodaß sich diese nicht im Lauf der länger fortgesetzten Rechnung anhäufen können. Der Stab u ist für gewöhnlich in seiner Stelle durch eine Feder gehalten, kann jedoch mit Überwindung derselben um einen halben Stellenabstand nach links geschoben werden, sodaß seine Zähne genau hinter denen der Schieber n^1, n^2, ... liegen und die Zifferstäbe frei bewegt werden, insbesondere alle zugleich durch den Rahmen M auf 0 gestellt werden können. Damit, während die Zifferstäbe durch Stab u festgehalten werden und die Kapseln e^1, e^2, ... mit dem Schieber c wieder in die Anfangslage, wie in Fig. 1 und 2 vorgeschoben werden, auch die durch ihre eigene und die Schwere der Schieber n^1, n^2, ... getriebenen Stäbe g^1, g^2, ... ungehindert vorsinken

können, müssen die Sperrhaken l^1, l^2, ... sämtlich ausgerückt werden, was sich in einfacher Weise direkt mit der seitlichen Verschiebung des Rahmens f verbinden läßt, wie es in Fig. 1 und 2 dargestellt und auch dann möglich ist, wenn die seitliche Verschiebung des Rahmens f unabhängig vom Riegel c^1 direkt mit der Hand ausgeführt wird. Die Querstäbe T und U bilden mit zwei Paaren von Stäben wie U^1 und U^2 einen starren Körper, welcher um dieselbe Achse wie die Sperrhaken drehbar ist. An den vom Stab T nach vorn abstehenden stumpfen Keil T^1 drückt bei der geschilderten Zwischenlage des Rahmens f das abgerundete hintere Ende von je einem der Führungsstäbe der Zifferstäbe f^1, f^2, ..., und der dann mit dem Stab T nach hinten gedrückte Stab U nimmt die oberen Arme der sämtlichen Sperrhaken mit.

Während nun die Zifferstäbe außer Eingriff mit den Schiebern $n^1, n^2, \ldots$ sind, zum Beginn oder während der Wiedervorbewegung des Schiebers c muß der Querstab des Rahmens Q wieder nach hinten oben in die Lage wie in Fig. 1 und 2 gebracht werden, sodaß dann unter Mitwirkung der Schwere auch die Scheibchen und Stifte $k^1, k^2, \ldots$, also auch die Zackenstäbe $g^1, g^2, \ldots$ mit den Kapseln $e^1, e^2, \ldots$, schließlich wieder ihre ursprüngliche Lage annehmen. Dies geschieht bei der in Fig. 1 und 2 dargestellten Ausführungsform erst im letzten Teil der Vorbewegung des Schiebers c, während der Zeiger B an der Skala A von 1 auf 0 geht, dadurch daß der Riegel c^1 beiderseits an untere Fortsetzungen des Rahmens R stößt und dieselben mitnimmt. Die genaue Endlage des Rahmens R wird dabei durch Stellschrauben wie r^1 reguliert.

Das bisher speziell Beschriebene bezog sich auf die Multiplikation mit der rechts äußersten Ziffer, sagen wir der Einerziffer des Multiplikators. Bei dem in den Schulen üblichen Verfahren wird erst mit der Einer-, dann der Zehner-, dann der Hunderterziffer usw. multipliziert. Dies wäre hier ebenso möglich, es empfiehlt sich aber der Analogie mit der Division wegen und behufs sukzessiver Näherung mehr die umgekehrte Reihenfolge. War z. B. mit der Hunderterziffer zu multiplizieren, so hatte man die Schieber $n^1, n^2, \ldots$ nicht, wie bisher gesagt, mit den Zifferstäben $f^1, f^2, \ldots$, sondern mit den $f^3, f^4, \ldots$ in Eingriff zu bringen, während die f^1 und f^2 mit einer Leiste im Eingriff sind, welche eine Fortsetzung des Stabes u nach rechts bildet. Nach der beschriebenen Bewegung des Riegels c^1 nach hinten oben und nach links, mit welcher die Multiplikation mit der Hunderterziffer vollendet war, und der darauf gefolgten Bewegung nach rechts und nach vorn unten ist dann der Schieber c wieder in seiner ursprünglichen Lage, und hierauf soll wieder eine Verschiebung des Rahmens f nach links

um einen halben Stellenabstand (um 6 mm) folgen, durch welche dann die Zifferstäbe $f^2, f^3 \ldots$ mit den Schiebern $n^1, n^2, \ldots$ in Eingriff gebracht werden, deren Zähne deshalb auch seitlich zugeschärft sind, und es ist dann alles vorbereitet wie erst beschrieben, nur jetzt für die Multiplikation mit der Zehnerziffer usw. Obgleich der Schieber c bei seiner vordersten Lage auf einen festen Anschlag trifft, ist doch im Stab b^1 auch die Nute 0 angebracht und soll in diese der Riegel c^1 einschlagen. Mit seinem Wiederaustritt läßt sich dann die eben genannte zweite seitliche Verschiebung des Rahmens f ebenso mechanisch verbinden wie die oben genannte erste.

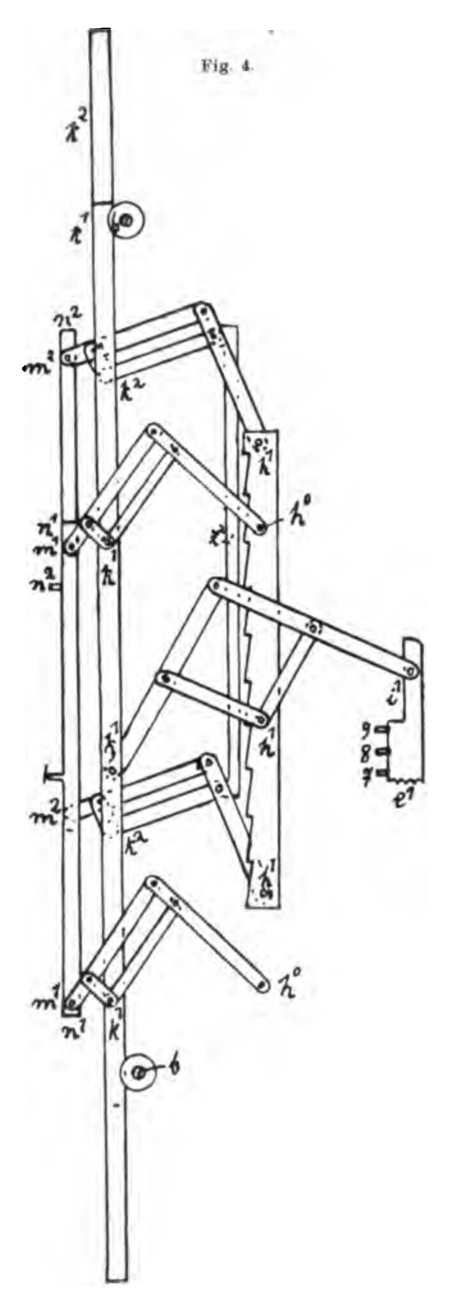
Zur *Division* ist natürlich der Dividend, wenn er sich nicht ohnehin durch unmittelbar vorausgegangene Rechnung ergeben hat, in die Zifferstäbe $f^1, f^2, \ldots$ einzuführen, entweder direkt mit der Hand oder nach vorheriger durch den Rahmen M auszuführender Nullstellung in der vorstehend beschriebenen Art nach Einsetzung in die Kapseln $e^1, e^2, \ldots$ Darnach ist in diese Kapseln der Divisor einzusetzen und ist, während die Zifferstäbe durch den Stab u gehalten, die Schieber $n^1, n^2, \ldots$ von ihnen frei sind, der Riegel c^1 von der Nute 0 zur Nute 10 zu schieben. Der Punkt der Skala A, bei welchem dann der Zeiger B steht, ist in der linken für die Division (D) bestimmten Zahlenreihe dieser Skala mit 0 bezeichnet, die in der Reihe M (Multiplikation) mit 9, 8, ..., 1 bezeichneten Punkte aber mit 1, 2, ..., 9. Nachdem der Riegel c^1 dann in die Nute 10 eingeschoben, wieder herausgezogen und dadurch analog wie bei der Nute 0 der Rahmen f in die Lage gebracht worden ist, daß die Schieber $n^1, n^2, \ldots$ mit den Zifferstäben $f^1, f^2, \ldots$ oder $f^2, f^3, \ldots$ oder $f^3, f^4, \ldots$ usw. in Eingriff sind, wenn die links erste Quotientenziffer etwa Einer oder Zehner oder Hunderter usw. bedeutet, ist der Schieber c nach vorn unten um 1, 2, ... oder 9 Nutenabstände zu schieben, wenn diese hier erst zu suchende Quotientenziffer 1, 2, ... oder 9 werden soll. Schon bei der vorbeschriebenen Schiebung des Riegels c^1 zur Nute 10 ist der Rahmen R entweder durch Druck auf seinen Seitenarm R^3 in seiner Lage erhalten oder, wie bei jeder anderen Schiebung zur Nute 10 wieder in die Lage wie in Fig. 1 und 2 gebracht worden. Der Riegel dreht nämlich beim Übergang von Nute 9 zu Nute 10 den einarmigen Hebel R^1 nach hinten, und dieser nimmt durch das Band R^2 den Rahmen R im gleichen Drehungssinn mit. Da also die Stifte $k^1, k^2, \ldots$ ihre Lage beibehalten oder wieder gewonnen haben, waren die Bewegungen nur von der zweiten Art, und, weil die von den Stiften $i^1, i^2, \ldots$ zurückgelegten Anzahlen von Wegeinheiten durch 10 teilbar waren, betrugen die Wege der Zackenstäbe nur volle Zackenabstände. Während dann der

Riegel c^1 wieder von Nute 10 bis Nute 9 vorgeht, wird der Rahmen R wieder frei und bewirkt der Riegel wieder eine Hebung des Rahmens M, durch welche, insoweit dessen Stäbchen P^1, P^2, ... in ihre wirksame Lage gebracht worden sind, die betreffenden Zifferstäbe, wie oben bei der Multiplikation beschrieben, auf Null geschoben werden. Würde z. B. der Divisor, dreiziffrig, in e^1, e^2, e^3 eingesetzt sein und der Dividend, sechsziffrig, in f^1 bis f^6, und würde man erkennen, daß der Quotient zwischen 100 und 1000 läge, so würde man, während n^1, n^2, n^3 mit f^3, f^4, f^5 in Eingriff wären, diese drei Zifferstäbe auf Null schieben und zugleich so lange den Riegel c^1 von einer Nute zur folgenden vorschieben, wie dabei nicht der Stab f^6 die Null überschreitet. Es ist dabei also kein Kopfrechnen oder sonstiges Nachdenken, sondern lediglich ein Beobachten des durch die stetig sich verändernde Stellung des Stabes f^6 dargestellten jeweiligen Restes nötig. Die genannte Hebung des Rahmens M wird hier durch den Doppelhebel M^1 bewirkt. Dieser ist nämlich unten mit einem Sperrkegel M^3 versehen, welcher dem nach hinten gehenden am Riegel c^1 festen Ansatz c^2 ausweicht, von dem nach vorn gehenden aber die geeignete Strecke weit mitgenommen wird. Der obere Arm des Doppelhebels M^1 nimmt dann durch ein Band M^2 den Rahmen M mit. Nach Ankunft bei der vorstehend bestimmten Nute wird dann der Riegel c^1 nach links in die Nute eingestoßen. Hiermit wird wie bei der Multiplikation der Rahmen M wieder frei, mit ihm sinken die auf 0 geschoben gewesenen Zifferstäbe nach vorn unten und mit ihnen die Schieber n^1, n^2, n^3 und Stäbe g^1, g^2, g^3, diese so weit, bis sie am nächsten Zacken von den Sperrhebeln l^1, l^2, l^3 gesperrt werden. Diese Zackenstäbe g^1, g^2, g^3 mußten im allgemeinen schon gleichzeitig mit dem Schieber c vorgehen, auch um mehr als nur einen Bruchteil eines Zackenabstandes. Die Sperrhebel l^1, l^2, l^3 werden jedoch dabei von selbst im Bedarfsfall durch die betreffenden Zifferstäbe, hier f^3, f^4, f^5 ausgerückt. Ist nämlich z. B. Stab g^1 gesperrt, während Stift i^1 nach vorn unten geschoben wird, so muß im gewählten Beispiel Stab f^3 von seiner Nulllage aus mit Schieber n^1 nach hinten oben ins Negative gehen, bis er dabei den Sperrhebel l^1 ausgerückt hat. Dann aber wird der Stab f^3 entweder bei langsamer Bewegung des Schiebers c durch die Schwere wieder in die Nulllage getrieben werden, sodaß der Sperrhebel l^1 wieder vorfällt und der Stab g^1, falls er so weit kommt, am nächsten Zacken wieder gesperrt wird und bei noch weiterem Vorgehen des Schiebers c das Gesagte sich wiederholt, oder es wird der Stab f^3 zunächst bei rascher Bewegung des Schiebers c jenseits der Nulllage bleiben und den Sperrhaken l^1 ausgerückt erhalten, äußersten Falls bis der Schieber c stillgehalten wird. Die Endlage wird nach Senkung des Rahmens M

immer die gleiche werden. Sollte sich zeigen, daß wider Erwarten der bleibende Rest noch größer als der Divisor ist, so hat man einfach um eine Nute weiter nach vorn mit dem Riegel c^1 zu gehen, sollte man dagegen zu weit gegangen sein, in welchem Falle die Zehnerübertragung bis an das linke Ende fortliefe, so geht man unter vorübergehender direkter Wiederhebung des Rahmens M wieder um einen Nutenabstand nach hinten. Der links letzte Zifferstab soll nie links von allen Schiebern $n^1, n^2, \ldots$ zu liegen kommen und soll nie durch ein Stäbchen wie die $P^1, P^2, \ldots$ auf 0 geschoben werden, weshalb bei ihm der Leitstift nicht über die Platte f^0 herausreicht. Bei ihm soll die Zifferreihe noch jenseits der 0 auf $-1, -2, \ldots$ fortgesetzt sein, wofür zum Ablesen und Abdrucken dieselben Zifferstängchen, nur umgedreht verwendet werden können, sodaß sie ⇂, ⇂ ... für $-1, -2, \ldots$ geben.

Auf den Zifferstäben $f^1, f^2, \ldots$ sind die Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ in Linkslettern aus weichem Gummi weiter hinten wiederholt zu direkt mechanischer Kopierung der Summen oder Differenzen der Produkte. Bei Senkung des dem Rahmen f angegliederten Rahmens V mit den das Papier v führenden Walzen und Querstäben gehen ersichtlich die für jeden Zifferstab einzeln vorhandenen farbgebenden Röllchen wie v^1 nach hinten und wird durch eine am Rahmen f feste Feder V^1 und das mit der treibenden Walze verbundene Zackenrad das Papier je um eine Zeile fortgeschoben. Ein ähnlicher schmälerer auch mit dem Rahmen f verbundener Apparat W, welcher immer links von den Kapseln $e^1, e^2, \ldots$ bleibt, dient hauptsächlich zur direkten Kopierung der Quotienten, deren Ziffern er einzeln bei Senkung je nach ihrer Feststellung aufnimmt. Die zugehörige Skala w mit Linkslettern aus weichem Gummi ist am Querstab d^2 befestigt. Für die Multiplikatoren, welche gegeben waren, hat diese direkte Kopierung nur den Zweck nachträglicher Kontrollierung, wozu, wenn man nicht wie auf der Skala A noch eine zweite Ziffernreihe anbringen will, auch die für die Quotienten dienen kann, wenn man $9, 8, \ldots, 1$ statt $1, 2, \ldots, 9$ liest. Zur Kontrolle der eingesetzten Multiplikanden oder Divisoren könnte man ähnliche Letterstreifen vorn mit den Kapseln $e^1, e^2, \ldots$ verbinden, ebenfalls mit Zifferabständen von 2 Wegeinheiten ($4\frac{1}{2}$ mm) und, wie ich schon in D.R.P. 49121 beschrieben, an der geeigneten Querlinie abdrucken, während der Riegel c^1 in die Nute 2 eingeschlagen ist. Ersatz für diese im abgebildeten Exemplar weggelassene Einrichtung kann eine besondere Übertragung in die Stäbe $f^1, f^2, \ldots$ geben.

Die mitgeteilten Prinzipien, namentlich der Zehnerübertragung, lassen sich auch bei bloßen Additions- und Subtraktionsmaschinen verwenden, auch bei denjenigen, auf welche nach der Bolléeschen Ein-


Fig. 4.

richtung die allgemeinen Rechenmaschinen zurückkommen. Die mit der Rückführung der Zifferträger f^1, f^2, ... auf Null verbundenen Bewegungen lassen sich wie bei der Burroughsschen Additionsmaschine auch wieder zur Darstellung der Summen der somit ausgelöschten Zahlen verwenden. Gleitende Bewegungen werden künftig mehrfach durch rollende ersetzt.

Will man die Verdoppelung der Storchschnäbel ersparen, so bringt man an den Stäben n^1, n^2, ... nur vorn einen Stift m^1, m^2, ... an und läßt ihren hinteren, den Zahn tragenden Teil auf Rollen aufliegen, welche einer gemeinsamen quer durchlaufenden Achse aufgesteckt sind. Durch Heben und Senken dieser Achse kommen die Zähne in und außer Eingriff mit den Zifferstäben. Gleichzeitig senkt und hebt sich eine querlaufende Leiste, welche in der Zwischenzeit, insbesondere während der seitlichen Verschiebung in die Zifferstäbe eingreift. Ebenso läßt man dann die hinteren Teile der Stäbe g^1, g^2, ... auf Stiften gleiten, welche von den Längsarmen der Hebel l^1, l^2, ... seitlich abstehen und in Längsspalte der Stäbe g^1, g^2, ... hineinreichen, deren Zacken sich nun auf ihrer Unterseite befinden, und an eine feste querlaufende scharfkantige Leiste anstoßen, solange nicht Stab g^1, g^2, ... durch Hebel l^1, l^2, ... ausgerückt wird.

Fig. 4 gibt für $\gamma = z$ eine Einrichtung, bei welcher die Stäbe g^1, g^2, ... und n^1, n^2, ... frei durch die oberen, hier verdoppelten und paarweise durch Stängchen wie z^2 miteinander verkuppelten Storch-

schnäbel getragen werden, die Stifte $i^1, i^2, \ldots$ wie bisher und die hier je drei Stifte $k^1, k^2, \ldots$ durch ebenfalls mit $k^1, k^2, \ldots$ bezeichnete Längsstangen, welche auf je zwei Rollen liegen, die sämtlich auf zwei feste Achsen b aufgesteckt sind.

Würzburg, im Dezember 1904.

Numerische Berechnung der Hauptachsen einer Fläche zweiter Ordnung.

Von C. Runge in Hannover.

Um bei einer quadratischen Form der drei rechtwinkligen Raumkoordinaten durch bloße Drehung des Koordinatensystems die drei Produkte der Veränderlichen wegzuschaffen, sodaß nur die quadratischen Glieder übrig bleiben, kann man auf die folgende Weise verfahren.

Es sei

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ezx + fxy$$

die gegebene quadratische Form der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z. Dreht man nun das Koordinatensystem z. B. um die z-Achse, so bleibt c ungeändert; a, b, d, e, f dagegen ändern sich. Wenn man mit d', e', f' die neuen Werte von d, e, f und mit α den Drehungswinkel bezeichnet, positiv in dem Sinne von der positiven x- zur positiven y-Achse gerechnet, so ist:

$$f' = f\cos 2\alpha - (a-b)\sin 2\alpha, \quad \begin{array}{l} d' = d\cos\alpha - e\sin\alpha, \\ e' = d\sin\alpha + e\cos\alpha \end{array}$$

$$(\text{demnach } d'^2 + e'^2 = d^2 + e^2).$$

Wenn man nun den Drehungswinkel so bestimmt, daß f' verschwindet, so wird

$$d'^2 + e'^2 + f'^2 = d'^2 + e'^2 = d^2 + e^2.$$

Nun sei f dem absoluten Betrage nach größer oder wenigstens nicht kleiner als d und e. Dann ist $\frac{d^2+e^2}{2} \leqq f^2$ und mithin

$$d^2 + e^2 + f^2 \geqq \tfrac{3}{2}(d^2 + e^2)$$

und somit

$$d^2 + e^2 + f^2 \geqq \tfrac{3}{2}(d'^2 + e'^2 + f'^2).$$

Wäre eine der beiden Größen d oder e gleich Null, z. B. $e = 0$, so würde sogar $d'^2 + e'^2 + f'^2 = d'^2 + e'^2 = d^2$ und daher

$$d^2 + e^2 + f^2 \geqq 2d^2 \quad \text{und} \quad d^2 + e^2 + f^2 \geqq 2(d' + e'^2 + f'^2).$$

Wiederholt man die Operation, indem man das Koordinatensystem jedesmal um eine solche unter den Koordinatenachsen dreht, daß der größte von den Koeffizienten der Produkte der Veränderlichen zum Verschwinden gebracht wird, so vermindert sich fortgesetzt die Summe der Quadrate dieser Koeffizienten, und zwar, da von dem zweiten Schritt an immer einer der Koeffizienten Null ist, so vermindert sich die Summe der Quadrate bei jedem Schritt mindestens auf die Hälfte.

Auf diese Weise bringt man es in kurzer Zeit dahin, daß die Glieder, welche die Produkte der Veränderlichen enthalten, gegen die quadratischen Glieder vernachlässigt werden können. Nach einem geeigneten Schema rechnend kann man die Rechnung bequem und rasch ausführen.

Wenn um die z-Achse gedreht werden soll, so wird der Drehungswinkel α, den wir zwischen -45^0 und $+45^0$ voraussetzen können, aus der Gleichung $\frac{f}{a-b} = \operatorname{tg} 2\alpha$ gewonnen. $a > b$ vorausgesetzt, wird dann

$$a' = a + \frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha,\quad b' = b - \frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha,\quad d' = d\cos\alpha - e\sin\alpha,\quad e' = d\sin\alpha + e\cos\alpha.$$

Da $\operatorname{tg}\alpha$ dasselbe Zeichen wie f hat, so ist $\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$ immer positiv. Daraus folgt, daß bei der Transformation die Größen a und b auseinanderrücken. Vom zweiten Schritte an ist eine der beiden Größen e, d gleich Null, sodaß sich die Ausdrücke von d' und e' entsprechend vereinfachen.

Ich verfahre dabei nach dem folgenden Schema:

x^2	y^2	z^2	yz	zx	xy
a	b	c	d	e	f
$\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$	$-\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$		$d\cos\alpha$ $-e\sin\alpha$	$d\sin\alpha$ $e\cos\alpha$	
a'	b'	c	d'	e'	0

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{f}{a-b}$ $\alpha = \ldots$

Wenn $b > a$ ist, so lasse ich x und y die Plätze tauschen, sodaß die Kolonne für y^2 vor die von x^2 und die Kolonne für zx vor die für yz tritt. Dann steht immer die positive Korrektur $\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$ links, die negative $-\frac{f}{2}\operatorname{tg}\alpha$ rechts. Dreht man um eine der andern Achsen, so gilt das analoge Schema, das ich nicht besonders hinzusetzen brauche.

Ein Beispiel wird zeigen, wie leicht man zum Ziele gelangt. Ich nehme dabei an, daß die Genauigkeit des Rechenschiebers ausreicht.

x^2	y^2	z^2	yz	zx	xy		
7.05	4.98	2.97	1.99	6.03	4.01	$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{6.03}{4.08}$	$\alpha = 28^0.0$
			1.76		0.93		
1.60		− 1.60	− 1.88		3.54		
8.65	4.98	1.37	− 0.12	0.00	4.47	$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4.47}{3.67}$	$\alpha = 25^0.3$
1.06	− 1.06		− 0.11	− 0.05			
9.71	3.92	1.37	− 0.11	− 0.05	0.00		

Die folgenden Schritte ändern die drei ersten Zahlen in den hingeschriebenen Ziffern nicht mehr. Denn der nächste Schritt gibt $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-0.11}{2.55}$, also $\frac{f}{2} \operatorname{tg} \alpha < 0.002$. Das Resultat der Transformation ist also, wenn man die neuen Koordinaten wieder mit x, y, z bezeichnet:

$$9.71 x^2 + 3.92 y^2 + 1.37 z^2.$$

Die Konvergenz des Verfahrens ist im allgemeinen sehr viel rascher als es die Formel $d^2 + e^2 + f^2 \geqq 2(d'^2 + e'^2 + f'^2)$ vermuten läßt. Sobald nämlich die Koeffizienten d, e, f klein gegen die Unterschiede von a, b, c werden, so wird die Korrektur $\frac{f}{2} \operatorname{tg} \alpha$ von zweiter Ordnung. Zugleich wird der Drehungswinkel klein von der ersten Ordnung, und damit wird, wenn z. B. f zum Verschwinden gebracht wird und $e = 0$ ist, der neue Wert von d sehr nahe gleich dem alten und der neue Wert von e ebenfalls von zweiter Ordnung klein. Nach einem weiteren Schritt müssen also die beiden nicht verschwindenden unter den Größen d, e, f mindestens von zweiter Ordnung klein sein.

Nachdem man die Koeffizienten der quadratischen Glieder auf diese Weise gefunden hat, werden die Richtungen der neuen Koordinatenachsen am besten aus den bekannten linearen Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned} ax + \frac{f}{2} y + \frac{e}{2} z &= \lambda x, \\ \frac{f}{2} x + by + \frac{d}{2} z &= \lambda y, \\ \frac{e}{2} x + \frac{d}{2} y + cz &= \lambda z, \end{aligned}$$

wo λ zur Bestimmung der Richtung der x-Achse gleich dem gefundenen Koeffizienten von x^2 zu setzen ist usw. Zur Ausführung der Rechnung sind nur zwei von den drei Gleichungen erforderlich. Die dritte kann zur Kontrolle dienen. So erhält man z. B. für den oben berechneten Fall zur Bestimmung der x-Achse

$$-2.66x + 2.00y + 3.02z = 0,$$
$$2.00x - 4.73y + 1.00z = 0,$$
$$3.02x + 1.00y - 6.74z = 0.$$

Die ersten beiden Gleichungen geben

$$x : y : z = 16.3 : 8.7 : 8.6,$$

was auch der dritten Gleichung genügt.

Mir scheint die hier vorgeschlagene Behandlung des Hauptachsenproblems der Flächen zweiter Ordnung aus zwei Gründen sich zu empfehlen. Erstens ist die Rechnung einfacher als die direkte Auflösung der Gleichung dritten Grades, von der die orthogonale Transformation auf eine Summe von Quadraten algebraisch abhängt. Zweitens ist das Verfahren aber auch theoretisch von Interesse. Denn da es die drei Wurzeln der Gleichung liefert, so enthält es zugleich einen neuen Beweis dafür, daß die Wurzeln reell sind.

Wie man ohne weiteres erkennt, ist das Verfahren auch auf quadratische Formen von beliebig vielen Veränderlichen anwendbar.

Hannover, im Mai 1904.

Neue Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie.

Von F. Ludwig in Greiz.

IV.

1. *C. C. Adams.* Variation in Jo. Proc. Amer. Assoc. for the Adv. of Sci. XLIX. 1900. 18 pp. 27 plates.

2. *P. Bachmetjew.* Über die Anzahl der Augen auf der Unterseite der Hinterflügel von Epinephele jurtina L. Allg. Zeitschr. für Entomologie VIII. 1903. p. 253—256.

3. *F. C. Baker.* Rib Variation in Cardium. Amer. Nat. 1903. XXXVII. p. 481—488.

4. *E. Ballowitz.* Über Hypomerie und Hypermerie bei Aurelia aurita. Arch. f. Entw. Mech. d. Organismen. 1899. VIII. p. 239—252.

5. *C. R. Bardeen* and *A. W. Elting.* A Statistical Study of the Variations in the Formation and Position of the Lumbo-sacral Plexus in Man. Anatom. Anz. XIX. 1901. p. 124—135, 209—238.

6. *W. Bateson, E. R. Saunders, R. C. Punnett, C. C. Hurst.* Experimental Studies in the Physiology of Heredity Experiments with Datura, Matthiola, Salvia Horminum, Ranunculus arvensis; Pisum sativum, Lathyrus odoratus and with Poultry. Report II of the Evolution Committee of the Roy. Society. London 1905. 154 pp.

7. *L. Camerano.* Lo studio quantitativo degli organismi ed il coefficiente somatico. Atti d. R. Accad. delle sci. di Torino XXXV. 1900. 22 pp.

8. *L. Camerano.* Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di variabilità, di variazione, di frequenza, di deviazione e di isolamento. Atti d. R. Accad. delle sci. di Torino XXXV. 1900. 19 pp.

9. *L. Camerano.* Lo studio quantitativo degli organismi e gli indici di mancanza, di correlazione e di asimmetria. Atti d. R. Accad. delle sci. di Torino XXXVI. 1901. 8 pp.

10. *L. Camerano.* Ricerche somatometriche in Zoologia Boll. dei Musei de Zool. e Anat. Comp. di Torino XVII. 18 pp.

11. *W. E. Castle.* Heredity of Coat Characters in Guinea-Pigs and Rabbits.

Published by the Carnegie Institution. Washington D. C. 1905. 78 S. u. 12 Fig. auf 6 Taf.

12. *C. Correns.* Über den Modus und den Zeitpunkt der Spaltung der Anlagen bei den Bastarden vom Erbsentypus. Bot. Zeitung. 1902. LX. p. 66—82.

13. *C. Correns.* Die Ergebnisse der neuesten Bastardforschungen für die Vererbungslehre. Ber. d. D. Bot. Ges. 1902. XIX. p. 71—94.

14. *C. Correns.* Scheinbare Ausnahmen von der Mendelschen Spaltungsregel für Bastarde. Ber. d. D. Bot. Ges. 1902. XX. p. 159—172.

15. *C. Correns.* Über Bastardierungsversuche mit Mirabilissippen. Ber. d. D. Bot. Ges. 1903. XX. p. 594—609.

16. *C. Correns.* Über die dominierenden Merkmale der Bastarde. Ber. d. D. Bot. Ges. 1903. XXI. p. 133—147.

17. *C. Correns.* Weitere Beiträge zur Kenntnis der dominierenden Merkmale und der Mosaikbildung der Bastarde Ber. d. D. Bot. Ges. 1903. XXI. p. 195—209.

18. *L. Cuénot.* Le loi de Mendel et l'hérédité de la pigmentation chez les souris. Arch. Zool. exp. et gén. 1902 p. XXVII; 1903 XXXIII—XLI.

19. *E. R. Cummings and A. V. Mauck.* A Quantitative Study of Variation in the Fossil Brachiopod, Platystrophia lynx. Amer. Jour. of Sci. XIV. Juli 1902. 9—16.

20. *C. B. Davenport.* Mendels Law ot Dichotomy in Hybrids Biol. Bulletin 1901. p. 307—310.

21. *C. B. Davenport.* The Statistical Study of Evolution. Popular Science Monthly 1901. LIX p. 447—460.

22. *C. B. Davenport.* Variability, Symmetry and Fertility in an Abnormal Species Biom. I 255—256. 1902.

23. *C. B. Davenport.* A Comparison of the Variability of Some Pectens from the East and West Coasts of the United States. Mark Anniversary Volume Article VI 1903 p. 121—136, plate IX

24. *C. B. Davenport.* Quantitative Studies in the Evolution of Pecten III Pecten opercularis from three localities of the British Isles. Proc. Amer. Accad. Arts and Sci. XXXIX, 1903, p. 123—159.

25. *Gertrudo Crotty Davenport.* Variation in the Number of Stripes on the Sea-Anemone Sagartia Luciae. Mark Anniversary Volume. 1903. Article VII p. 137—146, pl. X.

26. *C. B. Davenport.* Color Inheritance in Mice, Wonder Horses and Mendelism. Science 1904. Vol. XIX, N. 472 p. 110—114, N. 473 p. 151—153.

27. *C. B. Davenport.* Statistical Methods with special Reference to Biological Variation. Second revised Edition New York John Wiley u. Son 1904. 223 S.

28. *H. De Vries.* La loi de Mendel et les correcteurs constantes des hybrides. Compt. rend. de l'Acad. des Sci. Feb. 2 1903.

29. *L. Doncaster.* Experiments in Hybridization with special Reference to the Effect of Conditions on Dominance. Phil. Trans. B. CXCVI 1903 p. 119—173.

30. *Georg Duncker.* Symmetrie und Asymmetrie bei bilateralen Tieren. Arch. f. Entwicklgsmech. der Organismen von W. Roux. 1904, XVII. Bd. 4. H. p. 533—682.

31. *Carl Engberg.* The Degree of Accuracy of Statistical Data. University Studies, University of Nebraska 1903. III p. 87—100.

32. *Angel Gallardo.* Interpretation dinamica de la división cellular. Doktordissertation. Buenos Aires 1902. 103 p. 6 Fig.

33. *I. W. Harshberger.* The Limits of Variation in Plants. Proc. Acad. Nat. Sci. Philadelphia 1901, LIII p. 303—319.

34. *W. A. Kellermann.* Variation in Syndesmon thalictroides. Ohio Naturalist. 1901, p. 101—111, Pl 9.

35. *F. Ludwig.* Zur Biometrie von Chrysanthemum segetum. Aus der Festschrift zu P. Aschersons siebzigstem Geburtstage. Berlin. Gebr. Bornträger. 1904, XXV p. 296—301.

36. *F. Ludwig.* Die Mathematik im Walde. Greizer Zeitung 1904.

37. *F. Ludwig.* Der Aufbau des Waldes nach statischen Gesetzen. Weitere Abschnitte aus der Biometrie IX. Zeitschr. f. Math. u. naturw. Unterr. 1905, Heft 2—4. (p. 105 ff.)

38. *D. F. Macdougal.* Mutants and Hybrids of the Oenotheras. Carnegie Institution. Washington D. C. 1905. 57 S. u. 13 Fig.

39. *Metzger.* Der Wind als maßgebender Faktor für das Wachstum der Bäume. Mündener Forstliche Hefte III 1893, p. 35—86 mit 21 Fig.

40. *Metzger.* Studien über den Aufbau der Waldbäume und Bestände nach statischen Gesetzen. Mündener Forstliche Hefte. Heft 5 p. 61—74, Heft 6 p. 94—119, 1894; Heft 7, 1895, p. 45—97 mit 13 Fig.

41. *Metzger.* Form und Wachstum der Waldbäume im Lichte der Darwinschen Lehre. Allgem. Forst- und Jagdzeitung, herausgeg. von Prof. Dr. Tuisko Lorey, Frankfurt a. M., Juli 1896 p. 224—233.

42. *J. J. Prins.* De fluctuierende Variabiliteit van mikroskopische Structuren bij Plantem Grooningen 1904 (J. B. Wolters) Dr.-Dissert. 51 S.

43. *L. Rhumbler.* Mechanische Erklärungen der Ähnlichkeit zwischen magnetischen Kraftliniensystemen und Zellteilungsfiguren. Archiv für Entwicklungsmechanik 1903, Bd. XVI, p. 475—585.

44. *L. Rhumbler.* Zellenmechanik und Zellenleben. Vortrag geh. auf der Vers. d. Naturf. u. Ärzte zu Breslau 1904. (Umschau VIII 1904 N. 39, p. 764—770 mit 8 Figuren.)

45. *H. Rodewald.* Untersuchungen über die Fehler der Samenprüfungen. Arbeiten der Deutschen Landwirtschaftsgesellschaft Heft 101.

46. *Franz Schwarz.* Physiologische Untersuchungen über Dickenwachstum und Holzqualität von Pinus silvestris. Berlin 1899, Parey, 371 S., 9 Taf. u. 5 Textfig.

47. *George Harrison Shull.* Place Constants for Aster prenanthoides Contrib. from the Hyll Bot. Lab. XIV. Bol. Gag. 38. Nov. 1904. 333—375.

48. *P. Sonntag.* Die Pflanze als Baumeister. Prometheus N. 766, 1904, p. 593 ff.

49. *Sonntag.* Die Pflanze als Baumeister. Schriften der Naturforsch. Gesellsch. in Danzig. N. F. XI. Heft 1—2. 1904. p. LXV—LXVI.

50. — Mechanische Zweckmäßigkeiten im Bau der Äste unserer Nadelhölzer l. c. p. 126—133

51. *R. M. Strong.* A Quantitative Study of Variation in the Smaller North-American Shrikes. Amer. Nat. 1901, XXXV, p. 271—298.

52. *Tine Tammes.* Ein Beitrag zur Kenntnis von Trifolium pratense quinquefolium de Vries. Bot. Ztg. 1904. Abt. I, S. 212—225. Über die Periodizität morphologischer Erscheinungen. Naturw. Rundschau 1903. S. 413.

53. *C. E. Wasteels.* Over de ligging der Maxima in Variatiecurve en het voorkomen der Fibonaccigetallen. Handlinger von het Vlaamsch Natuur en Geneeskundig Congres gehouden te Gent, 27. Sept. 1903.

54. *R. Weber.* Lehrbuch der Forsteinrichtung mit besonderer Berücksichtigung der Zuwachsgesetze der Waldbäume. 1891.

55. *S. R. Williams.* Variation in Lithobius forficatus. Amer. Nat. 1903, XXXVII, p. 299—312.

56. *H. C. Williamson.* On the Mackerel of the East and West Coasts of Scotland. Rep. Scottish Fisheries Board XVIII, 1900, p. 325—329.

Das kleine handliche Werkchen von Davenport (26) *„über die statistischen Methoden“* mit besonderer Berücksichtigung der biologischen Variation sollte nach einem Begleitschreiben zur ersten Auflage (1899) als Handbuch und Leitfaden zunächst für Anthropologen, Botaniker, Zoologen, Vertreter der Anatomie, Physiologie, Psychologie dienen, die sich mit *quantitativen* Untersuchungen der Spezies und der organischen Variation beschäftigen wollen; es sollte weiter ein Hilfsmittel sein für Landwirte, Soziologen, Meteorologen und andere statistische Praktiker. Es hat sich als solches vorzüglich bewährt, wie die nunmehr vorliegende um 75 Seiten vermehrte *zweite Auflage* beweist. In einfacher Sprache und ohne zu hohe mathematische Anforderungen werden in den ersten Kapiteln die statistischen Methoden Galtons und Pearsons mit Benutzung der zahlreichen neueren Abhandlungen des letztgenannten Forschers erörtert, die Formeln zur Berechnung der Frequenzkurven abgeleitet und die Ermittelung der Zugehörigkeit der Variationspolygone zu den verschiedenen Typen derselben an Beispielen gelehrt. Das IV. Kapitel behandelt die korrelative Variabilität und ein V. Kapitel in nahezu vollständiger Übersicht die bisherigen Ergebnisse auf den verschiedensten Gebieten der Biometrie bis auf die jüngeren Zweige der Homotypose, der Telegonie und des Mendelismus etc. Die zahlreichen Hilfstabellen bis zu den Logarithmen, trigonometrischen und Potenztafeln herab machen alle weiteren Hilfsmittel überflüssig. Selbst einige Blätter leeren Papieres und Koordinatenpapieres zur direkten Eintragung von Resultaten sind beigegeben. Bei dem niederen Preis ($ 1,50) wird das

zierliche mit dauerhaftem Einband in Goldschnitt versehene Taschenbuch bald Besitztum aller Biometer werden.

Ein neues eigenartiges Gebiet behandelt die umfang- und inhaltreiche Arbeit Dunckers *über Symmetrie und Asymmetrie* beim Menschen und den Tieren (30). Die bisher allein übliche stereometrische Betrachtungsweise der Symmetrieverhältnisse mit ihren Gleichungen aus der Kristallographie hat sich — wie dies bei den variabeln organischen Formen leicht verständlich ist — als unzureichend erwiesen. Nur Massenuntersuchungen mit Hilfe biostatistischer Methoden führen zum Ziel. Die nächste Aufgabe, die sich Duncker stellte, bestand darin, für die bunte Mannigfaltigkeit des Untersuchungsmaterials eine einheitliche Beschreibungsform zu finden, die übersichtlicher und kürzer ist als die Nebeneinanderstellung etwa von Kombinationsschematen und doch die in Betracht kommenden Eigenschaften auszudrücken vermag, wie bekanntlich für die typischen Variationspolygone nur wenige Bestimmungswerte ausreichen, auch ihre feineren Eigentümlichkeiten zum Ausdruck zu bringen. Es genügen schon je 4 Bestimmungswerte zur Kennzeichnung der beiden Variationsreihen, der Einzelmerkmale und der Differenzreihe des Merkmalpaares, nämlich das arithm. Mittel A, der Variabilitätsindex E, der dritte (β_3) und vierte (β_4) Momentquotient der betr. Reihe. Außer ihnen verwendet Duncker noch die prozentuale Differenzfläche (δ) der Variationspolygone der Einzelmerkmale als Maß der Verschiedenheit ihrer Variationsreihen, den Korrelationskoeffizienten (ϱ), sowie den Asymmetrieindex (α) des Merkmalpaares (da der statistische Begriff bilateraler Übereinstimmung zweier homologer Merkmale alle Übergangsstufen von vollkommener Symmetrie zur vollkommen rechts- oder linksseitigen Asymmetrie zuläßt). Duncker erörtert nach Ableitung der entsprechenden Ausdrücke die Praxis der vorkommenden Rechnungen und die Deutung der gefundenen Werte. Das Untersuchungsmaterial selbst erstreckt sich über 32 Paare verschiedenartiger bilateral-homologer Merkmale:

Die beidseitige Länge der proximalen Glieder von Zeigefinger, Mittelfinger, Ring- und Kleinfinger bei 551 Engländerinnen (nach Pearson und Whiteley). — Aus dem Tierreich: Zahl der Müllerschen Drüsen bei 2000 weibl. Schweinen (nach Davenport und Bullard). Acerina cornua L., Zahl der Brustflossenstrahlen, Länge der Kopfseiten, Länge der Mandibeläste. Zeus faber L., Zahl der Basalplatten der weichstrahligen Rücken- und Afterflossen (nach Bryne). Cottus gobio L., Zahl der Brustflossenstrahlen. Pleuronectus flesus L., (5 Merkmalpaare). Pimephales notatus Rafin., Schuppenzahl der Seitenlinien (Voris); ferner verschiedene Merkmale bei den Krebsen: Gelasimus pugilator Latr., Eriphia spimifrons Herbst und Portunus depurator L. und noch die Zahlen der Kiefernzähne des Ringelwurmes Nereïs limbata.

Wir wollen nur an dem ersten Beispiel, der Länge der entsprechenden Fingerglieder an den 4 Außenfingern der beiden Hände, zeigen, wie sich bei der Untersuchung der Asymmetrieverhältnisse überall interessante Gesetzmäßigkeiten ergeben. Die Variationsreihen der paarweise zusammengehörigen Fingergliedlängen unterscheiden sich bei allen 4 Fingern durch die Lage ihrer Hauptgipfel. Von den proximalen Gliedern der bilateral homologen Finger ist das rechte durchschnittlich um eine halbe Varianteneinheit (= $^2/_8$ mm) länger als das linke und zwar differieren die Kleinfinger am

meisten, die Mittelfinger am wenigsten. Die größte prozentuale Differenzfläche ergibt sich für die Variationspolygone der Kleinfinger, die kleinste für die Mittelfinger. Die in allen Beispielen sehr intensive Korrelation der paarweise zusammengehörigen Merkmale erreicht bei den Mittelfingern den höchsten Grad, bei den Kleinfingern ist sie ein wenig niedriger als bei den anderen. Symmetrische Individuen machen in jedem Fall nur 42,7—46,0% der Gesamtheit aus und sind bezügl. der Mittelfinger am zahlreichsten, bezügl. der Zeigefinger am wenigsten zahlreich. Die Asymmetrieindices sind ziemlich beträchtlich. Am niedrigsten ist der der Mittelfinger, ihm folgt der Ringfinger, und die höchsten, die der Klein- und Zeigefinger, sind einander fast gleich. Die rechte Hand ist die kräftigere; dies zeigt auch die Prozentzahl der asymmetr. Individuen:

Prozentsatz.	Zeigef.	Mittelf.	Ringf.	Kleinf.	
linksseitig asymmetr. Individuen	9,66	9,48	8,80	9,07	%
rechtseitig „ „	47,64	44,56	45,92	47,25	%

In einem weiteren Kapitel gibt Duncker einige Gesammtresultate und allgemeine Folgerungen; er legt die Ursache der Kollektivsymmetrie und Kollektivasymmetrie, wie die der individuellen Symmetrie und Asymmetrie dar und erörtert sodann die Beziehungen zwischen bilateral-homologen und serial-homöotischen Merkmalen.

Teils *über die bisherigen biostatistischen Methoden*, teils *über neue Beiträge zur Theorie der Variationspolygone* handeln ferner die Arbeiten von Davenport (20, 21), Engberg (31), Camerano (7—10) — meines Wissens die ersten biostatistischen Arbeiten aus Italien — und Wasteels (53).

Die Arbeit von Wasteels (Gent) handelt über die Lage der Maxima in polymorphen Variationskurven und das Vorkommen der Fibonaccizahlen. Verf. schließt sich meinem Erklärungsversuch für die Fibonaccipolygone und verwandte Variationspolygone (Zeitschr. für math. u. naturw. Unterr. XIX, p. 321—338) an und gibt noch weitere Fälle der von mir angedeuteten möglichen Reihen an, die er jedoch, ohne meine Arbeit damals gekannt zu haben, selbständig entwickelt hat. Es sind darunter auch die Reihen, die die Hauptgipfel der Voglerschen Variationspolygone, die Zahl der Blütenstände vom Cornus mas, Cardamine pratensis etc. darstellen. Wir machen besonders die Fachkollegen, welche mathematischen Unterricht an höheren Schulen erteilen, auf die interessante Arbeit aufmerksam.

Von den weiter aufgeführten Abhandlungen, welche *wichtige Ergebnisse der statistischen Methoden auf biologischem Gebiet* zu Tage gefördert haben, beziehen sich auf Anthropologie die von Bardeen (5), auf Zoologie die von Camerano (10); insbesondere auf Meerschweinchen und Kaninchen (11), auf Fische (56), auf Schmetterlinge (1) und (2), auf andere Arthropoden (51), (55), auf Conchylien (3), (23), (24), Brachiopoden (19), Quallen (4), (25), auf Pflanzen (33), (34), (36), (42), (45), (47), (52). Auf die Mendelsche Lehre von den Bastarden und verwandte Gebiete beziehen sich die Arbeiten (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (20), (26), (28), (29), (38).

Ein hochinteressantes Gebiet, dessen Bearbeitung bisher in der forstwissenschaftlichen Literatur versteckt blieb, das aber verdient zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht nach jeder Richtung hin herangezogen zu werden, ist der *Aufbau des Waldes und der Bäume nach*

mathematisch-statischen Prinzipien. Schon Schwendener hatte erkannt, daß „schön gewachsene große Fichtenstämme" völlig den Bau eines Trägers von gleichem Widerstand haben. Es ist aber das Verdienst von Metzger und nach ihm von Frank Schwarz, gezeigt zu haben, daß der Wind der maßgebende Faktor für das Wachstum der Bäume ist und daß der Aufbau des Waldes sich bis ins kleinste nach den Prinzipien der Statik verstehen und erklären läßt. Die diesbezüglichen Arbeiten sind in den Abhandlungen (37—41) und (46), (48—50), (54) niedergelegt. Ihnen schließen sich von weiteren Anwendungen physikalischer Gebiete zur Erklärung pflanzlicher und tierischer Formgestaltungen die Arbeiten von Rhumbler (43) und (44) an. Aus der letztzitierten Abhandlung dieses Verfassers sei nur als Beispiel hervorgehoben, daß der konstante Randwinkel von 125⁰ der Kammerschalen des Wurzelfüßlers *Nodosaria soluta* Reuß ein prächtiges Beispiel für das *„zweite Kapillaritätsgesetz"* darstellt, nach dem die wandbildende flüssige Sarkode von der vorausgehenden Kammerwand festgehalten wird.

Bücherschau.

G. A. Maggi, Principii di stereodinamica, corso sulla formazione, l'interpretazione e l'integrazione delle equazioni del movimento dei solidi. Milano, Ulrico Hoepli, 1903. 263 S.

Im Jahre 1896 hatte Herr G. A. Maggi eine Grundlegung der Mechanik: *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi* veröffentlicht, die sich sowohl durch die mathematische Strenge der Untersuchungen als auch durch die einheitliche Behandlung der festen, flüssigen und elastischen Körper auszeichnete. Während er sich dort auf die Darlegung der allgemeinen Theorie beschränkte, gibt er in dem vorliegenden Werke Einzelausführungen für *Systeme von starren Körpern.*

Die Verbindungen, in denen die Teile eines Systemes starrer Körper stehen, oder die *Fesselungen* des Systemes, wie der Verfasser sagt, sind entweder so beschaffen, daß zu ihrer Charakterisierung die Angabe der möglichen *Lagen* der Körper ausreicht, wie zum Beispiel bei einem festen Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, sodaß jeder seiner Punkte von dem festen Punkte konstanten Abstand hat, oder daß sie sich auf die Bewegung selbst beziehen, wie zum Beispiel bei einem festen Körper, der auf einer festen Ebene rollt, sodaß die *Geschwindigkeit* des Berührungspunktes mit der Ebene stets Null ist. Die Fesselungen können ferner von der Zeit unabhängig sein oder sich mit der Zeit ändern; zum Beispiel kann jene feste Ebene eine gegebene Bewegung besitzen. Eine Fesselung der ersten Art wird analytisch dargestellt durch eine endliche Gleichung zwischen den je 6 Lagrangeschen Positionskoordinaten jedes der Körper des Systems und der Zeit. Bestehen daher nur Fesselungen der ersten Art, so läßt sich die Lage des Systems selbst durch die Angabe der Werte gewisser Lagrangescher Positionskoordinaten bestimmen, zwischen denen keine Bedingunggleichungen bestehen und die der Verfasser *freie* Koordinaten nennt. Es ist bekannt, wie man die Differentialgleichungen, denen die freien Koordinaten genügen, sofort herstellen kann. Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn Fes-

selungen der zweiten Art bestehen, auch wenn man, wie es üblich ist und wie es Herr Maggi tut, die Einschränkung macht, daß diese Fesselungen sich durch lineare, homogene Gleichungen zwischen den Differentialen der Positionskoordinaten und den Differentialen der Zeit ausdrücken lassen sollen, denn die Differentialgleichungen, zu denen man hier gelangt, enthalten die noch unbekannten, von den Fesselungen herrührenden Drucke. In dem *ersten* Abschnitte stellt und löst Herr Maggi die Aufgabe, daß *reine* Gleichungen der Bewegung hergeleitet werden sollen, Gleichungen also, in denen jene Drucke nicht auftreten und die zur Bestimmung der sämtlichen Positionskoordinaten als Funktionen der Zeit geeignet sind. Soviel dem Referenten bekannt ist, sind diese Gleichungen zum ersten Male von Herrn Heun (*Die Bedeutung des d'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen, Archiv d. Math. und Phys.* (3), 2 (1901/02), S. 57—77, 298—327) aufgestellt worden.

In dem *zweiten* Abschnitte werden die Umformungen untersucht, die sich für die Differentialgleichungen der Bewegung aus den Prinzipien von Hamilton, Maupertuis und Gauß ergeben und die es ermöglichen, deren geometrisch-mechanische Bedeutung genauer zu erforschen. Der *dritte* Abschnitt betrifft die Integration dieser Gleichungen vermöge der Methoden von Hamilton und Jacobi. In diesen beiden Abschnitten werden die betreffenden allgemeinen Theorien in sehr geistreicher Weise von neuem entwickelt und auf eine Reihe gut gewählter Beispiele angewandt.

Alles in allem ist das Werk von Herrn Maggi eine wertvolle Bereicherung der Literatur über die Mechanik der Systeme starrer Körper, das den deutschen Mathematikern durch eine Übersetzung leichter zugänglich gemacht zu werden verdiente.

Hannover. PAUL STÄCKEL.

Schloemilchs Handbuch der Mathematik. 2. Aufl. Herausgegeben von Prof. Dr. R. Henke, Konrektor des Annen-Realgymnasiums in Dresden und Dr. R. Heger, Hon.-Professor an der K. S. Technischen Hochschule und Gymnasial-Oberlehrer in Dresden. Leipzig 1904, J. A. Barth. — Erster Band: Elementar-Mathematik. Mit 321 Figuren. XII u. 611 S. Pr. 20 M., geb. 22,50. M. — Zweiter Band: Höhere Mathematik. I. Teil. Mit 281 Figuren und 12 Tafeln. 765 S. Pr. 20 M. geb. 22,50 M.

Am 5. Febr. 1901 starb Schloemilch: es war ihm nicht mehr vergönnt, sein Handbuch der Mathematik, das als ein Teil der Encyclopädie der Naturwissenschaften in zwei Bänden 1879 bezw. 1881 erschienen war, in der veränderten Gestalt zu sehen, in der es jetzt, durch Hinzufügung neuer Abschnitte auf drei Bände erweitert, vorliegt. An Stelle des ebenfalls verstorbenen Dr. Fr. Reidt in Hamm übernahm Professor Dr. Henke in Dresden die Elementar-Mathematik, während die höhere Mathematik wie früher von Professor Dr. Heger bearbeitet wurde. Jeder der beiden Bände zerfällt in vier Bücher, und es enthält dem entsprechend der erste Band: Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie; der zweite Band: Darstellende Geometrie, Analytische Geometrie der Ebene, Analytische Geometrie des Raumes, Differential-Rechnung.

Wir müssen uns hier auf die Besprechung des Abschnittes über darstellende Geometrie beschränken. Zuerst wird in zum Teil origineller, zum Teil etwas umständlicher Weise die Darstellung der Grundgebilde, sowie ebener Figuren und des Kreises in senkrechter Projektion erledigt. Daran schließen sich die dreiseitige Ecke, die regelmäßigen Körper, Prisma, Pyramide, der Umdrehungs-Zylinder, die Kugel, der Umdrehungs-Kegel und Kugelberührungs-Aufgaben, welch letztere in eingehender und übersichtlicher Weise erörtert werden. Ein kurzer Abschnitt über Axonometrie, Perspektive, sowie über Schatten und Helligkeit bildet den Schluß des 105 Seiten füllenden Abschnittes. Die Rechnung wird ziemlich ausgiebig zur Ableitung von Resultaten herangezogen z. B. zur Konstruktion der Doppelpunkts-Tangenten, Aufg. 5, S. 58 und Aufg. 21, S. 76, wobei bemerkt sei, daß sich diese Aufgaben in einen geometrischen Zusammenhang bringen ließen. Daß ein eigener Abschnitt über die Fundamental-Aufgaben fehlt, dürfte kaum ein Vorteil sein, denn auf diese und nicht lediglich auf die Dreikants-Konstruktionen führen alle Aufgaben der Stereometrie zurück. Die Figuren sind zum Teil auf Tafeln zusammengestellt, zum Teil, etwas skizzenhaft, dem Text eingefügt. Folgende neue Bezeichnungen wendet der Verfasser an: Mittenbild = Zentralprojektion, Abbildungs-Mitte = Projektions-Zentrum, Leitbild = Parallelprojektion, Richtbild = Orthogonal-Projektion. Referent ist der Anschauung, daß die Anwendung neuer Namen für so fundamentale Begriffe nicht von einem Einzelnen ausgehen kann, sondern im Zusammenschluß mit weiteren Kreisen erfolgen mußte. Den Ausdruck isometrische Projektion auch für die Kavalierperspective zu verwenden (S. 94), ist aber jedenfalls unzweckmäßig und auch nicht gebräuchlich. Literatur-Nachweise irgend welcher Art sind in dem besprochenen Abschnitt nicht gegeben, wie überhaupt in beiden Bänden sich nur sehr wenig Angaben über wichtige Original-Arbeiten oder andere Werke finden.

München, März 1905. Karl Doehlemann.

Neue Bücher.[1]

Analysis.

1. Appell, P., Eléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et physiciens. 2e éd. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 24.
2. Krüger, L., Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. (Veröffentlichung K. preuß. geodät. Institut, neue Folge Nr. 18.) Potsdam. (Leipzig, Teubner).

Astronomie und Geodäsie.

3. Brunn, Alb. v., Die Säkularbeschleunigung des Mondes. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 3.20.
4. Jahresbericht, astronomischer. Mit Unterstüzung der astronom. Gesellschaft hrsg. v. Walt. F. Wislicenus. 6. Bd., enth. die Literatur des J. 1904. Berlin, Reimer. M. 19.
5. Pizzetti, Paolo, Trattato di geodesia teoretica. Bologna. L. 12.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

6. Poincaré, H., Leçons de Mécanique céleste professées à la Sorbonne. T. I. Théorie générale des perturbations planétaires. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.

s. auch Nr. 2.

Biologie.

7. Pearson, K., On the general theory of skew correlation and non-linear regressions. (Drapers Co. research memoirs, biometric series. Mathematical contributions to the Theory of Evolution.) London, Dulau. 5 s.

Darstellende Geometrie.

8. Moyer, I. A., Descriptive geometry for students of engineering. 2d edition, New-York, Wiley. Cloth. $ 2.

Geschichte.

9. Solmi, Edmondo, Nuovi studî sulla filosofia naturale di Leonardo da Vinci. Il metodo sperimentale. L'astronomia. La teoria della visione. Modena. L. 3.

Mechanik.

10. Alexander, T. and Thomson, A. W., Graphic Statics. A graduated series of problems and practical examples, with numerous diagrams all drawn to scale. London, Macmillan. 2 s.
11. Ascherley, L. W. and Pearson, Karl, On the Graphics of metal arches. With special reference to the relative strength of two-pivoted, three-pivoted, and built-in-metal arches. London, Dulau. 5 s.
12. Brauer, Ernst A., Festigkeitslehre. Kurz gefaßtes Lehrbuch nebst Sammlung technischer Aufgaben. Leipzig, Hirzel. M. 8; geb. M. 9.
13. Burr, W. H. and Falk, M. S., The graphic method by influence lines for bridge and roof computations. New-York, Wiley. Cloth. $ 3.
14. James, G. O., Elements of the Kinematics of a point and the rational Mechanics of a particle. New-York, Wiley & Sons. Cloth. $ 2.
15. Koenen, M., Grundzüge f. die statische Berechnung der Beton- und Eisenbetonbauten. 2. durchgesehene Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. M. 1.20.
16. Marcolongo, R., Meccanica razionale. I. Cinematica. Statica. (Manuali Hoepli.) Milano, Hoepli. L. 3.
17. — —, II. Dinamica. Principi di Idromeccanica. L. 3.
18. Müller-Breslau, Heinr., Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 1. Bd. 4., vermehrte Aufl. Stuttgart, Kröner. M. 18; geb. in Halbfr. M. 20.
19. Wilkens, Alex., Untersuchungen über Poincarésche periodische Lösungen des Problems der drei Körper. (Astronom. Abh. Nr. 8.) Hamburg, Mauke Söhne. M. 2.

s. auch Nr. 29.

Physik.

20. Aufsess, Otto Freiherr von und zu, Die physikalischen Eigenschaften der Seen. („Die Wissenschaft", Heft 4.) Braunschweig, Vieweg & Sohn.
21. Bertels, Kurt, Die Denkmittel der Physik. Eine Studie. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.60.
22. Bieven, Heinrich, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Stuttgart u. Berlin, Grub. geb. M. 2.80.
23. Börnstein, R. u. Marckwald, W., Sichtbare u. unsichtbare Strahlen, gemeinverständlich dargestellt. (Aus Natur u. Geisteswelt, Bändchen 64.) Leipzig, Teubner. M. 1; geb. in Leinw. M. 1.25.
24. Boltzmann, L., Leçons sur la théorie des gaz. Traduites par A. Gollotti et H. Bénard, avec une introduction et des notes de M. Brillouin. IIe partie. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 10.

25. Curry, Ch. E., Electro-magnetic theory of Light. part 1. London, Macmillan. 12 s.
26. Frölich, O., Die Entwicklung der elektrischen Messungen. („Die Wissenschaft“ Heft 5.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 6; geb. in Leinw. M. 6.80.
27. Gans, Richard, Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 2.80.
28. Grassi, Ugo, Notizie sulla teoria degli ioni nelle soluzioni acquose, con una prefazione di Angelo Battelli. Pisa. L. 8.
29. Grimsehl, E., Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung. I. Bd. (Sammlung Schubert Bd. 38.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 6.
30. Grünbaum, F. u. Lindt, R., Das physikalische Praktikum des Nichtphysikers. Theorie und Praxis der vorkommenden Aufgaben f. alle, denen Physik Hilfswissenschaft ist. Zum Gebrauch in den Übungen der Hochschule und in der Praxis. Leipzig, Thieme. Geb. M. 6.
31. Hertz, Heinr., Über die Beziehungen zwischen Licht u. Elektrizität. Vortrag. 12. Aufl. Stuttgart, Kröner. M. 1.
32. Jäger, Gust., Theoretische Physik. II. Licht u. Wärme. (Sammlung Göschen 77.) 3., verb. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
33. — —, Dasselbe. III. Elektrizität u. Magnetismus. (Sammlung Göschen 78.) 3., verb. Aufl. Ebenda. geb. in Leinw. M. —.80.
34. Kayser, H., Handbuch d. Spectroscopie. 3. Bd. Leipzig, Hirzel. M. 38; geb. M. 42.
35. Mahler, G., Physikalische Aufgabensammlung. Mit den Resultaten. Sammlung Göschen Nr. 243.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
36. Premoli, Palmiro, Nuovo dizionario illustrato di elettricità et magnetismo. Vol. II. Miland. L. 10.
37. Shearer, I. S., Notes and questions in Physics. London, Macmillan. 7 s 6 d.
38. Schenck, Rud., Kristallinische Flüssigkeiten und flüssige Kristalle. Leipzig, Engelmann. M. 3.60.
39. Thomson, I. I., Elettricità e materia. Traduzione con aggiunte di G. Faè. (Manuali Hoepli.) Milano, Hoepli. L. 2.
40. Walther, K. und Röttinger, M., Technische Wärmelehre (Thermodynamik). (Sammlung Göschen Nr. 242.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. —.80.
41. Warburg, Emil, Lehrbuch der Experimentalphysik f. Studierende. 8., verb. u. verm. Aufl. Tübingen, Mohr. M. 7; geb. M. 8.
42. Weinstein, B., Thermodynamik u. Kinetik der Körper. III. Bd. 1. Halbband. Die verdünnten Lösungen. Die Dissoziation. Thermodynamik der Elektrizität u. des Magnetismus (Erster Teil). Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12.
43. Wind, C. H., Electronen en materie. Rede bij de aanvaarding van het hoogleeraarsambt aan de rijksuniversiteit de Utrecht, den 20. Februari 1905 uitgesproken. Leiden, Sijthoff. F. —.50.
44. Zenneck, I., Elektromagnetische Schwingungen u. drahtlose Telegraphie. Stuttgart, Enke. M. 28; geb. in Leinw. M. 30.

Tafeln.

45. Clarke, John B., Mathematical and physical Tables. Edinburgh, Oliver & Boyd. 6 s.
46. Küster, F. W., Logarithmische Rechentafeln f. Chemiker. Im Einverständnis mit der Atomgewichtskommission der deutschen chem. Gesellsch. für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium u. in der Praxis berechnet u. mit Erläuterungen versehen. 5. Aufl. Leipzig, Veit & Co. geb. in Leinw. M. 2.

Verschiedenes.

47. Habenicht, Bodo, Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. Berlin, Salle. M. 1.60.
48. Wislicenus, F., Der Kalender. (Aus Natur u. Geisteswelt 69.) Leipzig und Berlin, Teubner. M. 1; geb. in Leinw. M. 1.25.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Aufsess, O. von, Die physikalischen Eigenschaften der Seen, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 20.

Birven, H., Mechanische Wärmetheorie, s. N. B. 22.

Boltzmann, L., Leçons sur la théorie des gaz, s. N. B. 24.

Brauer, E. A., Festigkeitslehre, s. N. B. 12.

Dedekind, Richard, Stetigkeit u. irrationale Zahlen. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn.

Frölich, O., Die Entwicklung der elektrischen Messungen, s. N. B. 26.

Grimsehl, E., Angewandte Potentialtheorie. I. s. N. B. 29.

Hudson, R. W. H. T., Kummer's Quartic surface. Cambridge, University Press. Cloth. 8 s.

James, G. O., Elements of the Kinematics of a point . . ., s. N. B. 14.

Krüger, L., Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen, s. N. B. 2.

Laguerre, Oeuvres de, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par M. M. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. T. II. Géometrie. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 22.

Mahler, G., Physikalische Aufgabensammlung, s. N. B. 35.

Marcolongo, R., Meccanica razionale, I e II, s. N. B. 16, 17.

Müller, Franz Johann, Theorie der Knickung in ihrer historischen Entwicklung. München, Druck von Carl Gerber.

Neubauten, die, der königlich sächsischen Hochschule zu Dresden. Teil A. Baubeschreibung (Auszug aus der Deutschen Bauzeitung). Teil B. Innere Einrichtung (Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure). Anhang: Versuchsanstalt in Uebigau (Zentralblatt der Bauverwaltung).

Newest, Th., Die Gravitationslehre ein Irrtum. Einige Weltprobleme. Populärwissenschaftliche Abhandlung. Wien, Konegen. M. 1.25

Poincaré, H., Leçons de Mécanique céleste, T. I, s. N. B. 6.

Thomson, I. I., Elettricità e materia, s. N. B. 39.

Vahlen, K. Th., Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.

Wagenmann, Adolf. Das System der Welt. Grundzüge einer Physik des organischen Lebens. I. Band: Der Ursprung von Energie und Materie. Cannstatt, Selbstverlag. M. 6.

Walther, K. und Röttinger, M., Technische Wärmelehre, s. N. B. 40.

Weinstein, B., Thermodynamik u. Kinetik der Körper, s. N. B. 42.

Wislicenus, F., Der Kalender, s. N. B. 48.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

52. BAND. 2. HEFT.

MIT 1 TAFEL UND 33 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 22. August 1905.

BG

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

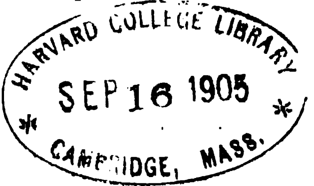
Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Biske, E. Czuber, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, A. Grünwald, W. Herglotz, G. Holtsmark, F. Ludwig, K. Mack, R. Mehmke, K. Nitz, B. J. W. Reuser, C. Runge, R. Schimmack, J. Schnöckel, B. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, E. Weinnoldt, Th. Weitbrecht, C. W. Wirtz, A. Wlassow, E. Wölffing.



Über die Zerlegung einer empirischen Funktion in Sinuswellen.

Von C. Runge in Hannover.

Ich habe früher[1]) eine Anordnung angegeben, wie man eine empirische periodische Funktion auf zweckmäßige Weise in Sinuswellen zerlegen kann. Wenn 12 gleichmäßig über die Periode verteilte Ordinaten die Funktion mit hinreichender Genauigkeit wiedergeben, so gestaltet sich die Rechnung besonders einfach. Es kommt aber nicht selten der Fall vor, daß 12 Ordinaten nicht ausreichen. Dann wird die Rechnung entsprechend verwickelter. Ich habe nun gefunden, daß sich die Rechnung mit 24 Ordinaten auf eine wiederholte Anwendung der Rechnung mit 12 Ordinaten zurückführen läßt. Es wird damit eine nicht unerhebliche Vereinfachung erzielt.

Es sei

$$y = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_{11} \cos 11\varphi + a_{12} \cos 12\varphi$$
$$+ b_1 \sin\varphi + b_2 \sin 2\varphi + \cdots + b_{11} \sin 11\varphi$$

die gesuchte Zerlegung, wo die 24 Konstanten $a_0 a_1 \cdots a_{12};\ b_1 b_2 \cdots b_{11}$ so bestimmt werden sollen, daß an den 24 Stellen der Periode $\varphi = 0^0$, 15^0, 30^0, 45^0, $\cdots$ 345^0 die verschiedenen Werte $y_0 y_1 y_2 \cdots y_{23}$ angenommen werden.

Wie früher gezeigt, hat man dann die Summen zu berechnen

$$y_0 + y_1 \cos(\alpha 15)^0 + y_2 \cos(2\alpha 15)^0 + \cdots + y_{23} \cos(23\alpha 15)^0,$$

und

$$y_1 \sin(\alpha 15)^0 + y_2 \sin(2\alpha 15)^0 + \cdots + y_{23} \sin(23\alpha 15)^0,$$

oder wie wir kurz schreiben wollen

$$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] \text{ und } [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] \quad \lambda = 0, 1, 2 \cdots 23.$$

Die erste Summe liefert für $\alpha = 0$ und $\alpha = 12$ die Werte $24 a_0$ und $24 a_{12}$ und für $\alpha = 1, 2, \cdots 11$ die Werte von $12 a_\alpha$, die zweite Summe die Werte von $12 b_\alpha$. Um die Summen zweckmäßig zu berechnen, wird die Reihe der y, wie früher gezeigt, zusammengefaltet,

1) Diese Zeitschrift Bd. 48 S. 443, vgl. auch Runge, Theorie und Praxis der Reihen S. 147 u. f.

und es werden die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Ordinaten gebildet:

$$\begin{array}{ll}
 & y_0 y_1\ y_2\ y_3\ \cdots\cdots y_{10} y_{11} y_{12} \\
 & \quad y_{23} y_{22} y_{21}\ \cdots\cdots y_{14} y_{13} \\
\hline
\text{Summen:} & u_0 u_1\ u_2\ u_3\ \cdots\cdots u_{10} u_{11} u_{12} \qquad (u_0 = y_0,\ u_{12} = y_{12}) \\
\text{Differenzen:} & \quad v_1\ v_2\ v_3\ \cdots\cdots v_{10} v_{11}
\end{array}$$

Diese beiden Reihen werden jede wieder zusammengefaltet, und wieder werden die Summen und Differenzen gebildet:

$$\begin{array}{ll}
 & u_0\ u_1\ u_2\ u_3 u_4 u_5 u_6 \\
 & u_{12} u_{11} u_{10} u_9 u_8 u_7 \\
\hline
\text{Summen:} & \mathfrak{u}_0\ \mathfrak{u}_1\ \mathfrak{u}_2\ \mathfrak{u}_3 \mathfrak{u}_4 \mathfrak{u}_5 \mathfrak{u}_6 \\
\text{Differenzen:} & \mathfrak{u}_0'\ \mathfrak{u}_1'\ \mathfrak{u}_2'\ \mathfrak{u}_3' \mathfrak{u}_4' \mathfrak{u}_5'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & v_1\ v_2\ v_3 v_4 v_5 v_6 \\
 & v_{11} v_{10} v_9 v_8 v_7 \\
\hline
\text{Summen:} & \mathfrak{v}_1\ \mathfrak{v}_2\ \mathfrak{v}_3 \mathfrak{v}_4 \mathfrak{v}_5 \\
\text{Differenzen:} & \mathfrak{v}_1'\ \mathfrak{v}_2'\ \mathfrak{v}_3' \mathfrak{v}_4' \mathfrak{v}_5'
\end{array}$$

Dann ist für grade Werte von α

$$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{u}_\mu \cos(\mu\alpha 15)^0],\quad [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{v}_\mu \sin(\mu\alpha 15)^0]$$

für ungrade Werte von α

$$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{u}_\mu' \cos(\mu\alpha 15)^0],\quad [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{v}_\mu' \sin(\mu\alpha 15)^0].$$

Der Vorteil dieser Zusammenlegung liegt darin, daß die Zahl der Glieder vermindert ist. Der Index μ durchläuft nur die Werte $0, 1, 2, \cdots 6$.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen. Was zunächst die graden Werte von α betrifft, so werde $\alpha = 2\beta$ gesetzt. Dann wird

$$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{u}_\mu \cos(\mu\beta 30)^0] \text{ und } [y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{v}_\mu' \sin(\mu\beta 30)^0].$$

Man hat es also nicht mehr mit Vielfachen des Winkels von 15^0 sondern mit Vielfachen des Winkels von 30^0 zu tun, oder mit andern Worten, man hat es zu tun mit Summen derselben Form, wie sie bei der Einteilung der Periode in 12 Teile vorkommen. Man kann daher das Schema anwenden, das ich für die Rechnung mit 12 Ordinaten angegeben habe.

Zu dem Ende werden die Reihen der Größen $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_6$ und $\mathfrak{v}_1', \mathfrak{v}_2' \cdots \mathfrak{v}_5'$ noch einmal zusammengefaltet:

$$\begin{array}{ll}
 & \mathfrak{u}_0 \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 \\
 & \mathfrak{u}_6 \mathfrak{u}_5 \mathfrak{u}_4 \\
\hline
\text{Summen:} & \mathfrak{U}_0 \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3 \\
\text{Differenzen:} & \mathfrak{U}_0' \mathfrak{U}_1' \mathfrak{U}_2'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \mathfrak{v}_1'\ \mathfrak{v}_2'\ \mathfrak{v}_3' \\
 & \mathfrak{v}_5'\ \mathfrak{v}_4' \\
\hline
\text{Summen:} & \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_3 \\
\text{Differenzen:} & \mathfrak{V}_1' \mathfrak{V}_2'
\end{array}$$

und mit den so gewonnenen Zahlen geht man in das von mir aufgestellte Schema ein:

	$\mathfrak{U}_2'/2$	$-\mathfrak{U}_2/2$ $\mathfrak{U}_1/2$		$\mathfrak{B}_1/2$		
	$m\mathfrak{U}_1'$			$m\mathfrak{B}_2$	$m\mathfrak{B}_1'$ $m\mathfrak{B}_2'$	
$\mathfrak{U}_0\,\mathfrak{U}_1$ $\mathfrak{U}_2\,\mathfrak{U}_3$	$\mathfrak{U}_0'$	$\mathfrak{U}_0\ -\mathfrak{U}_3$	$\mathfrak{U}_0'$ $-\mathfrak{U}_2'$	$\mathfrak{B}_3$		$\mathfrak{B}_1$ $-\mathfrak{B}_3$
Summen: $P_0\,P_6$	P_1 P_5	P_1 P_4	P_3	Q_1 Q_5	Q_2 Q_4	Q_3

(m bedeutet sin 60^0)

	P_0	P_1	P_2	P_3		Q_1	Q_2	Q_3
	P_6	P_5	P_4			Q_5	Q_4	
Summen:	$24a_0$	$12a_2$	$12a_4$	$12a_6$	Summen:	$12b_2$	$12b_4$	$12b_6$
Differenzen:	$24a_{12}$	$12a_{10}$	$12a_8$		Differenzen:	$12b_{10}$	$12b_8$	

Für die ungraden Werte von α setze ich $\alpha = 2\beta + 3$, dann ist:

I $$[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{u}_\mu' \cos((2\beta+3)\mu 15)^0]$$
$$= [\mathfrak{u}_\mu' \cos(\mu 45)^0 \cos(\beta\mu 30)^0] - [\mathfrak{u}_\mu' \sin(\mu 45)^0 \sin(\beta\mu 30)^0]$$

II $$[y_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{v}_\mu \sin((2\beta+3)\mu 15)^0]$$
$$= [\mathfrak{v}_\mu \sin(\mu 45)^0 \cos(\beta\mu 30)^0] + [\mathfrak{v}_\mu \cos(\mu 45)^0 \sin(\beta\mu 30)^0].$$

Auf der rechten Seite haben wir nun wieder Summen von derselben Form, wie sie bei der Einteilung der Periode in 12 Teile vorkommen. Um sie auszurechnen, sind zunächst die Multiplikationen mit $\cos(\mu 45)^0$ und $\sin(\mu 45)^0$ auszuführen:

I	$\mathfrak{u}_\mu' \cos(\mu 45)^0$:	$\mathfrak{u}_0'$	$\mathfrak{u}_1'/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{u}_3'/\sqrt{2}$	$-\mathfrak{u}_4'$	$-\mathfrak{u}_5'/\sqrt{2}$	0
	$\mathfrak{u}_\mu' \sin(\mu 45)^0$:		$\mathfrak{u}_1'/\sqrt{2}$	$\mathfrak{u}_2'$	$\mathfrak{u}_3'/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{u}_5'/\sqrt{2}$	
II	$\mathfrak{v}_\mu \sin(\mu 45)^0$:	0	$\mathfrak{v}_1/\sqrt{2}$	$\mathfrak{v}_2$	$\mathfrak{v}_3/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{v}_5/\sqrt{2}$	$-\mathfrak{v}_6$
	$\mathfrak{v}_\mu \cos(\mu 45)^0$:		$\mathfrak{v}_1/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{v}_3/\sqrt{2}$	$-\mathfrak{v}_4$	$-\mathfrak{v}_5\ \sqrt{2}$	

Auf jeden dieser beiden Sätze I und II wird jetzt das Schema für 12 Ordinaten angewendet, z. B. auf I

	$\mathfrak{u}_0'$	$\mathfrak{u}_1'/\sqrt{2}$	0	$-\mathfrak{u}_3'/\sqrt{2}$		$\mathfrak{u}_1'/\sqrt{2}$	$\mathfrak{u}_2'$	$\mathfrak{u}_3'/\sqrt{2}$
	0	$-\mathfrak{u}_5'/\sqrt{2}$	$-\mathfrak{u}_4'$			$-\mathfrak{u}_5'/\sqrt{2}$	0	
Summen:	$\mathfrak{U}_0$	$\mathfrak{U}_1$	$\mathfrak{U}_2$	$\mathfrak{U}_3$	Summen:	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{B}_3$
Differenzen:	$\mathfrak{U}_0'$	$\mathfrak{U}_1'$	$\mathfrak{U}_2'$		Differenzen:	$\mathfrak{B}_1'$	$\mathfrak{B}_2'$	

und mit den Zahlen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ wird grade so gerechnet, wie mit den ebenso bezeichneten Größen bei den graden Werten von α. Aus den Größen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ erhalten wir wie oben die Größen $P_0 P_1 \cdot\cdot P_6$ und $Q_1 Q_2 \cdot\cdot Q_5$. Diese werden wie oben zusammen gelegt und liefern durch ihre Summen und Differenzen:

	$P_0 P_1 P_2 P_3$		$Q_1 Q_2 Q_3$
	$P_6 P_5 P_4$		$Q_5 Q_4$
Summen:	$p_0\, p_1\, p_2\, p_3$	Summen:	$q_1\, q_2\, q_3$
Differenzen:	$p_6\, p_5\, p_4$	Differenzen:	$q_5\, q_4$

Dann ist im Falle I:

$$[u'_\mu \cos(\mu 45)^0 \cos(\mu\beta 30)^0] = p_\beta$$
$$[u'_\mu \sin(\mu 45)^0 \sin(\mu\beta 30)^0] = q_\beta.$$

Setzt man statt β die Ergänzung $12 - \beta$ ein, so bleibt $\cos(\mu\beta 30)^0$ ungeändert, während $\sin(\mu\beta 30)^0$ ins Entgegengesetzte übergeht. Daher hat man $p_{12-\beta} = p_\beta$ und $q_{12-\beta} = -q_\beta$. Statt $p_1 + q_1$ kann man also auch $p_{11} - q_{11}$ schreiben, statt $p_2 + q_2$ auch $p_{10} - q_{10}$ usw.

Wir schreiben nun die Größen p und die Größen q je in eine Reihe untereinander und bilden die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Größen. Damit erhalten wir:

I	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
Summen:	$12a_3$	$12a_1$	$12a_1$	$12a_3$	$12a_5$	$12a_7$	$12a_9$
Differenzen:		$12a_5$	$12a_7$	$12a_9$	$12a_{11}$	$12a_{11}$	

Denn es ist $p_\beta - q_\beta = [y_\lambda \cos(\lambda(2\beta+3)15)^0] = 12a_{2\beta+3}$; statt $2\beta + 3$ kann man aber auch $24 - (2\beta + 3)$ oder $2\beta + 3 - 24$ setzen, da $\cos(\lambda(2\beta + 3)15)^0$ dabei ungeändert bleibt.

Für den Satz II verfährt man analog mit dem einzigen Unterschiede, daß dann $p_\beta + q_\beta = [y_\lambda \sin(\lambda(2\beta + 3)15)^0] = 12b_{2\beta+3}$ ist und daß $b_{2\beta+3} = b_{2\beta+3-24} = -b_{24-2\beta-3}$ ist.

Wir erhalten somit für den Satz II:

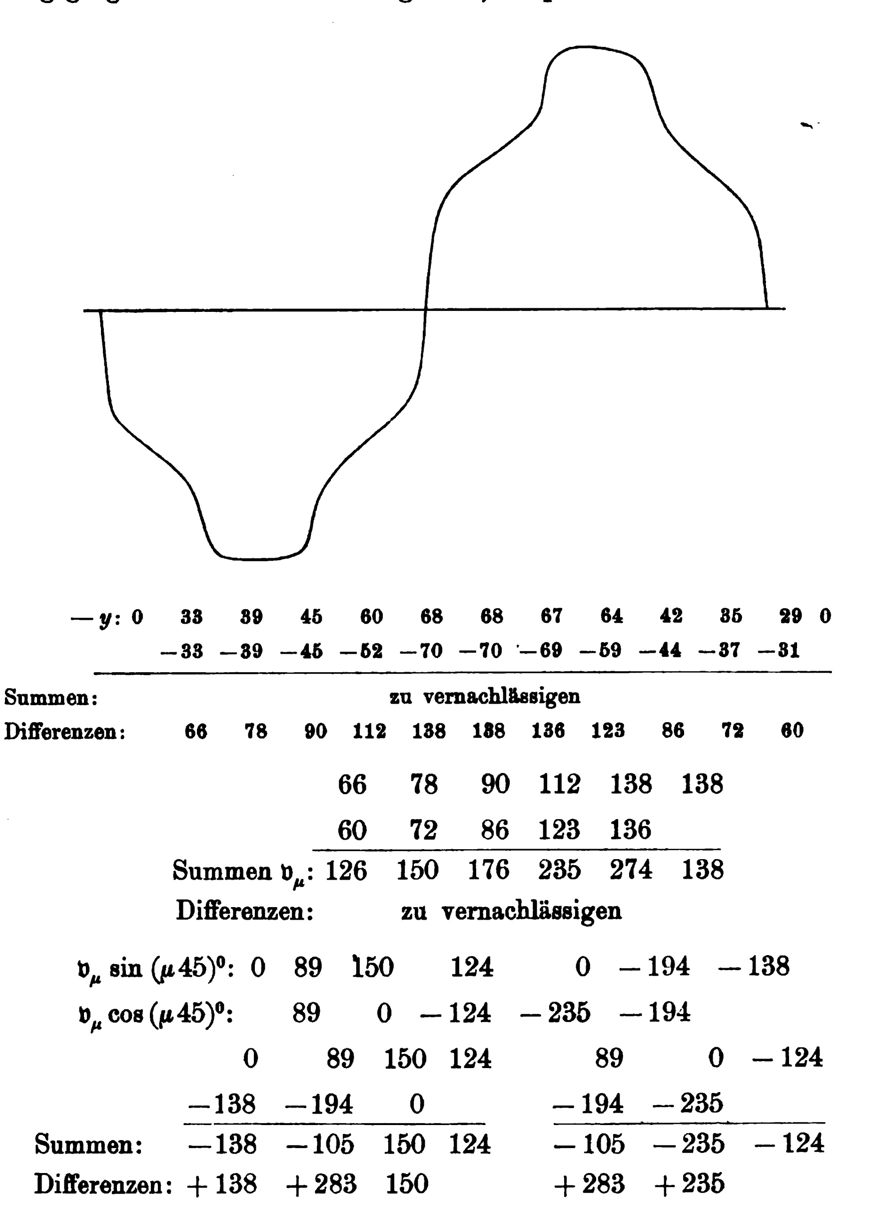
II	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
Summen:	$12b_3$	$12b_5$	$12b_7$.	$12b_9$	$12b_{11}$	$-12b_{11}$	$-12b_9$
Differenzen:		$12b_1$	$-12b_1$	$-12b_3$	$-12b_5$	$-12b_7$	

Die Größen a, b ergeben sich demnach für ungrade Werte von α jede auf doppelte Weise. Man kann sich natürlich darauf beschränken, jede nur einmal auszurechnen; aber es wird so wenig Mühe damit gespart, daß man es vorziehen wird, sie doppelt zu berechnen und damit eine Kontrolle auszuüben.

Bei den Zerlegungen, mit denen wir es bei elektrotechnischen Untersuchungen zu tun haben, fallen die Glieder grader Ordnung in

der Regel fort. Auch können unter Umständen alle Kosinusglieder wegfallen. Dann reduziert sich die Rechnung auf die nicht verschwindenden Glieder.

Das folgende Beispiel gibt die Zerlegung der Spannungskurve eines Generators bei Leerlauf. Die Ordinaten habe ich in der Rechnung mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt, um positive Zahlen zu erhalten.



$-y$:	0	33	39	45	60	68	68	67	64	42	35	29	0
		−33	−39	−45	−52	−70	−70	−69	−59	−44	−37	−31	
Summen:	zu vernachlässigen												
Differenzen:		66	78	90	112	138	138	136	123	86	72	60	

	66	78	90	112	138	138
	60	72	86	123	136	
Summen $\mathfrak{v}_\mu$:	126	150	176	235	274	138
Differenzen:	zu vernachlässigen					

$\mathfrak{v}_\mu \sin(\mu 45)^0$:	0	89	150	124	0	−194	−138
$\mathfrak{v}_\mu \cos(\mu 45)^0$:		89	0	−124	−235	−194	

	0	89	150	124	89	0	−124
	−138	−194	0		−194	−235	
Summen:	−138	−105	150	124	−105	−235	−124
Differenzen:	+138	+283	150		+283	+235	

	75	−75 −52.5		−52.5		
	245			−204	245 204	
−138 −105 +150 +124	138	−138 −124	138 −150	−124		−105 +124
12 19	213 245	−213 −176.5	− 12	−176.5 −204	245 204	+ 19

	12	213	−213	−12		−176.5	245	19
	19	245	−176.5			−204	204	
p:	31	458	−389.5	−12	q:	−380.5	449	19
	− 7	− 32	− 36.5			27.5	41	

p:	31	458	−389.5	−12	−36.5	−32	−7
q:		−380.5	449	19	41	27.5	
	31	77.5	59.5	7	+ 4.5	− 4.5	−7
		+838.5	−838.5	−31	−77.5	−59.5	

$$\text{Resultat:}\ -y = \frac{838.5}{12}\sin\varphi + \frac{31}{12}\sin 3\varphi + \frac{77.5}{12}\sin 5\varphi + \frac{59.5}{12}\sin 7\varphi + \frac{7}{12}\sin 9\varphi + \frac{4.5}{12}\sin 11\varphi.$$

Auch die umgekehrte Rechnung kann man in analoger Weise auf das Schema mit 12 Ordinaten zurückführen.

Es seien $a_0 a_1 a_2 \cdots a_{12}$, $b_1 b_2 b_3 \cdots b_{11}$ gegeben. Dann sind die Summen:

$$[a_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] \text{ und } [b_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] \qquad \lambda = 0, 1, 2 \cdots 12$$

zu berechnen, wobei α je einen der Werte von 0, 1, $\cdots$ 23 hat. Setzt man $24 - \alpha$ an Stelle von α ein, so bleibt $\cos(\lambda\alpha 15)^0$ ungeändert, während $\sin(\lambda\alpha 15)^0$ ins Entgegengesetzte übergeht. Man hat also nur nötig die beiden Ausdrücke für $\alpha = 0, 1, 2 \cdots 12$ zu berechnen. Ihre Summe gibt dann y_α, ihre Differenz $y_{24-\alpha}$. Man faltet zu dem Ende wieder die Reihen der Größen a und b zusammen und bildet die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Größen:

	$a_0\ a_1\ a_2\ a_3 a_4 a_5 a_6$	$b_1\ b_2\ b_3 b_4 b_5 b_6$
	$a_{12} a_{11} a_{10} a_9\, a_8\, a_7$	$b_{11} b_{10} b_9\, b_8\, b_7$
Summen:	$\mathfrak{a}_0\ \mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}_4 \mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}_6$	$\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2\ \mathfrak{b}_3 \mathfrak{b}_4 \mathfrak{b}_5 \mathfrak{b}_6$
Differenzen:	$\mathfrak{a}_0'\ \mathfrak{a}_1'\ \mathfrak{a}_2'\ \mathfrak{a}_3' \mathfrak{a}_4' \mathfrak{a}_5'$	$\mathfrak{b}_1'\ \mathfrak{b}_2'\ \mathfrak{b}_3' \mathfrak{b}_4' \mathfrak{b}_5'$

Für grade Werte von α hat man dann $(\alpha = 2\beta)$

$$[a_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{a}_\mu \cos(\mu\beta 30)^0] \text{ und } [b_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{b}_\mu' \sin(\mu\beta 30)^0]$$

für ungrade Werte ($\alpha = 2\beta + 3$)

$$[a_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{a}'_\mu \cos(\mu(2\beta+3)15)^0] = [\mathfrak{a}'_\mu \cos(\mu 45)^0 \cos(\mu\beta 30)^0] - [\mathfrak{a}'_\mu \sin(\mu 45)^0 \sin(\mu\beta 30)^0]$$

$$[b_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0] = [\mathfrak{b}_\mu \sin(\mu(2\beta+3)15)^0] = [\mathfrak{b}_\mu \sin(\mu 45)^0 \cos(\mu\beta 30)^0] + [\mathfrak{b}_\mu \cos(\mu 45)^0 \sin(\mu\beta 30)^0],$$

und nun ist die Rechnung dieselbe wie oben. Man findet die Werte $A_\alpha = [a_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0]$, $B_\alpha = [b_\lambda \sin(\lambda\alpha 15)^0]$ genau so, wie oben die Werte von $[y_\lambda \cos(\lambda\alpha 15)^0]$ und $[y_\lambda \sin(\alpha\lambda 15)^0]$ gefunden wurden. Man schreibt diese Größen wieder in zwei Reihen untereinander. Die Summen und Differenzen der untereinander stehenden Größen liefern dann die zusammengefaltete Reihe der y:

$$\begin{array}{lccccc} & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{11}\, A_{12} \\ & & B_1 & B_2 & \cdots & B_{11} \\ \hline \text{Summen:} & y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{11}\, y_{12} \\ \text{Differenzen:} & & y_{23} & y_{22} & & y_{13}. \end{array}$$

The Lubrication of Plane Surfaces.

By A. G. M. MICHELL, Melbourne.

The improvements made by Sommerfeld[1]) in the mathematical treatment of Reynolds' Hydrodynamical Theory of Lubrication have laid open the path to its practical application.

In the case of cylindrical bearings, however, certain corrections and approximations still require to be investigated, before a quite satisfactory camparison with experiment can be made. The most important of these is perhaps that which arises from the fact that actual bearings are necessarily of limited length, whereas in the mathematical theory of Reynolds and Sommerfeld the length is supposed to be so great that the motion can be treated as two-dimensional.

A further obstacle which presents itself to the experimental verification of the theory of the cylindrical bearing is the difficulty of determining, even approximately, the very small difference between the radii of the journal and the bearing.

The present Paper discusses an application of the theory to a case for which the complete solution in three dimensions can be obtained.

This is the case of a plane slide-block of finite length and width,

1) Zeitschrift für Mathematik u. Physik. Band 50, pp. 97—155.

such as the crosshead slide-blocks of steam-engines. It will appear that when such a plane plate, of finite dimensions, slides over a fixed plane surface freely supplied with oil, a pressure may be developed in the oil tending to keep the planes apart. The general features of the case are the same as in the two-dimensional problem already treated by Reynolds.[1]) It is a necessary condition of the action that the external load applied to the moving plate shall act at a point behind its centre of figure. The plate will then set itself so that the oil-film is thicker on its leading than on its rearward edge.

Under the influence of the fluid pressure, the oil will flow out of the interspace between the planes partly at the rear and partly at the sides. Unless the finite plate is of great width, the amount which flows out of the sides will be very considerable, and the pressure which is developed in the oil, will, other things being equal, be notably less than in the case of the plate of infinite width.

Not only is the case of the rectangular plane slide-block of much practical importance, but the possibility of forming accurate plane surfaces greatly facilitates the experimental verification of the theory of this case.

At the end of the paper a short account is given of a preliminary experimental verification, not made however directly, with fluid lubricants, but by the help of a physical analogy hereafter explained. This experimental method is of general applicability, and in the absence of a mathematical theory of cylindrical bearings of finite length, may be worthy of systematic use for the investigation of that (practically the most important) case.

Slide-Block of Finite Width.

Let the plane rectangle $ABCD$ (Fig. 1) represent the lower surface of a rectangular slide-block moving with velocity U over the plane xOz, the space between the planes being filled with a liquid of viscosity λ.

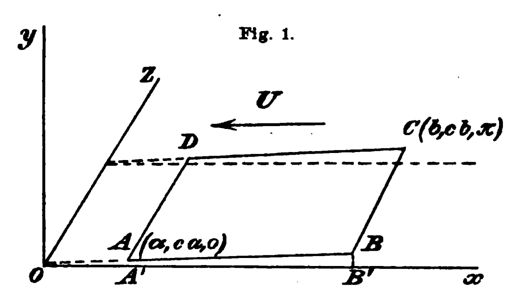


Fig. 1.

To preserve Sommerfeld's notation U is taken as positive in the direction xO, and to simplify the expressions the planes AC, xOz are assumed to intersect in the line Oz, and the planes AC, xOy in the line AB. The width, $AD = BC$, of the block is taken as π.

1) Osborne Reynolds. Scientific Papers, Vol. II, p. 245.

Let h be the distance between the planes at the point xy; $\theta = xOB$ the angle between the planes, and put

$$c = \sin\theta, \qquad OA = a, \qquad OB = b.$$

Then, h being assumed small compared to OA,

$$h = x\sin\theta = cx.$$

$$OA' = OA = a, \quad \text{and} \quad OB' = OB = b.$$

Now, if p be the pressure of the liquid at the point xy, the boundary conditions will be

$$p = 0, \text{ when } x = a, \text{ or } x = b, \text{ for all values of } z,$$
$$\text{and } p = 0, \text{ when } z = 0, \text{ or } z = \pi, \text{ for all values of } x.$$

Between the two planes, AC and xOz, p, given as a function of x and z, must satisfy the differential equation[1])

$$U\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{6\lambda}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{6\lambda}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

or since $h = cx$

(1) $$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{3}{x}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{6\lambda U}{c^2 x^3} = 0.$$

It is assumed that there is a solution of this equation of the form

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_m + \cdots$$

where

$$p_m = \frac{w_m \sin mz}{mx},$$

and w_m is a function of x only.

The integer m can have odd values only, since the value of p is symmetrical about $z = \pi/2$.

Thus

(2) $$p = \sum \cdot \frac{w_m \sin mz}{mx}$$

where m is any odd integer.

It is convenient to write equation (1) as

(3) $$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x} + \frac{3}{x}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{6\lambda U}{c^2 x^3}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\sin z + \frac{\sin 3z}{3} + \cdots + \frac{\sin mz}{m} + \cdots\right) = 0,$$

the sum of the series of sines being $\frac{\pi}{4}$ for all values of z between 0 and π.

1) Osborne Reynolds. loc. cit. p. 261.

Writing also $mx = \xi$, and $\frac{24\lambda U}{\pi c^2} = k$,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = m\frac{\partial p}{\partial \xi} = m\Sigma \cdot \left\{\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial \xi} - \frac{w_m}{\xi^2}\right\} \sin mz,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = m^2\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = m^2\Sigma \cdot \left\{\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^2} - \frac{2}{\xi^2} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial \xi} + \frac{2 w_m}{\xi^3}\right\} \sin mz,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\Sigma \cdot \frac{m^2 w_m}{\xi} \cdot \sin mz,$$

the differentiation of the series term by term with respect to z being permissible because $p = 0$, when $z = 0$, and $z = \pi$.

The coefficient of sin mz in equation (3) now becomes

$$\frac{m^2}{\xi}\left\{\frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial \xi} - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) w_m - \frac{k}{\xi^2}\right\}$$

but every such coefficient must vanish, therefore

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial \xi} - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) w_m - \frac{k}{\xi^2} = 0.$$

The particular integrals of

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial w_m}{\partial \xi} - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) w_m = 0$$

are the Bessel's Functions $I_1(\xi)$ and $K_1(\xi)$. The complete solution of the equation (4) may therefore be sought in the forms

$$\text{(5a)} \qquad w_m = A_m I_1(\xi) + B_m K_1(\xi) + (C + D\xi + E\xi^2 + \cdots)$$

and

$$\text{(5b)} \qquad w_m = A'_m I_1(\xi) + B'_m K_1(\xi) + (C' + D'\xi^{-1} + E'\xi^{-2} + \cdots).$$

Determining the coefficients C, D, E etc. in the usual way, equations (5a) and (5b) become

$$w_m = A_m I_1(\xi) + B_m K_1(\xi) - k\left(1 + \frac{\xi^2}{3} + \frac{\xi^4}{5 \cdot 3^2} + \frac{\xi^6}{7 \cdot 5^2 \cdot 3^2} + \cdots\right)$$

and

$$w_m = A'_m I_1(\xi) + B'_m K_1(\xi) - k(\xi^{-2} + 3 \cdot \xi^{-4} + 5 \cdot 3^2 \cdot \xi^{-6} + 7 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot \xi^{-8} + \cdots),$$

the last series being semiconvergent for large values of ξ.

Hence, finally, restoring the values of ξ and k,

$$\text{(6)} \qquad p = p_1 + p_3 + \cdots + p_m + \cdots$$

where

$$\text{(6a)} \quad p_m = \frac{\sin mz}{mx}\left\{A_m I_1(mx) + B_m K_1(mx) - \frac{24\lambda U}{\pi c^2}\left(1 + \frac{\overline{mx}^2}{3} + \frac{\overline{mx}^4}{5 \cdot 3^2} + \cdots\right)\right\}$$

or

(6b) $$p_m = \frac{\sin mz}{mx}\left\{A'_m I_1(mx) + B'_m K_1(mx) - \frac{24\lambda U}{\pi c^2 (mx)^2}(1 + 3\,\overline{mx}^{-2} + 5\cdot 3^2\,\overline{mx}^{-4} + \cdots)\right\}$$

or, writing for convenience

$$L_1(mx) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{mx}\left(1 + \frac{\overline{mx}^2}{3} + \frac{\overline{mx}^4}{5\cdot 3^2} + \cdots\right)$$

$$L_2(mx) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(mx)^3}(1 + 3\,\overline{mx}^{-2} + 5\cdot 3^2\,\overline{mx}^{-4} + \cdots)$$

$$C = \frac{6\lambda U}{c^2}$$

(7a) $$p_m = \sin mz\left\{A_m\frac{I_1(mx)}{mx} + B_m\frac{K_1(mx)}{mx} - C\cdot L_1(mx)\right\}$$

or

(7b) $$= \sin mz\left\{A'_m\frac{I_1(mx)}{mx} + B'_m\frac{K_1(mx)}{mx} - C\cdot L_2(mx)\right\},$$

the first form being suited for calculation when mx is small, the second when mx is large. The coefficients

$$\begin{array}{llll} A_1, & A_3, & \dots A_m, & \dots \\ B_1, & B_3, & \dots B_m, & \dots \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

in these equations must be assigned so as to make p_m vanish when $x = a$, or $x = b$ for all values of z. They will, of course, like C, be multiples of $\frac{\lambda U}{c^2}$, which will therefore be a factor in the final expression for p. The numerical calculations will show that the sign of p is opposite to that of U, so that, to obtain a positive pressure in the oil, the slide-block must move in the opposite direction to that shown in Fig. 1.

The intensity, p, of the pressure at xy having been determined, the total pressure

$$P = \int_0^\pi\int_a^b p\,dx\,dz$$

may be found by arithmetical or graphical summation.

The viscous resistance, or friction, on unit area at the point x, o, z is given by

(8) $$q = -\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \lambda\frac{U}{h} - \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{h}{2}$$

where u is the velocity of the fluid in the direction of x at the point x, y, z.

The total resistance for the whole block is therefore

$$(9)\qquad F=\int_0^\pi\int_a^b\left(\lambda\frac{U}{h}-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{h}{2}\right)dx\,dz$$

$$=\pi\int_a^b\lambda\frac{U}{cx}dx-\int_0^\pi\int_a^b\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{cx}{2}dx\,dz$$

$$=\pi\int_a^b\frac{\lambda U}{cx}dx-\frac{c}{2}\int_0^\pi\left\{[p]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b p\,dx\right\}dz^{1)}$$

$$=\pi\int_a^b\frac{\lambda U}{cx}dx+\frac{c}{2}\int_0^\pi\int_a^b p\,dx\,dz$$

$$(10)\qquad =\frac{\pi\lambda U}{c}\log\frac{b}{a}+\frac{cP}{2}.$$

Special Cases.

The width of the slide-block having been taken as π, its form and position will be completely defined when, in addition, the three constants a, b, c are given.

Since, however, c appears as a factor throughout the expression for p, the peculiarities of any special case depend upon the values of the two parameters a and b only.

The arithmetical work is simplified by taking a and b simple multiples or submultiples of π.

The principal numerical results will be given for four cases, viz:

I. Square block, $a=\pi$, $b=2\pi$.

II. Block of length three times its width, $a=3\pi$, $b=6\pi$.

III. The limiting case in which the length of the block is infinite compared to its width.

IV. The other extreme case in which the width is infinite. The general theory of this case has been given by Reynolds.

In all these cases, except (III), the ratio $\frac{b}{a}$ is taken as 2, as the nearest whole number to the ratio $2\cdot 2\cdots$, which Reynolds has shown to give the greatest mean pressure for a given mutual inclination, c, of the surfaces, in case IV.

Case I. Square Block.

If $a=\frac{b}{2}=\pi$, mx in equations (7a) and (7b) will take for the two ends of the block the series of values

$$\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ \ldots \quad \text{at the rear end,}$$

$$\text{and}\quad 2\pi,\ 6\pi,\ 10\pi,\ \ldots \quad \text{at the front end.}$$

1) The last term is omitted by Reynolds. loc. cit. p. 265.

Since p_m must vanish at the ends, the constants A_m, B_m, etc. are determined when the values of the functions I, K and L are known for these series of values.

The function L_1 will be used when $mx <$ or $= 2\pi$, L_2 when $mx > 2\pi$.

The values of the ratios $\frac{A_m}{C}$, $\frac{B_m}{C}$, $\frac{A'_m}{C}$ and $\frac{B'_m}{C}$, thus found, are given in the following table.

Table I.

	A_m/C	B_m/C
$m = 1$	2.0004	-4.2883
	A'_m/C	B'_m/C
$m = 3$	2.6157×10^{-10}	-4.3687×10^{2}
5	4.1788×10^{-16}	-1.0718×10^{5}
7	8.7540×10^{-22}	-3.4647×10^{7}
9	2.0885×10^{-27}	-1.2742×10^{10}
11	5.3817×10^{-33}	-5.0543×10^{12}

The constants A, B, etc. having been determined, the pressure at any point, xz, is obtained from equations (6) and (7) by inserting in them the values of $I_1(mx)$, $K_1(mx)$, and $L_1(mx)$ or $L_2(mx)$ for the given value of x, and the values of $\sin mz$ for the given value of z.

In this way the pressure has been calculated for all points of intersection of the lines

$$x = \pi \times 1.1, \quad x = \pi \times 1.2, \quad \ldots, \quad x = \pi \times 1.9,$$

with the lines

$$z = \pi \times 0.1, \quad z = \pi \times 0.2, \quad \ldots, \quad z = \pi \times 0.9.$$

As the first step in this calculation the values of the functions I, K and L, are required for odd multiples of $\pi \times 1.1$, $\pi \times 1.2, \ldots,$ $\pi \times 1.9$. The following Table II gives the Briggian logarithms of these functions for such multiples up to the eleventh.

The values of the Bessel's Functions in this Table have been calculated partly by interpolation in existing Tables[1]), but chiefly from the semiconvergent series.

$$I_1(\xi) = \frac{e^{\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{1 - \frac{3}{8\xi} - \frac{3 \cdot 5}{\underline{|2}\,(8\xi)^2} - \cdots - \frac{3 \cdot 5 \cdot 21 \cdots \{(2n-1)^2 - 4\}}{\underline{|n}\,(8\xi)^n} - \cdots\right\},$$

$$K_1(\xi) = \frac{-\sqrt{\pi}e^{-\xi}}{\sqrt{2\xi}} \left\{1 + \frac{3}{8\xi} - \frac{3 \cdot 5}{\underline{|2}\,(8\xi)^2} + \cdots \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 21 \cdots \{(2n-1)^2 - 4\}}{\underline{|n}\,(8\xi)^n} \mp \cdots\right\}.$$

1) Report of British Association, 1893. — Aldis. Proceedings Royal Society, 1898.

Table II.

x/π	$\log_{10} I_1(mx)$					
	$m = 1$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
1.0	.65239	3.18862	5.81404	8.47287	11.14877	13.83502
1.1	.77545	3.5790	6.4764	9.407	12.357	15.316
1.2	.89850	3.9708	7.1406	10.345	13.566	16.797
1.3	1.02260	4.3639	7.8060	11.283	14.776	18.281
1.4	1.14686	4.7582	8.4728	12.223	15.989	19.767
1.5	1.27161	5.1534	9.1410	13.158	17.202	21.253
1.6	1.39684	5.5494	9.809	14.104	18.416	22.740
1.7	1.5226	5.9458	10.479	15.047	19.632	24.227
1.8	1.6486	6.3437	11.148	15.989	20.847	22.715
1.9	1.7753	6.7419	11.818	16.932	22.063	27.205
2.0	1.90223	7.14066	12.49087	17.87684	23.28063	28.69511

x/π	$\log_{10}(-K_1(mx))$					
	$m = 1$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
1.0	$\bar{2}$.53037	$\bar{5}$.53422	$\bar{8}$.68816	$\overline{11}$.88352	$\overline{13}$.09860	$\overline{16}$ 32525
1.1	$\bar{2}$ 36949	$\bar{5}$.1028	$\bar{9}$.9843	$\overline{12}$.906	$\overline{15}$.850	$\overline{18}$.803
1.2	$\bar{2}$.21109	$\bar{6}$.6734	$\bar{9}$.2826	$\overline{13}$.932	$\overline{16}$.603	$\overline{19}$.284
1.3	$\bar{2}$.05454	$\bar{6}$.2457	$\overline{10}$.5835	$\overline{14}$.960	$\overline{17}$.356	$\overline{21}$.767
1.4	$\bar{3}$.89979	$\bar{7}$.8194	$\overline{11}$.8836	$\overline{15}$.988	$\overline{18}$.112	$\overline{22}$.248
1.5	$\bar{3}$.74630	$\bar{7}$.3942	$\overline{11}$.186	$\overline{15}$.013	$\overline{20}$.869	$\overline{24}$.732
1.6	$\bar{3}$.59399	$\bar{8}$.9704	$\overline{12}$.489	$\overline{16}$.049	$\overline{21}$.624	$\overline{25}$.217
1.7	$\bar{3}$.44281	$\bar{8}$.5467	$\overline{13}$.794	$\overline{17}$.080	$\overline{22}$.885	$\overline{27}$.702
1.8	$\bar{3}$.29250	$\bar{8}$.1251	$\overline{13}$.099	$\overline{18}$.112	$\overline{23}$.146	$\overline{29}$.190
1.9	$\bar{3}$.14305	$\bar{9}$.7036	$\overline{14}$.405	$\overline{19}$.145	$\overline{25}$.906	$\overline{30}$.676
2.0	$\bar{4}$.99429	$\bar{9}$.28255	$\overline{15}$.71079	$\overline{20}$.17876	$\overline{26}$.66590	$\overline{31}$.16427

x/π	$\log_{10} L_1(mx)$	$\log_{10} L_2(mx)$				
	$m = 1$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$
1.0	.46338	$\bar{3}$.20038	$\bar{4}$.52216	$\bar{4}$.08093	$\bar{5}$.75243	$\bar{5}$.49037
1.1	.54241	$\bar{3}$.07266	$\bar{4}$.39692	$\bar{5}$.95624	$\bar{5}$.62791	$\bar{5}$.36603
1.2	.62636	$\bar{4}$.95647	$\bar{4}$.28282	$\bar{5}$.84248	$\bar{5}$.51433	$\bar{5}$.25253
1.3	.71437	$\bar{4}$.85011	$\bar{4}$.17798	$\bar{5}$.73794	$\bar{5}$.40987	$\bar{5}$.14812
1.4	.80579	$\bar{4}$.75193	$\bar{4}$.08097	$\bar{5}$.64116	$\bar{5}$.31317	$\bar{5}$.05146
1.5	.90017	$\bar{4}$.66085	$\bar{5}$.99066	$\bar{5}$.52110	$\bar{5}$.22321	$\bar{6}$.96150
1.6	.99711	$\bar{4}$.57586	$\bar{5}$.90627	$\bar{5}$.46684	$\bar{5}$.13903	$\bar{6}$.87736
1.7	1.09631	$\bar{4}$.49815	$\bar{5}$.82702	$\bar{5}$.38772	$\bar{5}$.05995	$\bar{6}$.79833
1.8	1.19752	$\bar{4}$.42100	$\bar{5}$.75239	$\bar{5}$.31317	$\bar{6}$.98545	$\bar{6}$.72383
1.9	1.30053	$\bar{4}$.35009	$\bar{5}$.68177	$\bar{5}$.24265	$\bar{6}$.91492	$\bar{6}$.65334
2.0	1.40516	$\bar{4}$.28282	$\bar{5}$.61477	$\bar{5}$.17576	$\bar{6}$.84804	$\bar{6}$.58646

Inserting the values of I, K and L from Table II, together with the values of $\frac{A}{C}$ and $\frac{B}{C}$ from Table I, in equations 6, 7a and 7b, the following Table III of the ratio of p/C is obtained.

The values are, of course, symmetrical about the line $z = \frac{\pi}{2}$, so that only values for $z \ngtr \frac{\pi}{2}$ need be given.

Table III.

Distribution of Pressure over Square Slide-block.

z/π	x/π								
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
.1	—.00265	—.00342	—.00347	—.00321	—.00279	—.00231	—.00178	—.00126	—.00066
.2	405	553	577	541	474	394	301	212	110
.3	493	689	728	688	606	505	384	269	135
.4	535	757	809	768	680	567	430	299	149
.5	551	781	836	796	706	587	446	309	154

The series of lines of equal pressure is shown in Fig. 2, which was plotted from Table III.

The mean pressure is found by arithmetical summation to be

$$p_a = \frac{P}{\pi^2} = -.00356 \times C = -.0213 \times \frac{\lambda U}{c^2}.$$

By another approximate integration the position of the resultant pressure is found to be .420 of the length of the block from its rear end.

The coefficient of friction, found from equation (10), is

$$\mu = -\frac{F}{P} = \frac{c \times .693}{\pi \times .0212} + \frac{c}{2} = c \times 10.83 \cdots.$$

Case II. Slide-block of width one-third of its length.

The general solution is of course precisely the same as that of Case I, and equations (6), (7a) and (7b) apply without alteration.

The boundary conditions are now however

$$p = 0, \text{ when } z = 0, \quad \text{and } z = \pi,$$
$$\text{and } \quad p = 0, \text{ when } x = 3\pi, \text{ and } x = 6\pi.$$

The following table, corresponding to Table III for the square block, gives the values of the ratio p/C for the points of intersection of the lines

$$z = \pi \times 0.1, \quad z = \pi \times 0.2, \quad \ldots, \quad z = \pi \times 0.5,$$

with the lines

$$x = \pi \times 3.3, \quad x = \pi \times 3.6, \quad \ldots, \quad x = \pi \times 5.7.$$

Fig. 2.

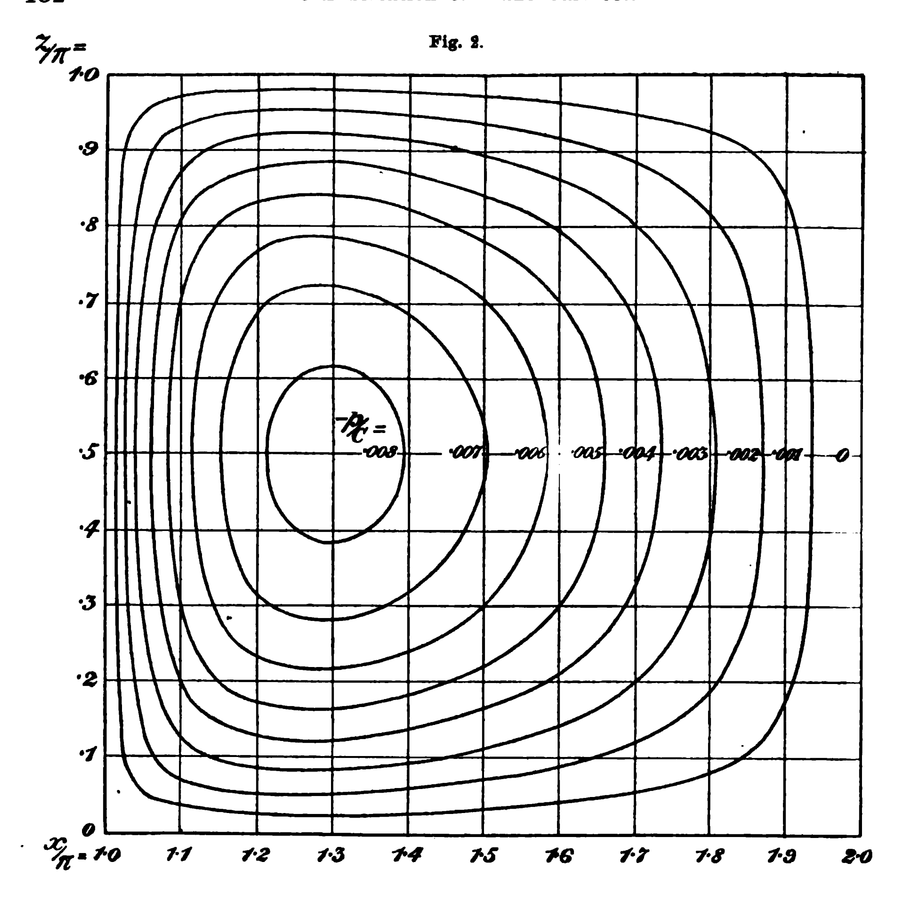


Table IV.

Distribution of Pressure over Slide-block, Case II.

z/π	x/π								
	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7
.1	—.00023	—.00026	—.00022	—.00019	—.00015	—.00012	—.00010	—.00008	—.00004
.2	42	45	40	34	28	23	18	14	08
.3	53	59	58	45	37	30	24	18	12
.4	60	67	59	51	41	34	27	21	14
.5	61	69	61	52	43	36	29	22	14

Fig. 3, corresponding to Fig. 2 for the square block, shows the lines of equal pressure.

Approximate integration gives the mean pressure as

$$p_d = -.00155 \frac{\lambda U}{c^2}.$$

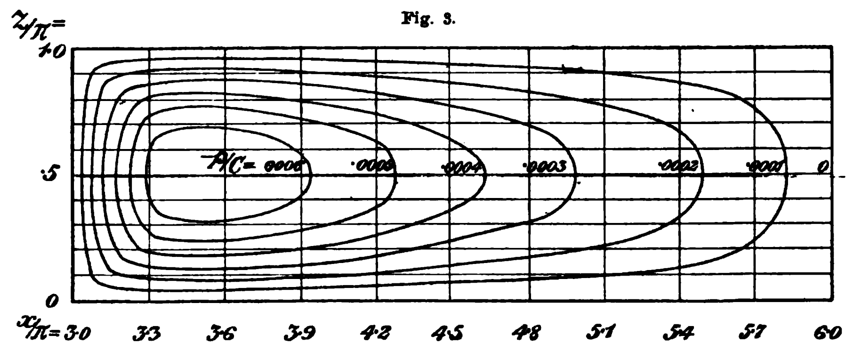


Fig. 3.

The resultant pressure acts at .39 of the length of the block from the rear end, and the "coefficient of friction" is

$$\mu = c \times 143,$$

about thirteen times greater than in the case of the square block.

Case III. Slide-block of infinite length.

In Fig. 4 let the plane ADC represent the lower surface of a slide-block of infinite length in the direction of x, moving in the direction xO over the infinite plane xOz. As before let the planes ADC and xOz be inclined at an angle $\theta = \sin^{-1} c$. Let $AD = \pi$.

Fig. 4.

The boundary conditions become

$$p = 0, \text{ when } x = b = \infty,$$

and also

$$\text{when } z = 0, \quad z = \pi.$$

In the general equation (1) $\frac{\partial p}{\partial x}$ and $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ can be assumed small in comparison with $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$, except near the end AD.

Therefore, except near AD,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{6 \lambda U}{c^2 x^3} \tag{11}$$

and consequently, observing the boundary conditions,

$$p = \frac{3 \lambda U}{c^2 x^3} z \cdot (z - \pi). \tag{12}$$

From equation (12) the mean pressure over a section of the slide extending from $x = a$ to $x = b$ is

$$p_a = \frac{3 \lambda U}{c^2 \pi (b - a)} \int_0^\pi \int_a^b \frac{z(z - \pi)}{x^3} \, dx \, dz \tag{13}$$

from which, putting $a = 3\pi$, $b = 6\pi$, we find for the mean pressure over an area corresponding to the slide-block of Case II

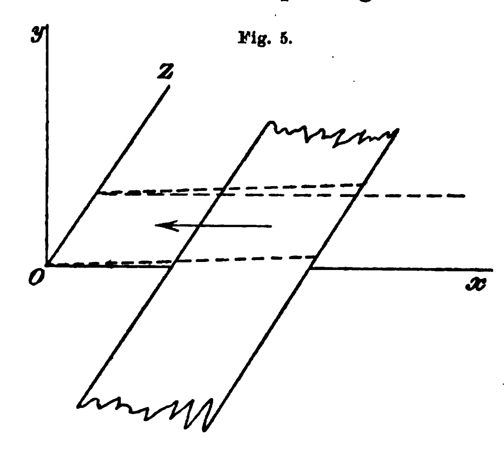


Fig. 5.

$$p_a = -.00258 \frac{\lambda U}{c^2}$$

as compared with $-.00155 \frac{\lambda U}{c^2}$ obtained from the exact expression.

This result indicates that the simple expressions (12) and (13) may used as approximations for slide-blocks whose length is several times greater than their width.

Case IV. Slide-block of infinite width.

The mathematics of this case has been given by Reynolds, (loc. cit.). For the purpose of comparison with the foregoing cases, some numerical results are here given for the same condition,

$$b = 2a.$$

The mean pressure is

$$p_a = -.0506 \frac{\lambda U}{c^2}$$

and is therefore greater than in the case of the square-block (I) in the ratio 1 : .422, showing the influence of the transverse flow of the fluid in the latter case.

The pressure at a series of points along the block is shown by the following table which gives the values of p/C.

Table V.

Distribution of Pressure in Slide-block of Infinite Width.

x/π	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$-p/C$	.00793	.01180	.01320	.01305	.01185	.00996	.00770	.00532	.00264

The resultant acts at $\bar{x} = \pi \times 1.433$.

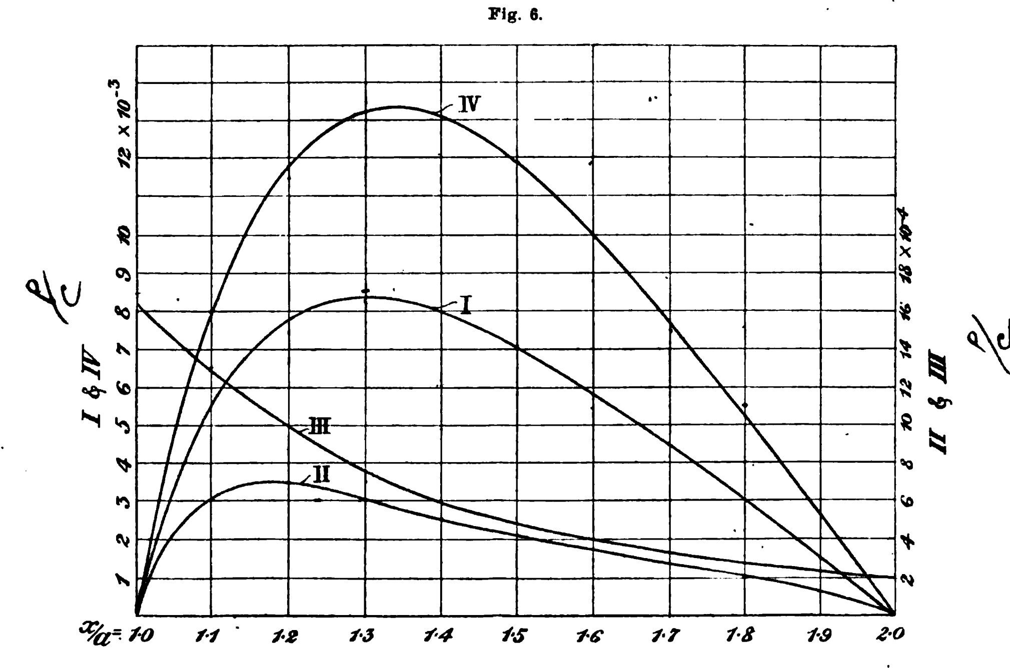
The "coefficient of friction" is $\mu = c \times 4.86 \cdots$ and is therefore less than half the coefficient for the square block, viz. $c \times 10.83 \cdots$.

The distribution of the pressure in the direction of motion in each of the above four cases is clearly shown to the eye by Fig. 6.

The ordinates of the curves I, II, III, IV, referred to the scales

written at the sides of the figure, give the magnitudes of the ratio p/C at all points along the middle lines ($z = \pi/2$) of the four blocks above discussed.

Fig. 6.



Experimental Verification by means of an Elastic Analogy.

The fundamental equations

$$\left.\begin{aligned} q_{xx} &= -p + 2\lambda\frac{\partial u}{\partial x}, \\ &\text{etc.} \\ \text{and} \quad q_{xy} &= q_{yx} = \lambda\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

for the stresses on the faces of the element $dx\,dy\,dz$, are, as is well-known, equally applicable to the motion of an incompressible viscous fluid, and to the deformations of an incompressible elastic solid.

In the former case u, v, w are the velocities in the directions of x, y, z, and λ is the viscosity-constant; in the latter case u, v, w are the component displacements and λ the shear-modulus.

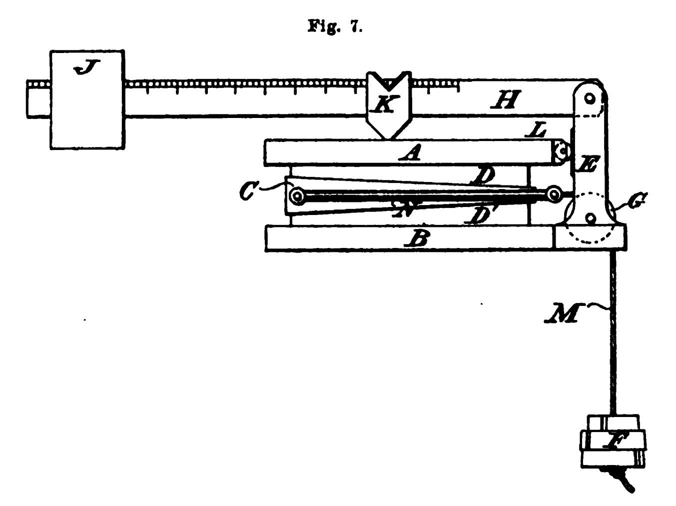
The whole of the foregoing investigation is therefore valid for the determination of the stresses in an incompressible elastic solid, in the form of a rectangular wedge, enclosed between two rigid, nearly

parallel, plane surfaces, one of which is displaced parallel to the plane of the other and in the direction of greatest mutual inclination.

Conversely, the results of experiment upon such an elastic solid give at the same time information upon a corresponding case of viscous-fluid motion.

Now there exists a large class of elastic substances, which admit of considerable (and therefore easily-observed) deformations approximately obeying Hooke's Law, and for which the assumption of incompressibility is nearly correct. India-rubber is a solid of this class, but still more convenient for the purpose is gelatine, which may, by solution in a suitable proportion of water, be prepared of almost any desired rigidity and may easily be moulded to any desired shape.

Fig. 7.



An apparatus for experiments of this kind is shown in Fig. 7.

A and *B* are two planed square plates of cast iron, *C* is a third square plate of varying thickness, the inclination of the sides being about 5 degrees. *D* and *D'* are two similar rectangular slabs of gelatine, each having half the taper of the plate *C*, so that when *D* and *D'* are in position between *A* and *C*, and *C* and *B* respectively, the plates *A* and *B* are parallel.

The plate *B* is formed with a pillar *E*, which supports the pivots of a pulley *G*, and of the lever *H*. This lever carries a movable weight, *J*, and has a movable fulcrum, *K*, which rests on the plate *A*. A roller, *L*, carried by the plate *A*, bears against a smooth vertical surface formed on the pillar, *E*.

A cord *M*, attached to the yoke *N*, which is freely hinged to the plate, *C*, near its rear end, passes over the pulley *G* and supports the weights *F*.

The purpose of the yoke, *N*, is to ensure that the tension of the cord is applied nearly horizontally to the plate, *C*, even if the latter is slightly displaced in a vertical direction.

The apparatus is used in the following manner.

The weights F and the lever H are first removed. Any suitable small weights are then placed on the plate A and adjusted until A and B are parallel, which may be determined with accuracy by applying a gauge at the four corners.

The lever, H, with the weight J, and the weights F are then applied, and the positions of J and of the fulcrum K adjusted until the plates A and B are again parallel, and the same distance apart as before. In this operation the plate C is displaced horizontally through a distance U.

The duplication of the gelatine slabs D and D' insures, from the symmetry, that the displacement U is parallel to A and B, and avoids the necessity of guides for this purpose and the uncertainty in the determination of the horizontal force on C which such guides would entail.

The displacement, U, corresponds to the velocity; the force applied by the fulcrum, K, to the load; and the tension of the cord to double the frictional resistance of a slide-block (represented by C) working on a fluid film corresponding to one of the gelatine slabs.

The point of contact of K and A corresponds with the position of the resultant pressure in the fluid film. The horizontal distance of this point from the vertical line through the centres of the slabs D and D' may be denoted by e.

The following short table gives the results of measurements on gelatine blocks, 12.7 cm. square, and of thickness varying from 6.0 mm. at the thin to 12.0 mm. at the thick ends, (the value of c being consequently .047), as compared with the results of the theory, Case I.

Table VI.

No.	P	$F/2$	e		$F/2P$.	
	gm.	gm.	observed	calculated	observed	calculated
1	1499	646	.97 cm.	$12.7 \times .080$	.43	.51
2	1040	476	1.06	$= 1.02$ cm.	.46	.51
3	1827	873	.75	„	·47	.51

It would not be difficult to design an analogous apparatus for the investigation of cylindrical bearings of finite width, and of other cases for which mathematical solutions are not available.

For use in the laboratory the method presents obvious advantages, and avoids the well-known difficulties of direct experiment on the lubrication of bearings.

Mathematische Theorie der Spiegelung in abwickelbaren Flächen.

Von Ludwig Matthiessen in Rostock.

Problem: Gegeben sei ein Kreiskegel SM_1M_2, senkrecht stehend auf einer Ebene. Außerhalb der Achse SM_0 über der Kegelspitze S befinde sich der feste Augenpunkt A (Fig. 1) des Beobachters, mit den Koordinaten $SB = a$ und $AB = b$, der spiegelnde Punkt P_0 auf der Leitlinie SW der Kegelfläche. Ferner sei δ das Azimut der Leitlinie SW gegen die Leitlinie SV der Ebene ABM_0. Der halbe Spitzenwinkel M_0SV gleich M_0SW des Kegels sei γ, der Winkel ASB gleich $\lambda\,(\lambda > \gamma)$, der Abstand des Augenpunktes A vom Kegelscheitel AS gleich d, die Entfernung des Punktes A vom Spiegelpunkte P_0 (Gesichtslinie) gleich x, weiter der Abstand des Spiegels P_0 von der Kegelspitze gleich z, die Seite des Kegels s, seine Höhe h, der Radius der Basis r und die Objektdistanz des gespiegelten Punktes P der Basisebene vom Spiegel P_0 gleich x_0.

Um zu den Gleichungen zwischen den Elementen der Neumannschen dioptrisch-katoptrischen Formeln[1]), enthaltend den Einfallswinkel e_2 des Strahles AP_0, das Azimut ε der Einfallsebene PP_0S gegen die Tangentialebene des Spiegels SP_0, seine beiden Krümmungsradien ϱ' und ϱ'', die Bilddistanzen x_1 und x_2 der astigmatischen Spiegelung, sowie die Azimute ϑ_2 und $90^0 + \vartheta_2$ der Brennlinien, zu gelangen, muß man von dem aus der Erfahrung gefolgerten Satze ausgehen, daß bei allen Fällen der Brechung oder Spiegelung in gekrümmten Flächen es im allgemeinen sehr schwierig, ja oft unmöglich erscheint

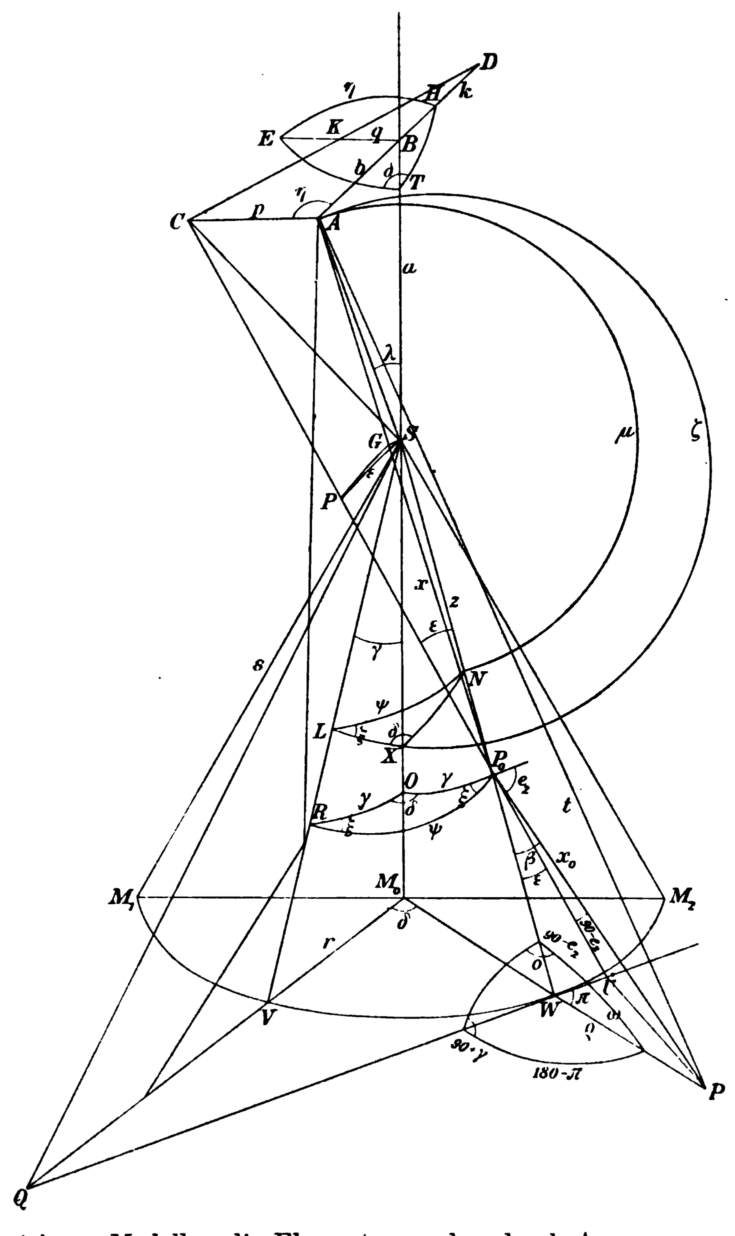
> *für einen gegebenen leuchtenden Punkt P die Richtung desjenigen Strahles x_0 zu finden, welcher in einem noch unbekannten Spiegel P_0 nach einem festen Augenpunkte gebrochen oder gespiegelt wird,*

wogegen es meistens gelingt, in entgegengesetzter Richtung, also direkter Richtung der Lichtbewegung, für einen z. B. von einem gegebenen Spiegel P_0 nach dem Augenpunkte A gespiegelten Strahl x den zugeordneten Objektpunkt P zu erhalten. Wir werden weiter unten zeigen, daß das erstere Verfahren für den Kreiskegel und Kreiszylinder möglich, für die übrigen abwickelbaren Flächen unmöglich erscheint.

1) L. Matthießen, Ann. d. Phys. 9. S. 691. 1902.

In schwierigen konkreten Fällen kann man auch, um weitläufige mathematische Entwicklungen zu umgehen, mit Hilfe der deskriptiven

Fig. 1.



Geometrie an Modellen die Elemente ε und e_2 durch Ausmessung dieser Winkel suchen. Um dennoch eine allgemeine Lösung des Problems

zu bewerkstelligen, kann man in entgegengesetzter Richtung der Lichtbewegung für einen gegebenen Spiegel, z. B. die Leitlinie SP_0, die Gleichungen als Funktionen des Abstandes $SP_0 = z$ und der Elemente des Kegels suchen und auf diesem Wege alle zugehörigen Objektpunkte P einer gegebenen Fläche oder ihre Polargleichung $(\varrho, \pi) = 0$ erhalten, wie im folgenden versucht werden soll.

§ 1. Wir wollen zunächst in Berücksichtigung der Schwierigkeiten des allgemeinen Problems den speziellen einfacheren Fall betrachten, wo das Azimut δ zwischen dem Hauptschnitte, d. h. der durch den Augenpunkt A und die Achse gelegten Ebene, und der Reflexionsebene, also auch das Azimut ε gleich Null ist, folglich sämtliche Dimensionen in der Hauptebene liegen, weil die allgemeinen Gleichungen für $\delta = 0$ hierauf stets zurückführen müssen.

Fig. 2.

Aus Fig. 2 ergeben sich mit Leichtigkeit folgende Relationen:

(1) $$x^2 = z^2 + 2\,dz\cos(\lambda+\gamma) + d^2;$$

(2) $$\cos e_2 = \frac{d\sin(\lambda+\gamma)}{\sqrt{z^2 + 2\,dz\cos(\lambda+\gamma) + d^2}},\qquad \sin e_2 = \frac{z + d\cos(\lambda+\gamma)}{\sqrt{z^2 + 2\,dz\cos(\lambda+\gamma) + d^2}};$$

(3) $$x_0 = \frac{(s-z)\cos\gamma}{\sin(e_2-\gamma)};$$

(4) $$p = d\sin(\lambda+\gamma);$$

(5) $$q = d\cos\lambda\sin\gamma;$$

(6) $$WP = \varrho = \frac{(s-z)\cos e_2}{\sin(e_2-\gamma)};$$

(7) $$U\widehat{W}P = \pi = 90^0.$$

Aus (3) und (6) folgt, daß die Grenze des sichtbaren Objektfeldes in dieser Richtung bestimmt wird durch die Ungleichung $e_2 \geqq \gamma$. Ist $e_2 = \gamma$, so liegt P im Unendlichen. Der nächstliegende Objektpunkt liegt stets an der Peripherie der Kegelbasis in W; hier ist also $x_0 = 0$. Für die äußerste Grenze des Sehfeldes ist nach (2)

$$\cos e_2 = \cos\gamma = \frac{d\sin(\lambda+\gamma)}{\sqrt{z^2 + 2\,dz\cos(\lambda+\gamma) + d^2}}.$$

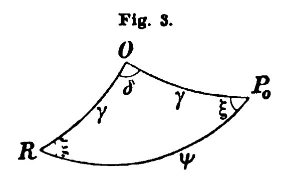
Daraus ergibt sich der Ort des konjugierten Spiegelelementes P_0

$$z_0 = -\,d\,\frac{\cos(\lambda + 2\gamma)}{\cos\gamma}.$$

Höher gelegene Spiegelpunkte geben keine Bilder. Die Konstruktion der beiden astigmatischen Bilder von P, nämlich B_1 und B_2, erfolgt am Ende.

§ 2. Der Spiegel SW sei nun allgemein um das Azimut δ gegen die Hauptebene geneigt; dann werden sämtliche Dimensionen räumlich. Wir suchen zunächst *die Gesichtslinie* $AP_0 = x$ *zu bestimmen.* Wir denken uns an den Spiegel SW die Tangentialebene gelegt, auf welcher die Einfalls- und Reflexionsebene senkrecht steht und in welcher das Azimut ε der letzteren liegt. Die Tangentialebene ist SWQ (Fig. 1), also $M_0WQ = 90^0$. Um x zu finden, suchen wir den Winkel $ASN = \mu$ in dem sphärischen Dreiecke ANL (N liegt im Spiegel SW, L auf der Hauptleitlinie SV). An diesem sphärischen Dreiecke der Ecke $SAWV'$ liegt die gleichschenklige Ecke SM_0WV; das gleichwertige sphärische Dreieck dieser Ecke sei P_0OR (Fig. 3). Für seine Winkel und Seiten gelten folgende Beziehungen:

Fig. 3.



$$\cos\psi = \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos\delta = 1 - 2\sin\gamma^2\sin\tfrac{1}{2}\delta^2,$$

$$\sin\psi = 2\sin\gamma\sin\tfrac{1}{2}\delta\sqrt{1-\sin\gamma^2\sin\tfrac{1}{2}\delta^2},$$

$$\tan\xi = \frac{\cot\frac{1}{2}\delta}{\cos\gamma}, \quad \cos\xi = \frac{\cos\gamma\sin\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{1-\sin\gamma^2\sin\frac{1}{2}\delta^2}}.$$

Hieraus ergeben sich die Winkel des sphärischen Dreiecks ANL (Fig. 4)

Fig. 4.

$$\zeta = 180^0 + (\lambda + \gamma),$$

$$\cos\mu = \cos\zeta\cos\psi - \sin\zeta\sin\psi\cos\xi.$$

Setzt man die gefundenen Werte ein, so kommt

$$\cos\mu = -\cos\lambda\cos\gamma + \sin\lambda\sin\gamma\cos\delta = -\cos\Delta.$$

Demgemäß ist nun

$$x^2 = z^2 - 2dz\cos\mu + d^2 = z^2 + 2dz\cos\Delta + d^2. \tag{8}$$

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man von x in § 1 ausgeht und b um δ um die Achse dreht. In Rückbeziehung auf die Formeln in § 1 geht die Gleichung (8) für $\delta = 0$ in (1) über.

§ 3. Es möge weiter eine *Relation für den Einfallswinkel* e_2 gesucht werden. Zu dem Zwecke projizieren wir den Augenpunkt A auf die Tangentialebene SQW; die Projizierende AC sei p. Ebenso

projizieren wir B auf diese Ebene; die Projizierende BK sei q. Ferner verlängern wir $AB = b$ rückwärts bis zum Durchschnittspunkte D mit derselben Ebene; die Rückwärtsverlängerung sei k. Das zugehörige rechtwinklige Dreieck ist dann ACD mit der Hypotenuse $AD = i = b - k$. Alsdann ist

$$(9) \qquad p = x \cos e_2.$$

Die Projizierende p läßt aber noch eine zweite Bestimmung zu, welche sich aus dem Dreiecke ACD ergibt (Fig. 1). Zunächst ist q für alle Werte von δ eine konstante Größe, nämlich

$$(10) \qquad q = a \sin \gamma = d \cos \lambda \sin \gamma.$$

Bezeichnen wir den Neigungswinkel von p gegen b, also CAB mit η, so ist der Winkel bei D gleich $90^0 - \eta$. Leicht ergeben sich folgende Beziehungen:

$$p = (b + k) \cos \eta = \left(b + d \frac{\cos \lambda \sin \gamma}{\cos \eta}\right) \cos \eta,$$

also

$$(11) \qquad p = d (\sin \lambda \cos \eta + \cos \lambda \sin \gamma).$$

Dabei wird $\eta = 90^0$ für $\delta = 90^0$, also $p = q = d \cos \lambda \sin \gamma$. Ist δ von Null verschieden, so ist weiter η zu bestimmen. Eine Beziehung dafür ergibt sich aus dem Quadrantendreiecke HET (Fig. 5) der Ecke $BDKS$, mit den Seiten η, $90^0 - \gamma$ und dem der ersteren gegenüberstehenden Winkel δ. Es ist

Fig. 5.

$$\cos \eta = \cos \gamma \cos \delta.$$

Daraus findet man nun

$$(12) \qquad p = d (\cos \lambda \sin \gamma + \sin \lambda \cos \gamma \cos \delta) = d \cos \Omega.$$

Ω ist demnach der Winkel, welchen die Projizierende p mit der Linie $AS = d$ bildet. Man erhält also den Wert von e_2 aus

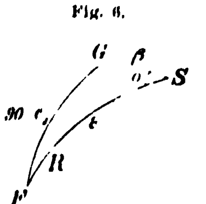


Fig. 6.

$$(13) \qquad \cos e_2 = \frac{d \cos \Omega}{\sqrt{z^2 + 2 d z \cos \Delta + d^2}}.$$

Es ist demnach e_2 desto größer, je größer z ist. In Rückbeziehung auf § 1 geht die Gleichung für $\delta = 0$ in (2) über.

§ 4. Wir haben ferner eine *Relation für das Azimut* ε aufzustellen. Eine solche ergibt sich aus der Betrachtung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks SFG der Ecke P_0SFG oder P_0WUT (Fig. 6).

Man findet

$$(14) \qquad \cos\varepsilon \cdot \sin e_2 = \cos\beta, \quad \sin o = \frac{\cos e_2}{\sin\beta}, \quad \tan o = \frac{\cot e_2}{\sin\varepsilon}.$$

Nun ist β ein Winkel des ebenen Dreiecks ASP_0, welcher der Seite $AS = d$ gegenüber liegt, also ist

$$\sin\beta : \sin\mu = d : x, \quad 1 - \cos\beta^2 = (1 - \cos\mu^2)\frac{d^2}{x^2}.$$

Daraus folgt nunmehr

$$(15) \qquad \cos\varepsilon \cdot \sin e_2 = \cos\beta = \frac{z + d\cos\varDelta}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\varDelta + d^2}}.$$

Der Wert von $\sin e_2$ ergibt sich aus (13), nämlich

$$(16) \qquad \sin e_2 = \frac{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\varDelta + d^2\sin\Omega^2}}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\varDelta + d^2}}.$$

In Verbindung mit (15) erhält man daraus

$$(17) \qquad \cos\varepsilon = \frac{z + d\cos\varDelta}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\varDelta + d^2\sin\Omega^2}}$$

$$(18) \qquad \sin\varepsilon = \frac{d\sin\lambda\sin\delta}{\sqrt{z^2 + 2dz\cos\varDelta + d^2\sin\Omega^2}}$$

Aus den Gleichungen (13), (16), (18) folgt

$$(19) \qquad \sin\varepsilon \cdot \tan e_2 = \frac{\sin\lambda\sin\delta}{\cos\lambda\sin\gamma + \sin\lambda\cos\gamma\cos\delta} = \text{const.}$$

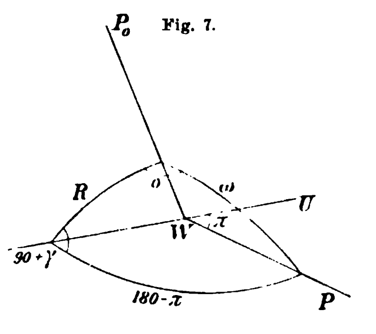
Daraus ergibt sich weiter, daß nach (14) auch o ein konstanter Winkel ist, also

$$\cot o = \sin\varepsilon\tan e_2.$$

Das Azimut ε erreicht ein Maximum für $z = 0$, der Winkel e_2 ein Minimum. In Rückbeziehung auf § 1 wird $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$.

§ 5. Wir haben weiter eine *Relation für die Objektabszisse* $P_0P = x_0$ zu suchen. Diese erhält man aus dem ebenen Dreiecke P_0PW, wofür folgende Gleichung gilt:

$$(20) \qquad x_0 = \frac{(s - z)\sin\omega}{\sin(\omega + \beta)} = \frac{s - z}{\cos\beta + \cot\omega\sin\beta}.$$



Um ω zu finden, betrachten wir das sphärische Dreieck der Ecke WP_0PU (Fig. 7), welches ein Quadrantendreieck ist. Man findet daraus

$$(21) \qquad \cot\omega = -\tan\gamma\sin o, \quad \cot\pi = \cot\gamma\cot o = \sin\varepsilon \cdot \tan e_2\cos\gamma.$$

Daneben ist nach (14)

$$\cos\beta = \cos\varepsilon \cdot \sin e_2, \qquad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos\varepsilon^2 \sin e_2^2}, \qquad \sin o = \cos e_2 : \sin\beta .$$

Daraus folgt nunmehr

$$(22) \qquad x_0 = \frac{s - z}{\cos\varepsilon \sin e_2 - \tan\gamma \cos e_2} .$$

In Rückbeziehung auf § 1 wird $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$, also nach (3)

$$x_0 = \frac{s - z}{\sin e_2 - \tan\gamma \cos e_2} = \frac{(s - z)\cos\gamma}{\sin(e_2 - \gamma)} .$$

§ 6. Es läßt sich nun auch noch der *Ort des Objektpunktes P* in bezug auf die Tangente WQ bestimmen. Seine Polarkoordinaten in der Basisebene sind $WP = \varrho$ und π. Es ist im ebenen Dreieck WP_0P

$$\varrho : x_0 = \sin\beta : \sin\omega .$$

Nach (21) ist

$$\cot\omega = -\tan\gamma \cdot \sin o = -\frac{\tan\gamma \cos e_2}{\sin\beta}, \qquad \sin\omega = \frac{\sin\beta}{\sqrt{\sin\beta^2 + \tan\gamma^2 \cos e_2^2}} .$$

Daraus folgt

$$(23) \quad \varrho = x_0 \sqrt{1 - \cos\varepsilon^2 \sin e_2^2 + \tan\gamma^2 \cos e_2^2} = \frac{(s - z)\, d \sqrt{\sin\Delta^2 + \tan\gamma^2 \cos\Omega^2}}{z + d(\cos\Delta - \tan\gamma \cos\Omega)} .$$

In Rückbeziehung auf § 1 wird $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$ und gemäß (3) und (6)

$$\varrho : x_0 = \cos e_2 : \cos\gamma .$$

Der Polarwinkel π ergibt sich aus (21)

$$(24) \qquad \cot\pi = \sin\varepsilon \cdot \tan e_2 \cos\gamma = \frac{\sin\delta}{\cot\lambda \tan\gamma + \cos\delta} .$$

In Rückbeziehung auf § 1 wird $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$, also gemäß (7) $\pi = 90^0$.

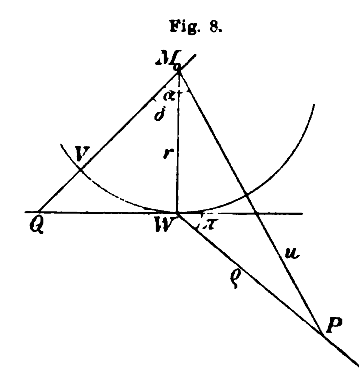


Fig. 8.

Aus der Beschaffenheit der Gleichung (24) geht hervor, daß sie von x oder z unabhängig ist, also zu einer bestimmten spiegelnden Leitlinie der Kegelfläche eine geradlinige Objektkurve gehört.

Die Eigenschaft des Polarwinkels π als einer konstanten Größe kann nun benutzt werden, die umgekehrte Richtung unserer Entwicklungen, also den direkten Weg der Lichtstrahlen von einem gegebenen Objektpunkte P nach dem Augenpunkte A zu verfolgen. Es ist in der Einleitung die Bemerkung gemacht, daß dies für den Kreiskegel, also auch für den Kreiszylinder, möglich sei. Es gelingt auch für die

Kugelfläche, dagegen wohl kaum für den elliptischen Kegel und andere abwickelbare Flächen. Wir wollen unser Problem in dieser entgegengesetzten Richtung verfolgen.

Es sei M_0 (Fig. 8) das Zentrum der Kegelbasis, r ihr Radius, $PM_0 = u$, SW der gesuchte Spiegel, also δ sein gesuchtes Azimut, α das Azimut vom Objekte P; dann lassen sich δ, π und alle übrigen optischen Elemente finden. Es ist zunächst

$$u : r = \cos\pi : \cos(\pi + \alpha - \delta)$$

oder

$$\cot\pi = \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\cos(\alpha - \delta) - \frac{r}{u}}, \tag{25}$$

und gemäß (24)

$$\cot\pi = \frac{\sin\delta}{\cot\lambda\tan\gamma + \cos\delta} = \frac{\sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta}{\cos\alpha\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta - \frac{r}{u}}.$$

Drückt man alles durch $\tan\delta$ aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(1 + \tan\delta^2)\left\{\left(\cot\lambda\tan\gamma - \frac{r}{u}\right)\tan\delta - \cot\lambda\tan\gamma\sin\alpha\right\}^2 \\ = \{\sin\alpha\tan\delta^2 + 2\cos\alpha\tan\delta - \sin\alpha\}^2,\end{aligned} \tag{26}$$

also eine biquadratische Gleichung nach $\tan\delta$. Derselben genügt für $\alpha = 0^0$ (Hauptebene) der Wert $\delta = 0^0$. Setzen wir in einem konkreten Falle $\lambda = 41^0\,30'$, $\gamma = 30^0\,30'$, $\alpha = 80^0$, $u = 25$ cm, $r = 12$ cm, $s = 24$ cm, so wird die Gleichung (26) in numerischen Werten:

$$0{,}8370\tan\delta^4 + 0{,}2061\tan\delta^3 - 2{,}3818\tan\delta^2 - 1{,}1619\tan\delta + 0{,}5398 = 0.$$

Ein Wurzelwert dieser Gleichung ist $\tan\delta = 1{,}7326$, also $\delta_1 = 60^0\,0'$. Die übrigbleibende Gleichung ist

$$0{,}8370\tan\delta^3 + 1{,}6573\tan\delta^2 + 0{,}4896\tan\delta - 0{,}3126 = 0.$$

Ein zweiter Wurzelwert ist $\tan\delta = 0{,}2959$, also $\delta_2 = 16^0\,30'$ oder $-163^0\,30'$. Die übrigbleibende quadratische Gleichung ist

$$0{,}8370\tan\delta^2 + 1{,}9050\tan\delta + 1{,}0533 = 0.$$

Die Wurzeln sind ebenfalls beide reell und negativ, nämlich $\delta_3 = -43^0 30'$, $\delta_4 = -53^0\,0'$. Der einzig brauchbare Wert ist $\delta_1 = 60^0\,0'$; es entsprechen entweder alle drei der inneren Inzidenz bei durchsichtigem Kegel, oder vielleicht auch nur einer. Welcher Wert, darüber zu entscheiden, bedarf einer besonderen Untersuchung.

Aus δ_1 berechnet man π und ϱ; dies aus

$$\varrho : u = \sin(\alpha - \delta) : \cos\pi.$$

Dabei findet man $\pi = 53^0 20'$, $\varrho = 14{,}1$ cm, $\Delta = 61^0 30'$, $\Omega = 48^0 20'$, z (aus (23)) $= 10{,}5$ cm, x (aus (8)) $= 20$ cm, e_2 (aus (9)) $= 65^0 0'$, ε (aus (24)) $= 23^0 40'$, x_0 (aus (22)) $= -23{,}2$ cm.

Um diese Werte zu berechnen, kann man auch auf folgende Weise verfahren. Man verbinde den Objektpunkt P mit dem Augenpunkte A durch die Gerade t. Es ist dabei

$$(27)\quad t^2 = u^2 - 2du \sin\lambda \cos\alpha + s^2 \cos\gamma^2 + 2ds \cos\lambda \cos\gamma + d^2.$$

Die Linie t ist auf den Spiegel SW zu projiziren, wozu man noch den Objektpunkt P auf denselben zu projizieren hat. Ist p_1 die Projizierende und wie in (12) p die Projizirende des Augenpunktes A, so ist

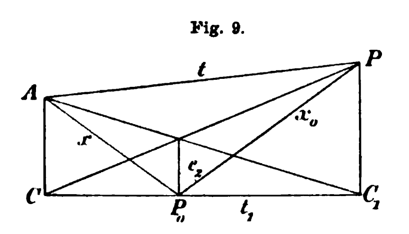
$$p = d(\cos\lambda \sin\gamma + \sin\lambda \cos\gamma \cos\delta), \quad p_1 = \varrho \sin\gamma \sin\pi.$$

Ist t_1 die Projektion von t, so ist

$$t_1 = \sqrt{t^2 - (p_1 - p)^2}.$$

Man findet dann leicht durch Konstruktion (Fig. 9) und Berechnung die Gesichtslinie $AP_0 = x$, die Objektdistanz $P_0P = x_0$, den Ort P_0 des Spiegels und den Einfallswinkel e_2. Das Azimut ε der Einfallsebene gegen den Spiegel SW ergibt sich aus (19)

Fig. 9.



$$\sin\varepsilon = \frac{\cot e_2 \sin\lambda \sin\delta}{\cos\lambda \sin\gamma + \sin\lambda \cos\gamma \cos\delta}.$$

Die vorstehenden Untersuchungen führen schließlich zu dem Satze, daß allgemein für alle abwickelbaren Flächen bei einem festen Augenpunkte zu einer Leitlinie als Spiegel krummlinige Objektkurven gehören, welche auf einer beliebigen Ebene liegen. Das Problem läßt sich aber nur punktuell für die abwickelbaren Flächen verallgemeinern, insofern als an die Stelle der gemeinsamen Einfallsebene eine gewundene Fläche eintritt, wobei sich die Elemente λ, γ, δ fortwährend ändern. Die Objektkurven auf irgend einer krummen Fläche findet man dadurch, daß man die Durchschnitte der Einfallsflächen mit jener Fläche konstruiert.

§ 7. *Die streifende Inzidenz.* Wenn man vom Augenpunkte aus die zwei Tangentialebenen an die Kegelfläche legt bis zum Durchschnitt mit der Basisebene (Objektebene), so begrenzen dieselben ein ringförmiges Flächenstück, in welchem sämtliche von A aus sichtbare, gespiegelte Objektpunkte enthalten sind. Wir erhalten dasselbe in

mathematischer Form, wenn wir $e_2 = 90^0$ setzen (streifende Inzidenz) Die Bestimmungsgleichung ist

$$\cos(180 - \delta) = \cot\lambda \tan\gamma. \tag{28}$$

Diese Gleichung ist also von z unabhängig und das ringförmige Flächenstück nach beiden Seiten geradlinig begrenzt. Dasselbe folgt auch aus der Formel (24) für den Polarwinkel π, indem für alle Spiegelpunkte P_0 bei der streifenden Inzidenz $\pi = 0$ wird, also die Objektkurve mit der Tangente der Kegelbasis koinzidiert. Abhängig von $SP_0 = z$ sind aber die Elemente ε, x, x_0 und ϱ. Wir wollen dieselben einzeln betrachten.

a) *Das Azimut* ε hat ein Maximum für $z = 0$, ein Minimum für $z = s$.

Für $z = 0$ wird

$$\sin\varepsilon = \frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin\Omega}.$$

Setzt man den Grenzwert von δ ein, so kommt

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\lambda}{\cos\gamma}, \quad \sin\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos\lambda}{\cos\gamma}\right)^2}.$$

Da wir $\lambda > \gamma$ angenommen haben, so ist $\cos\lambda : \cos\gamma$ ein echter Bruch und ε reell. Für $z = s$ wird nach (17)

$$\cos\varepsilon = \frac{s + d\cos\Delta}{\sqrt{s^2 + 2ds\cos\Delta + d^2\sin\Omega^2}}.$$

Setzt man für δ seinen Wert ein, so wird

$$\cos\varepsilon = \frac{s + d\dfrac{\cos\lambda}{\cos\gamma}}{\sqrt{s^2 + 2ds\dfrac{\cos\lambda}{\cos\gamma} + d^2}}.$$

Dies ist ein echter Bruch für $\lambda > \gamma$; er ist größer als der vorhergehende, welcher $z = 0$ entspricht; es nimmt also ε mit wachsendem z ab.

b) Die *Objektdistanz* x_0 hat ein Maximum für $z = 0$, ein Minimum für $z = s$.

Für $z = 0$ wird

$$x_0 = \frac{s\sin\Omega}{\cos\Delta}.$$

Setzt man den Wert für δ ein, so wird

$$x_0 = s \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\lambda}.$$

Für $z = s$ wird $x_0 = 0$.

c) Der *Radiusvektor* ϱ *des Objektpunktes* ist ein Maximum für $z = 0$, ein Minimum für $z = s$.

Für $z = 0$ ist

$$\varrho = s \tan \varepsilon = \frac{s \cdot \sin \lambda \sin \delta}{\cos \varDelta},$$

und wenn man den Wert für δ einsetzt

$$\varrho = s \sqrt{\left(\frac{\cos \gamma}{\cos \lambda}\right)^2 - 1}.$$

Für $z = s$ wird $\varrho = 0$. Der Polarwinkel π ist bei streifender Inzidenz gleich 0.

§ 8. *Die Berechnung der Bildweiten und ihres Astigmatismus.*

Für die Berechnung der beiden Bildweiten x_1 und x_2 gegebener Objektpunkte gelten die drei bekannten Neumannschen Gleichungen[1]) für die Brechung oder Spiegelung bei schiefer Inzidenz auf krumme Flächen. Für den Fall, welcher hier vorliegt, daß das einfallende Strahlenbündel homozentrisch ist, also $\xi_0 = x_0$, lauten dieselben

$$(29) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \cos \varepsilon^2 + \varrho_1 \sin \varepsilon^2) \sin(e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{\cos e_2^2}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cos e_1^2 \left(\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1,$$

$$(30) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_2 \sin \varepsilon^2 + \varrho_1 \cos \varepsilon^2) \sin(e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \left(\frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1} \right) \right\} = 1,$$

$$(31) \quad \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin e_1}{(\varrho_1 - \varrho_2) \sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \cos e_1 \cdot \frac{\sin 2\vartheta_2}{\sin 2\varepsilon} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1.$$

Hieraus berechnen sich ϑ_2, x_1 und x_2 mittels folgender Gleichungen: Es sei

$$\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1} = P_1, \quad \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1} = Q_1,$$

$$\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 = R_1.$$

Daraus erhält man

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = P_1 + Q_1, \quad \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \cos 2\vartheta_2 = Q_1 - P_1,$$

und weiter

$$(32) \quad \tan 2\vartheta_2 = \frac{2 R_1}{P_1 - Q_1}, \quad \frac{1}{x_1 x_2} = P_1 Q_1 - R_1^2.$$

Es sind also x_1 und x_2 die Wurzeln von

$$(33) \quad \left(\frac{1}{x} - P_1 \right) \left(\frac{1}{x} - Q_1 \right) = R_1^2.$$

---

1) C. Neumann, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl. (1880) S. 53.

Die dioptrisch-katoptrischen Gleichungen lassen sich mit Rücksicht auf unser spezielles Problem noch vereinfachen. Es ist der Krümmungsradius des Hauptnormalschnittes von dem Spiegel SP_0W $\varrho_1 = \infty$, der des Nebennormalschnittes $\varrho_2 = N$ (Normale) $= z \tan\gamma$; $e_1 = -e_2$. Die drei Gleichungen (29), (30), (31) reduzieren sich auf folgende:

$$(34)\qquad \frac{\varrho_2 \cos e_2}{2\sin\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{x_0} + \frac{\varrho_2\cos e_2}{2\sin\varepsilon^2}\left(\frac{\cos\vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin\vartheta_2^2}{x_1}\right) = 1,$$

$$(35)\qquad \frac{\varrho_2}{2\cos\varepsilon^2\cos e_2}\cdot\frac{1}{x_0} + \frac{\varrho_2}{2\cos\varepsilon^2\cos e_2}\left(\frac{\sin\vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos\vartheta_2^2}{x_1}\right) = 1,$$

$$(36)\qquad \frac{\varrho_2\sin 2\vartheta_2}{2\sin 2\varepsilon}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = 1.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen für die Bildweiten x_1 und x_2, sowie die Drehung ϑ_2 der einen Brennlinie gegen die Einfallsebene

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2x_0\left(1 - \cos\varepsilon^2\sin e_2^2\right) - 2\varrho_2\cos e_2}{x_0\varrho_2\cos e_2},$$

$$\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\cos 2\vartheta_2 = \frac{2\left(\cos\varepsilon^2\cos e_2^2 - \sin\varepsilon^2\right)}{\varrho_2\cos e_2},$$

$$\tan 2\vartheta_2 = \frac{\sin 2\varepsilon\cdot\cos e_2}{\sin\varepsilon^2 - \cos\varepsilon^2\cos e_2^2},$$

$$\frac{1}{x_1x_2} = -\frac{2x_0\left(1 - \cos\varepsilon^2\sin e_2^2\right) - \varrho_2\cos e_2}{x_0^2\varrho_2\cos e_2}.$$

Es sind dann x_1 und x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(37)\qquad \frac{1}{x^2} - 2\,\frac{x_0\left(1 - \cos\varepsilon^2\sin e_2^2\right) - \varrho_2\cos e_2}{x_0\varrho_2\cos e_2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{2x_0\left(1 - \cos\varepsilon^2\sin e_2^2\right) - \varrho_2\cos e_2}{x_0^2\varrho_2\cos e_2} = 0.$$

Dieser Gleichung genügt der eine Wert $x_1 = -x_0$, d. h. die erste Brennlinie liegt immer ebensoweit jenseits des Spiegels P_0 wie der Objektpunkt. Die zweite Bildweite ist

$$(38)\qquad x_2 = \frac{x_0\varrho_2\cos e_2}{2x_0\left(1 - \cos\varepsilon^2\sin e_2^2\right) - \varrho_2\cos e_2}.$$

In Rückbeziehung auf § 1 ist $\varepsilon = 0$ für $\delta = 0$ und

$$\frac{1}{x^2} - 2\,\frac{x_0\cos e_2 - N}{x_0N}\cdot\frac{1}{x} - \frac{2x_0\cos e_2 - N}{x_0^2N} = 0,$$

also

$$x_1 = -x_0,\qquad x_2 = \frac{x_0N}{2x_0\cos e_2 - N},\qquad N = z\tan\gamma.$$

Für die Hauptebene wird ferner $\tan 2\vartheta_2 = 0$, also $\vartheta_2 = 0^0$.

Wenn der Augenpunkt in der Achse liegt, also in B, wird $\lambda = 0^0$ und

$$\cos e_2 = \frac{a \sin \gamma}{\sqrt{z^2 + 2az\cos\gamma + a^2}}.$$

Ist zugleich φ der Polwinkel bei B, so ist

$$z = \frac{a \sin\varphi}{\sin(\gamma - \varphi)} \quad \text{und} \quad \cot\varphi = \frac{a}{z\sin\gamma} + \cot\gamma.$$

Um die Örter der Brennlinien B_1 und B_2 zu finden, berechne man nacheinander z, e_2, N, x_0, x_1 und x_2. Man konstruiert B_1, indem man den Gegenpunkt von P (Fig. 2) zur Seite s sucht (ebener Spiegel); das Bild B_2 erhält man, indem man P mit V verbindet; der Schnittpunkt mit der Gesichtslinie ist der gesuchte (sphärische Spiegelung).

Wenn man der Kürze wegen an einem Modell ε und e_2, sowie die Dimensionen x_0 und ϱ_2 ermitteln kann, führt die Auflösung der quadratischen Gleichung (37) ebenfalls zur Bestimmung der beiden Bilddistanzen x_1 und x_2. Es ist dabei zu bemerken, daß in Beachtung der Richtung der Lichtbewegung in den Neumannschen Gleichungen x_0 negativ zu setzen ist.

Für unseren Spezialfall ergeben die Neumannschen Gleichungen noch folgende Werte der katoptrischen Konstanten für den Objektpunkt P.

$$\varrho_2 = N = 0{,}618, \quad x_1 = -x_0 = 23{,}2 \text{ cm}, \quad x_2 = 3{,}56 \text{ cm}, \quad \vartheta_2 = 43^0\,57'.$$

Aus dem Werte von ϑ_2 folgt, daß sich die Fokalebenen Σb_2 und $\Sigma_1 a_2$ um 44^0 gegen die Normalebene der Leitlinie gedreht haben.

Die Bewegungsgesetze der veränderlichen Masse.

Von Ferdinand Wittenbauer in Graz.

In gewissen Untersuchungen der technischen Mechanik ist es manchmal notwendig, die Masse des bewegten Punktes oder Körpers als veränderlich anzusehen. Man versteht darunter nicht immer eine wirkliche Änderung der Masse, sondern die Veränderung des Einflusses, den die Masse auf die Bewegung ausübt.

Fragen dieser Art müssen mit Vorsicht behandelt werden; die geläufigen Bewegungsgesetze, welchen durchwegs eine unveränderliche Masse zugrunde gelegt ist, gelten hier nur mit Einschränkungen und bedürfen einer Überprüfung.

Es ist vielleicht keine undankbare Aufgabe, die Bewegungs-

gesetze der veränderlichen Masse hier kurz zusammenzustellen und an einigen Beispielen zu erläutern; eine Reihe von Fehlern, die in Arbeiten von sehr bedeutenden Autoren zu finden sind, kennzeichnen die Schwierigkeit der Frage.

Die Veränderung der Masse eines bewegten Körpers kann auf zwei grundsätzlich verschiedene Arten erfolgen.

I. *Wirkliche* Zu- oder Abnahme der bewegten Masse;

II. *Gedachte* Veränderung der bewegten Masse.

Die erste Art, die u. a. beim Auf- und Abwickeln schwerer Ketten vorkommt, die zum Teil noch ruhen oder zum Teil wieder in Ruhe gelangt sind, wurde in der Literatur vielfach, aber oft fehlerhaft behandelt.

Die zweite Art kommt vor bei Maschinengetrieben, deren bewegte Masse nach einem ausgezeichneten Punkte der Maschine reduziert und eben durch diese Reduktion veränderlich, d. h. von der Stellung des Getriebes abhängig gemacht wird.

Diese beiden Arten weisen, so verschieden sie sind, gewisse Beziehungen auf, die den Einblick in diese eigentümlichen Bewegungsgesetze erleichtern.

I. Wirkliche Zu- und Abnahme der bewegten Masse.

1) Es sei M eine in Translation begriffene Masse, v ihre Geschwindigkeit, P die in der Bewegungsrichtung wirkende Kraft, dt das Zeitelement; dann ist nach dem Satze vom Antriebe

$$d(Mv) = P \cdot dt$$

Tritt nun im Zeitelemente dt eine kleine Masse dM mit der Geschwindigkeit v' hinzu, so ist die Änderung der Bewegungsgröße:

$$d(Mv) = Pdt + v' \cdot dM \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Diese Gleichung, welche den Vorgang in einfacher und durchsichtiger Weise erklärt, wurde von Routh in seiner „Dynamik der Systeme starrer Körper" (deutsche Ausgabe, Band I. Seite 273) gegeben.

Ist zufällig $v' = v$, dann geht Gleichung (1) über in

$$Mdv = P \cdot dt$$

d. h. es gilt das Bewegungsgesetz der unveränderlichen Masse

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{P}{M}$$

Ist hingegen v' nicht gleich v, so wird Gleichung (1)

$$Mdv + (v - v') \cdot dM = P \cdot dt$$

und die Beschleunigung

$$\gamma = \frac{P}{M} - (v - v') \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{dM}{dt}$$

oder

$$\gamma = \frac{P - (v - v')\, v \frac{dM}{ds}}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Hier muß also die Veränderung der Masse bereits berücksichtigt werden.

Zu demselben Resultate gelangt man auch mit Hilfe des Arbeitsprinzipes. Zu Beginn des Zeitelementes ist die Bewegungsenergie der Masse M: $\frac{1}{2} M v^2$, jene der hinzutretenden Masse: $\frac{1}{2} dM \cdot v'^2$; am Ende des Zeitelementes ist die Energie der vereinigten Massen: $\frac{1}{2}(M + dM)(v + dv)^2$. Berücksichtigt man, daß die Massen M und dM mit ungleichen Geschwindigkeiten v und v' zusammentreffen und ihre Bewegung mit gleicher Geschwindigkeit $v + dv$ fortsetzen, so erkennt man das Eintreten eines unelastischen Stoßes, dessen Energieverlust

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot dM}{M + dM}(v - v')^2 = \frac{1}{2} dM (v - v')^2$$

ist. Das Arbeits-Prinzip liefert also die Gleichung

$$\frac{1}{2}(M + dM)(v + dv)^2 - \frac{1}{2} M v^2 - \frac{1}{2} dM \cdot v'^2 + \frac{1}{2} dM (v - v')^2 = P \cdot ds \cdots (3)$$

woraus

$$d(Mv) = P \cdot dt + dM \cdot v'$$

also wieder Gleichung (1) folgt.

Es soll dies an einigen Beispielen erläutert werden.

2) Ein Wagen, mit Wasser oder Sand gefüllt, laufe auf horizontaler Straße; er verliere durch einen Schaden des Wagens gleichförmig seine Masse, so daß

$$M = M_0 - kt,$$

wenn M_0 die anfängliche Masse und k eine Konstante ist. Dann wird Gleichung (1)

$$d(Mv) = -cMg \cdot dt + v \cdot dM,$$

worin c die Konstante des Straßenwiderstandes ist und $v' = v$ gesetzt wurde, weil die abfließende Masse den Wagen in Richtung der Bewegung mit der Geschwindigkeit des Wagens verläßt.

Es bleibt also

$$dv = -cg\,dt$$

oder

$$\gamma = -cg$$

wie bei konstanter Masse. Das Abfließen der Masse hat also keinen Einfluß auf die Bewegung des Wagens.

3) Derselbe Wagen erhalte während seiner Bewegung den gleichförmigen Zufluß von Masse aus einem in Ruhe befindlichen Rohre. Dann ist

$$M = M_0 + kt.$$

Findet der Zufluß vertikal statt, so ist in Richtung der Bewegung $v' = 0$ und Gleichung (1) wird

$$d(Mv) = -eMg \cdot dt.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$v = \frac{M_0}{M} v_0 - \frac{cg}{2}\left(1 + \frac{M_0}{M}\right) \cdot t$$

sowie

$$\gamma = -cg - \frac{k}{M^2}\left[M_0 v_0 - \frac{cg}{2}(M_0 + M)t\right].$$

Die Zeit, welche bis zum Stillstand des Wagens vergeht, ergibt sich mit

$$T = \frac{M_0}{k}\left[\sqrt{1 + \frac{2kv_0}{cgM_0}} - 1\right],$$

während sie ohne Vermehrung der Masse, also für $k = 0$, den Wert hätt

$$T = \frac{v_0}{cg}.$$

4) Resal behandelt in seinem Traité de mécanique générale, T. I., p. 339 folgende Aufgabe:

An dem einen Ende eines Fadens, der über eine Rolle mit horizontaler Achse läuft (Fig. 1.), ist eine Masse M befestigt, an dem andern Ende eine ebenso schwere Kette, die zum Teile auf einer horizontalen Ebene aufgehäuft liegt; man ermittle das Gesetz der Bewegung.

Fig. 1.

Ist x die Länge des bereits emporgehobenen Kettenstückes, μ seine Masse für die Längeneinheit, so ist, wenn man von der Masse der Rolle absieht, nach Gleichung (1)

$$d[(M + \mu x)v] = (M - \mu x)g \cdot dt$$

weil die Geschwindigkeit v' der neu hinzukommenden Kettenglieder null ist. Diese Gleichung liefert also:

$$\mu v \frac{dx}{dt} + (M + \mu x)\frac{dv}{dt} = (M - \mu x) \cdot g.$$

Nennt man θ den Drehungswinkel der Rolle, so ist

$$\frac{dx}{dt} = v = r\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

und somit

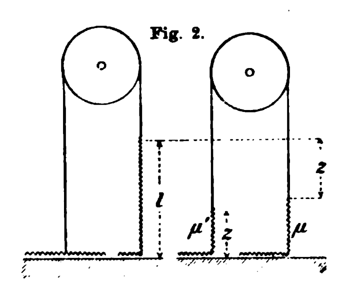
$$\mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + (M + \mu x) r \frac{d^2\theta}{dt^2} = (M - \mu x) \cdot g$$

die Differenzialgleichung der Bewegung.

Resal vergißt, die veränderliche Masse zu berücksichtigen; er unterdrückt dadurch das erste Glied der obigen Gleichung und findet bei Vernachlässigung der Rollen-Masse

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{(M - \mu x) g}{(M + \mu x) \cdot r}.$$

5) Herr Piarron de Mondesir beschäftigte sich in seiner Abhandlung: Sur la force (Mémoires de la société des ingénieurs civils 1887) mit der Veränderlichkeit der bewegten Masse. Er zeigt, daß sich das Gesetz der lebendigen Kraft auf veränderliche Massen ebenso anwenden läßt, wie auf konstante Massen, vergißt aber, die bei Veränderung der Masse auftretenden Stöße zu berücksichtigen und kommt ebenfalls zu unrichtigen Resultaten. Herr de Mondesir versucht folgendes Beispiel zu lösen:



Die höchsten Enden zweier homogenen Ketten, deren Massen μ und μ' für die Längeneinheit sind, werden durch einen undehnbaren, gewichtlosen Faden verbunden, der über eine Rolle läuft (Fig. 2). Zu Beginn der Bewegung ist die rechte Kette bis zur Höhe l aufgezogen, während die linke ganz auf einer horizontalen Ebene liegt; nach der Zeit t ist die rechte Kette um z gesunken, die linke hat sich um z gehoben. Man suche die Bewegungsgleichung der Kette ohne Rücksicht auf die Masse der Rolle und die Widerstände.

Benützt man wieder die Gleichung (1) und setzt die ganze bewegte Masse

$$M = z\mu' + (l - z)\mu,$$

die bewegende Kraft

$$P = (l - z) g\mu - z g\mu'$$

und beachtet, daß die im Zeitelement hinzukommende Bewegungsgröße

$$\mu' v' \cdot dz - \mu v \cdot dz$$

und überdies $v' = o$ ist, so wird die Gleichung (1)

$$d\{[z\mu' + (l - z)\mu] v\} = [(l - z)\mu - z\mu'] g dt - \mu v dz$$

oder

$$v^2 \mu' dz + v dv [\mu l + (\mu' - \mu) z] = g[\mu l - (\mu' + \mu) z] dz \cdots \quad (4)$$

Geht man hingegen vom Arbeitsprinzipe aus, so müßte gesetzt werden:

Bewegungs-Energie der Kette + Energieverlust durch Stoß (links und rechts) = Geleistete Arbeit

oder

$$\frac{1}{2}[z\mu' + (l-z)\mu]v^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^z (dz \cdot v^2) + \frac{\mu'}{2}\int_0^z (dz \cdot v^2) = -\frac{1}{2}\mu' g z^2 + \\ + \mu g z\left(l - \frac{z}{2}\right) \cdots \tag{5}$$

Differenziert man diese Gleichung, so erhält man Gleichung (4) wieder.

Die Integration der Bewegungsgleichung (4) liefert für die Geschwindigkeit den Ausdruck

$$v^2 = \frac{4g\mu l}{3\mu' - \mu}\left\{1 - \frac{z}{l}\,\frac{\mu' + \mu}{2\mu} - \left[\frac{\mu l}{z(\mu' - \mu) + \mu l}\right]^{\frac{2\mu'}{\mu' - \mu}}\right\}$$

Herr Piarron de Mondesir findet Gleichung (5), jedoch ohne die beiden Integrale; er hat also die auftretenden Energie-Verluste durch Stoß unberücksichtigt gelassen.

Er findet demgemäß

$$v^2 = \frac{[2\mu l - (\mu + \mu')z]gz}{\mu l + (\mu' - \mu)z}.$$

Haben beide Ketten gleichviel Masse in der Längeneinheit, d. h. ist $\mu' = \mu$, so wird Gleichung (4)

$$v^2 dz + l v dv = g(l - 2z) \cdot dz$$

und

$$v^2 = 2gl\left[1 - \frac{z}{l} - e^{-\frac{2z}{l}}\right],$$

während Herr Piarron de Mondesir in diesem Falle

$$v^2 = 2gz\left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

findet. Er bemerkt, daß dieses Resultat auch aus der Gleichung von Lagrange für konstante Masse entnommen werden könnte, weil die gesamte bewegte Masse jetzt unveränderlich gleich μl bleibt; dies ist richtig, allein es darf nicht vergessen werden, daß trotzdem auch jetzt noch wie früher rechts und links Energieverluste durch Stoß auftreten, welche das Resultat beeinflussen.

II. Gedachte Veränderung der Masse.

(Reduktion der Masse.)

6) Ist dm ein Massenteilchen des bewegten Körpers, u seine Geschwindigkeit, v die Geschwindigkeit eines bestimmten Punktes R des Körpers, so versteht man unter

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{v^2}\int u^2 \cdot dm \cdots \tag{6}$$

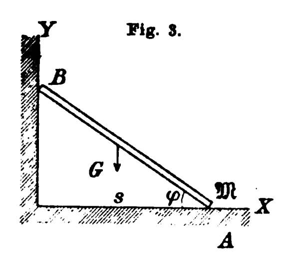
die nach R reduzierte Masse des Körpers und R selbst nennt man Reduktionspunkt.

Es ist ohne weiteres klar, daß die reduzierte Masse die gleiche Bewegungsenergie haben wird, wie die wirkliche Masse des Körpers; ebenso ist aber aus Gleichung (6) auch zu entnehmen, daß $\mathfrak{M}$ eine veränderliche Größe sein wird und als Funktion des von R zurückgelegten Weges s aufgefaßt werden darf.

Ist ferner P irgend eine auf den Körper wirkende Kraft, u die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes, so versteht man unter

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{v}\Sigma(Pu) \cdots \tag{7}$$

das nach dem Reduktionspunkt R reduzierte Kraftsystem des Körpers. Auch $\mathfrak{P}$ wird veränderlich sein und kann als Funktion von s aufgefaßt werden; man kann $\mathfrak{P}$ als Einzelkraft von veränderlicher Größe denken, die auf die veränderliche Masse $\mathfrak{M}$ des Punktes R einwirkt.



Wir wollen dies an einem Beispiele der ebenen Bewegung näher beleuchten.

Ein homogener schwerer Stab AB (Fig. 3) gleite aus der ruhenden Anfangslage $\varphi = \varphi_0$ an Wand und Boden abwärts. Wählt man das Fußende A des Stabes als Reduktionspunkt und nennt s seinen Weg, so ist die nach Gleichung (6) reduzierte Masse

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{3\sin^2\varphi} = \frac{Ml^2}{3(l^2 - s^2)}$$

worin M die wirkliche Masse des Stabes und l seine Länge ist. Ferner wird nach Gleichung (7) die nach A reduzierte Kraft

$$\mathfrak{P} = \frac{G}{2}\operatorname{cotg}\varphi = \frac{G}{2}\frac{s}{\sqrt{l^2 - s^2}},$$

wenn auf die Reibung keine Rücksicht genommen wird. Das Fußende A bewegt sich also genau so, als wenn es ein freier Punkt von der Masse $\frac{M}{3\sin^2\varphi}$ wäre, auf die die Kraft $\frac{G}{2}$ cotg φ wirken würde.

7) Dieser Ersatz der wirklichen Masse des Körpers und seines wirklichen Kraftsystems durch die reduzierte Masse $\mathfrak{M}$ eines Punktes und die reduzierte Kraft $\mathfrak{P}$ gestattet, die Bewegung eines Körpers auf die Bewegung eines Punktes mit veränderlicher Masse zurückzuführen. Dies erweist sich vorteilhaft in dem Falle, daß die geometrische Form der Bewegung vorgeschrieben ist, wie dies bei den zwangläufigen Maschinengetrieben zutrifft. Ich habe in meiner Abhandlung: „Graphische Dynamik der Getriebe" (diese Zeitschrift, Band 50) gezeigt, wie man die erwähnte Methode benützen kann, um die Bewegung des ebenen Maschinengetriebes mit Rücksicht auf Kräfte und Massenverteilung zu untersuchen, und habe auch versucht, die Überlegenheit dieser Methode gegenüber der rechnerischen Behandlung nachzuweisen, da sie gestattet, die wirkliche Massenverteilung des Getriebes vollständig und genau zu berücksichtigen, ohne irgend eine Vernachlässigung oder Vereinfachung nötig zu machen.

8) Um zu dem Bewegungsgesetze der reduzierten Masse zu gelangen, denken wir uns, der Weg s des Reduktionspunktes R habe um ds zugenommen; die veränderliche Masse $\mathfrak{M}$ nehme hiebei um $d\mathfrak{M}$ zu. Diese Zunahme an Masse erfolgt aber im Gegensatze zu I. ohne Stoß, da sie nur gedacht ist; sie erfolgt im Zeitelemente dt und durchläuft alle Werte der Geschwindigkeit von O bis v, liefert also einen Zuwachs an Bewegungsgröße von $\frac{1}{2}\,v \cdot d\mathfrak{M}$; die Änderung der Bewegungsgröße ist demnach

$$d(\mathfrak{M}v) = \mathfrak{P} \cdot dt + \tfrac{1}{2} v\, d\mathfrak{M} \cdots \tag{8}$$

woraus

$$\mathfrak{M} \cdot dv + \tfrac{1}{2} v\, d\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \cdot dt \tag{9}$$

oder

$$d(\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}v^2) = \mathfrak{P} \cdot ds$$

und

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{M}v^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_0 v_0^2 = \int \mathfrak{P} \cdot ds \cdots \tag{10}$$

folgt. Man entnimmt hieraus, daß das Arbeitsprinzip auch für Punkte mit gedachter veränderlicher Masse seine Geltung beibehält.

Zu demselben Resultate würde man mit Hilfe der Gleichung (3) gelangen, wenn man sie folgendermaßen anschreiben würde:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{M} + d\mathfrak{M})\,(v + dv)^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} \cdot v^2 = \mathfrak{P} \cdot ds$$

d. h. wenn man die Energieverluste durch Stoß in Gleichung (3) unterdrücken würde, da sie hier nicht vorkommen können.

Aus Gleichung (9) folgt überdies noch nach Division durch dt

$$\gamma = \frac{\mathfrak{P} - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\mathfrak{M}}{ds}}{\mathfrak{M}}, \ldots \tag{11}$$

eine Gleichung, die mit (2) übereinstimmt, wenn man dort $v' = \frac{v}{2}$ setzt.

9) Nennt man L die Bewegungsenergie des Getriebes, so kann Gleichung (10) geschrieben werden

$$L = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}v^2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_0 v_0^2 + \int \mathfrak{P} \cdot ds$$

oder auch

$$\mathfrak{P} = \frac{dL}{ds} \ldots \tag{12}$$

Ferner kann Gleichung (11) in der Form geschrieben werden

$$\gamma = \frac{d}{ds}\left(\frac{L}{\mathfrak{M}}\right),$$

oder, wenn man

$$\frac{L}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L}$$

die spezifische Energie der Masse nennt:

$$\gamma = \frac{d\mathfrak{L}}{ds} \ldots \tag{13}$$

Dies wäre eine Definition der Beschleunigung, welche die konstante Masse mit der veränderlichen Masse gemein hat, während die gebräuchliche Definition

$$\gamma = \frac{Kraft}{Masse}$$

für veränderliche Massen nicht anwendbar ist, wie Gleichung (11) lehrt.

10) Die Beziehungen zwischen Energie der Bewegung L, veränderlicher Masse $\mathfrak{M}$, Weg s, Kraft $\mathfrak{P}$, Geschwindigkeit v und Beschleunigung γ lassen sich sehr anschaulich durch ein räumliches Diagramm (Fig. 4) darstellen.

Der Zustand eines bewegten Getriebes sei für eine bestimmte Stelle s des Weges durch die Bewegungsenergie L und die reduzierte Masse $\mathfrak{M}$ des Getriebes gegeben. Betrachtet man s, L, $\mathfrak{M}$ als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes R, so schildert die Lage dieses Punktes den augenblicklichen Bewegungszustand des Getriebes. R_0 sei dessen Anfangszustand; die räumliche Kurve R_0R gibt den Verlauf der

Zustandsänderungen des Getriebes. Ihre Projektionen auf die drei Koordinatenebenen sind: das Energie-Weg-Diagramm, das Massen-Weg-Diagramm und das Energie-Massen-Diagramm.

Zieht man in dem Punkte P des ersten dieser Diagramme die Tangente, so ist die Neigung α derselben gegen die s-Achse nach Gleichung (12)

$$tg\,\alpha = \frac{dL}{ds} = \mathfrak{P}$$

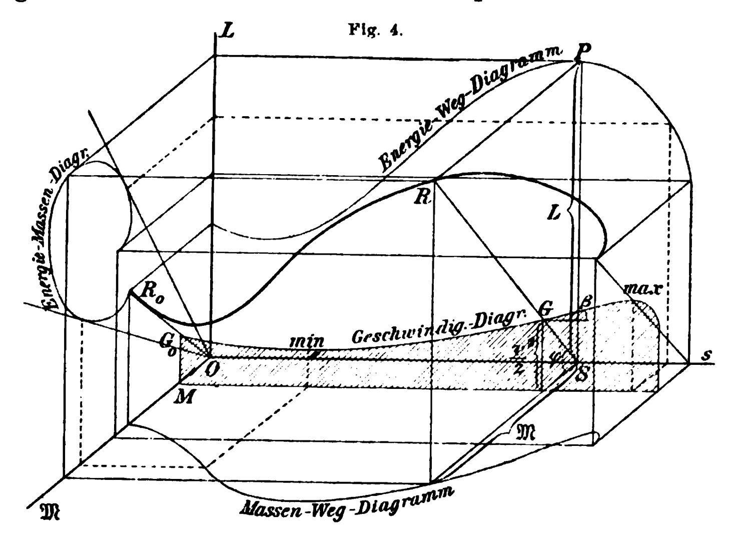
ein Maß für die reduzierte Kraft des Getriebes.

Verbindet man die Punkte R und S, so gibt die Neigung φ dieser Geraden gegen die $\mathfrak{M}s$-Ebene in

$$tg\,\varphi = \frac{L}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L}$$

ein Maß für die spezifische Energie der Masse. Legt man in der Entfernung OM = Masseneinheit eine Ebene parallel der Ls-Ebene, so

Fig. 4.



schneidet diese die Gerade RS in G; der Ort aller dieser Punkte ist das Diagramm $G_0 G$. Die Ordinaten dieses Diagramms sind wegen

$$\frac{L}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{L} = \frac{v^2}{2}$$

die spezifischen Energien oder die halben Geschwindigkeitsquadrate; das Diagramm kann also als eine Art Geschwindigkeitsdiagramm aufgefaßt werden.

Die Neigung β der in G gezogenen Tangente dieses Diagramms gegen die $\mathfrak{M}s$-Ebene ist nach Gleichung (13)

$$tg\,\beta = \frac{d\mathfrak{L}}{ds} = \gamma$$

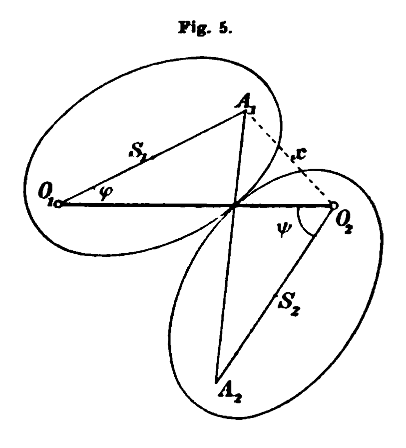
ein Maß für die Beschleunigung der Bewegung.

Zieht man an das Energie-Massen-Diagramm von O aus die Tangenten, so findet man jene Zustände des Getriebes, in denen die kleinsten oder größten Geschwindigkeiten bestehen. Die Stellen v_{min} und v_{max} sind im Geschwindigkeitsdiagramm angedeutet worden. Diese Eigenschaft des Energie-Massen-Diagramms habe ich benützt, um eine neue Art von graphischer Bestimmung des Schwungradgewichtes anzugeben (Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1905).

Gewöhnlich wird man mit den beiden anderen Diagrammen sein Auslangen finden. Man klappt sie dann, wie es in der darstellenden Geometrie üblich ist, in eine Ebene und arbeitet mit diesen beiden Projektionen der Zustandskurve $R_0 R$. Dies soll an einem der Getriebelehre entnommenen Beispiele noch näher erläutert werden.

11) Die zwangläufigen Getriebe, die im Maschinenbau Verwendung finden, durchlaufen immer wieder dieselbe Stellung. Darin ist es begründet, daß die veränderliche Masse $\mathfrak{M}$ immer eine periodische Funktion ist.

Fig. 5.



Als Beispiel soll ein Paar kongruenter elliptischer Räder behandelt werden, die sich um ihre festliegenden Brennpunkte $O_1\,O_2$ drehen (Fig. 5). Wir wollen den beweglichen Brennpunkt A_1 des linken Rades als Reduktionspunkt wählen und die Masse M des rechten Rades dahin reduzieren. Bezeichnen wir

$$O_1 O_2 = A_1 A_2 = 2a,$$
$$O_1 A_1 = O_2 A_2 = 2e$$

und mit Mk^2 das Trägheitsmoment des Rades um seinen Brennpunkt, so ist

$$\mathfrak{m} = M\left(\frac{k}{2e}\right)^2$$

die nach A_2 reduzierte Masse des rechten Rades. Die weitere Reduktion von $\mathfrak{m}$ nach A_1 verlangt die Gleichung

$$\mathfrak{M}_2\left(2e\,\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \mathfrak{m}\cdot\left(2e\cdot\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

oder

$$\mathfrak{M}_2 = M\cdot\frac{k^2}{4e^2}\cdot\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2.$$

Die weitere Rechnung lehrt, daß

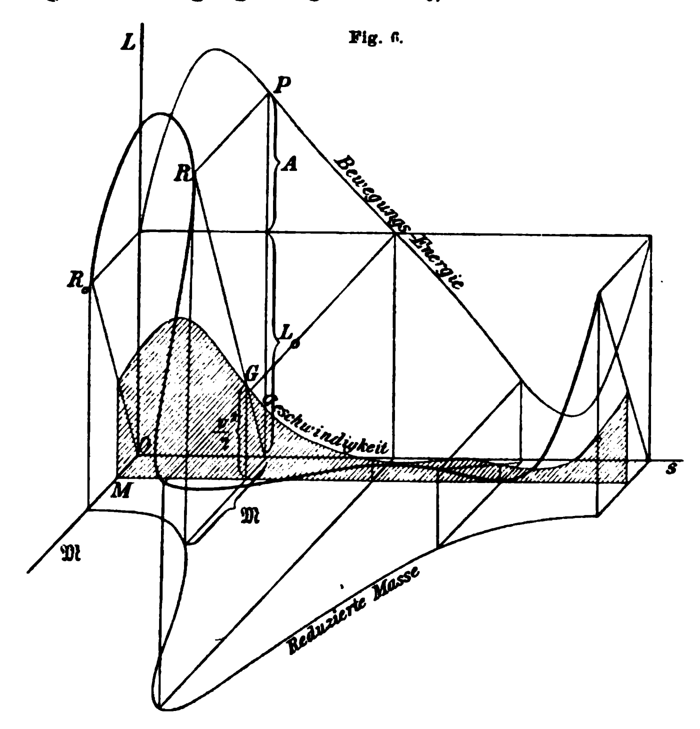
$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{4b^2}{x^2}$$

worin b die kleine Halbachse der Ellipse und x die veränderliche Entfernung $A_1 O_2$ ist; es wird also

$$\mathfrak{M}_2 = M \cdot \frac{4k^2b^2}{e^2} \cdot \frac{1}{x^4},$$

worin x periodisch zwischen den Werten $2(a-e)$ und $2(a+e)$ schwankt.

Nehmen wir an, die Anfangslage des Radpaares sei $\varphi = 0$, $\psi = 180^0$, die anfängliche Bewegungsenergie sei L_0, und die Räder wären sich



nun selbst überlassen. Sieht man von allen Widerständen ab, so ist die Arbeit, welche von den beiden gleichen Gewichten der Räder geleistet wird:

$$A = Mge \sin\varphi \left(\frac{4b^2}{x^2} - 1\right),$$

ebenfalls eine periodische Funktion.

Für das vorliegende Getriebe ist also

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2,$$

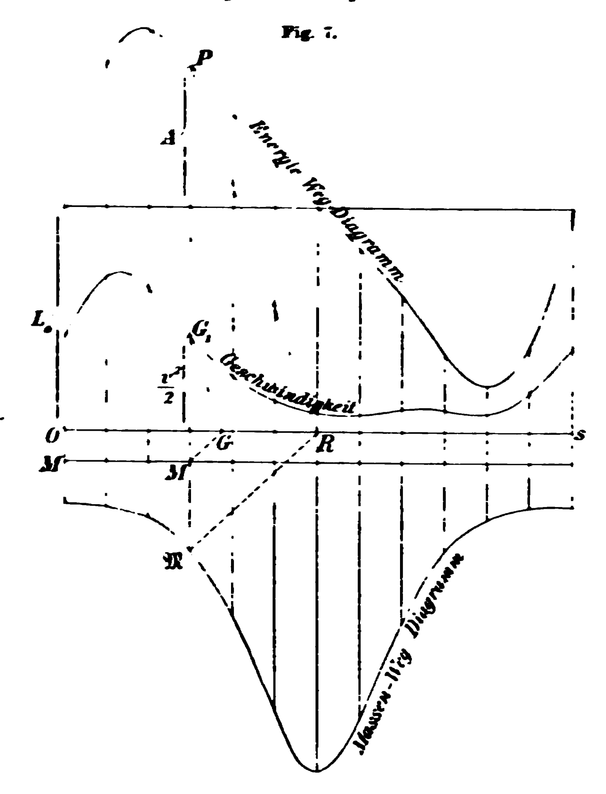
und weil $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{m}_2$ ist:

$$\mathfrak{M} = M \cdot \frac{k^2}{4e^2}\left[1 + 16\frac{b^4}{x^4}\right],$$

ferner

$$L = L_0 + A = L_0 + Mge \sin\varphi \left(\frac{4b^2}{x^2} - 1\right).$$

Fig. 6 zeigt die Diagramme Ls und $\mathfrak{M}s$. Der Kreisweg $s = 2e\varphi$ des Reduktionspunktes A_1 wurde auf der s-Achse abgewälzt und die zugehörigen Werte von L und $\mathfrak{M}$ wurden aufgetragen. Aus der räumlichen Zustandskurve $R_0 R$ des Getriebes wurde wie in Fig. 4 die Geschwindigkeitskurve $\frac{v^2}{2}$ konstruiert.



In Fig. 7 ist die Umklappung der beiden Diagramme in die Bildebene dargestellt. Um hier aus den beiden Ls- und $\mathfrak{M}s$-Diagrammen die Geschwindigkeitslinie $\frac{v^2}{2}$ zu finden, genügt es, den Punkt R irgendwo, z. B. auf der s-Achse anzunehmen, ihn mit $\mathfrak{M}$ und P zu verbinden und den Linienzug MGG_1 hierzu parallel zu ziehen; dann ist G_1 ein Punkt des gewünschten Geschwindigkeitsdiagrammes.

12) Die Ermittlung der reduzierten Masse eines Getriebes gibt manchmal auch die Mittel in die Hand, über die Massenverteilung im Getriebe derart zu verfügen, daß die Masse ihren Einfluß auf die Bewegung nicht verändert.

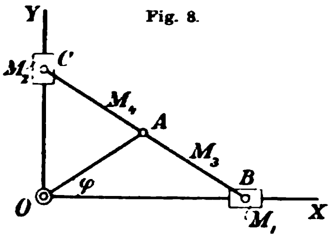


Fig. 8 zeigt z. B. die gekoppelte gleichschenklige Schubkurbel. Um O rotiert die Kurbel OA, während die Endpunkte der Stange BAC, die in ihrer Mitte A drehbar mit der Kurbel verbunden ist, auf einem rechtwinkligen Achsenkreuze schleifen. Es ist

$$OA = AB = AC.$$

Wählt man die Kurbelwarze A als Reduktionspunkt und nennt M_1 die in der X-Richtung geführte Masse des Schiebers, so liefert die nach Gleichung (6) vorgenommene Reduktion der Masse

$$\mathfrak{M}_1 = 4 M_1 \sin^2 \varphi$$

Ebenso gibt die Reduktion der Masse M_2 des anderen Schiebers nach A

$$\mathfrak{M}_2 = 4 M_2 \cos^2 \varphi.$$

Nennt man ferner M_3 die gleichförmig verteilte Masse der Stange AB und reduziert sie nach A, so gibt Gleichung (6)

$$\mathfrak{M}_3 = M_3 \left(\tfrac{1}{3} + 2 \sin^2 \varphi\right)$$

und ebenso die Masse M_4 des Stabes AC

$$\mathfrak{M}_4 = M_4 \left(\tfrac{1}{3} + 2 \cos^2 \varphi\right).$$

Die gesamte veränderliche Masse des Getriebes ist demnach

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 \\ &= \tfrac{1}{3}(M_3 + M_4) + \sin^2 \varphi\,(4 M_1 + 2 M_3) + \cos^2 \varphi\,(4 M_2 + 2 M_4). \end{aligned}$$

Die Bedingung für unveränderlichen Einfluß der Masse auf die Bewegung wird also

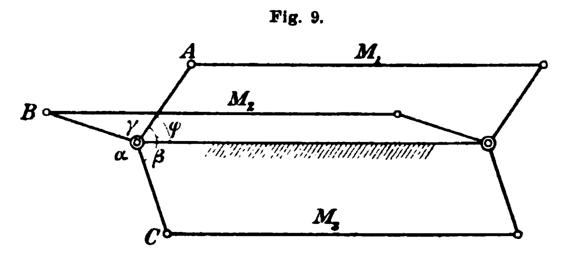
$$2 M_1 + M_3 = 2 M_2 + M_4,$$

und in diesem Falle wird die reduzierte Masse

$$\mathfrak{M} = 2(M_1 + M_2) + \tfrac{4}{3}(M_3 + M_4).$$

13) Bei dem in Fig. 9 dargestellten dreifach gekoppelten Parallelkurbelgetriebe haben die sechs Kurbeln unveränderlichen Einfluß auf die Bewegung. Reduzieren wir jedoch die Massen $M_1\, M_2\, M_3$ der drei horizontal hin- und hergehenden Koppelstangen nach A, so wird mit Benutzung von Gleichung (6) die reduzierte Masse eine periodische Funktion

Fig. 9.



$$\mathfrak{M} = M_1 \sin^2 \varphi + M_2 \sin^2(\varphi + \gamma) + M_3 \sin^2(\varphi + \gamma + \alpha),$$

wenn φ den veränderlichen Kurbelwinkel von OA, $\alpha\beta\gamma$ die konstanten Winkel zwischen den drei Kurbeln bezeichnen.

Obigem Ausdruck kann die Form gegeben werden

$$\mathfrak{M} = M_2 \sin^2\gamma + M_3 \sin^2\beta$$
$$+ \sin^2\varphi\,(M_1 + M_2 \cos 2\gamma + M_3 \cos 2\beta)$$
$$+ \sin\varphi \cos\varphi\,(M_2 \sin 2\gamma - M_3 \sin 2\beta).$$

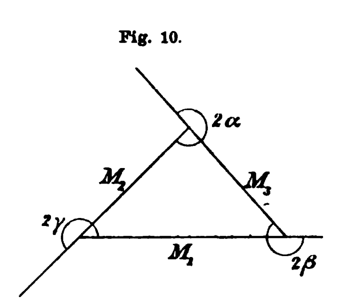
Soll nun z. B. der Einfluß der drei Stangenmassen auf die Bewegung des Getriebes unveränderlich bleiben, so muß $\mathfrak{M}$ konstant, also von φ unabhängig sein. Dies erfordert die Bedingungen

$$M_2 \cos 2\gamma + M_3 \cos 2\beta = - M_1$$
$$M_2 \sin 2\gamma - M_3 \sin 2\beta = 0$$

oder

$$M_2 \cos(2\gamma - 180^0) + M_3 \cos(2\beta - 180^0) = M_1$$
$$M_2 \sin(2\gamma - 180^0) - M_3 \sin(2\beta - 180^0) = 0,$$

Fig. 10.



woraus sich folgende Regel für die Wahl der Kurbelwinkel $\alpha\beta\gamma$ ergibt (Fig. 10):

Stellt man die gegebenen Stangenmassen $M_1 M_2 M_3$ durch Strecken dar und bildet aus ihnen ein Dreieck, so sind die doppelten Kurbelwinkel 2α, 2β, 2γ die um 180^0 vermehrten Dreieckswinkel.

Die konstante reduzierte Masse der drei Koppelstangen wird dann

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2 + M_3).$$

Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Hohl- und Vollkugel.

Von Ingenieur Alfons Vincenz Leon,
Assistent an der k. k. Techn. Hochschule in Wien.

I. Schon bei verhältnismäßig einfachen Aufgaben der Elastizitätstheorie kennt man die exakten Lösungen noch nicht, und man muß, um zur Kenntnis der Größe der elastischen Kräfte und Formänderungen zu gelangen, Näherungsverfahren benützen. Zu diesen Aufgaben gehört auch die Bestimmung des Spannungs- und Deformationszustandes einer um eine fixe Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden festen, elastischen und isotropen Hohl- und Vollkugel. Dennoch lassen sich die streng gültigen Lösungen dieser Aufgabe angeben.

Bei der Bestimmung des Gleichgewichts einer Kugelschale, in

welcher die Temperatur in besonderer Weise von zwei Variablen abhängt, hat J. Stefan einen eigenartigen Weg eingeschlagen. (Siehe Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Math. Naturw. Kl. 1881, März, S. 565.) Derselbe führt auch bei dem vorliegenden Problem zum Ziele, wenn man ihn der Aufgabe anpaßt.

Bedeuten K und Θ die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten, r, φ, ψ die Polarkoordinaten eines Punktes der Hohlkugel (die Äquatorebene als Basisebene angenommen), Δr die Verschiebung dieses Punktes in radialer Richtung, σ_r die in dieser Richtung herrschende Normalspannung, Δt die Verschiebung normal zum Radius in der Meridianebene, σ_t die tangentiale (meridionale) Normalspannung, Δp die Verschiebung im Parallelkreis, σ_p die entsprechende Spannung, so sind die Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen gegeben durch die Gleichungen (Siehe G. Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité):

$$\sigma_r = -2K\left[\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \Theta v\right] \tag{1}$$

$$\sigma_t = -2K\left[\frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta t)}{r\partial\varphi} + \Theta v\right] \tag{2}$$

$$\sigma_p = -2K\left[\frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta t \sin\varphi}{r\cos\varphi} + \Theta v\right], \tag{3}$$

wobei v die kubische Dilatation ist, und dargestellt wird durch den Ausdruck

$$v = \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta t)}{r\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{\Delta t}{r}, \tag{4}$$

weil Δp naturgemäß Null ist.

Die Schubspannungen in den Meridianebenen verschwinden ebenfalls; die noch übrig bleibende Schubspannung gehorcht der Gleichung

$$\tau = -K\left[\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\Delta t)}{\partial r} - \frac{\Delta t}{r}\right]. \tag{5}$$

Dabei sind die Druckkräfte positiv, die Zugkräfte negativ bezeichnet.

Bedeutet γ das spezifische Gewicht des Materials, aus dem der Körper besteht, g die Beschleunigung der Schwere und w die Winkelgeschwindigkeit, so hat die Fliehkraft pro Masseneinheit in radialer Richtung den Wert

$$f_r = \frac{\gamma w^2}{g} r\cos^2\varphi = \frac{\gamma w^2}{g} r(1 - \sin^2\varphi), \tag{6}$$

die Fliehkraft in der Richtung des Meridians ist gegeben durch

$$f_t = -\frac{\gamma w^2}{g} r\cos\varphi\sin\varphi. \tag{7}$$

Der Untersuchung liegt ein Volumelement von der Gestalt eines Kuppelgewölbesteins zugrunde. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial(\tau \cos\varphi)}{r \cos\varphi \, \partial\varphi} + \frac{2\sigma_r - \sigma_t - \sigma_p}{r} - f_r = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma_t \cos\varphi)}{r \, \partial\varphi} + \frac{3\tau\cos\varphi + \sigma_p \sin\varphi}{r\cos\varphi} + f_t = 0.$$

Daher erhält man, wenn man in den vorstehenden Gleichungen die Kräfte mit Hilfe der Gleichungen (1), (2), (3), (5), (6), (7) eliminiert:

$$(8)\qquad 2K(1+\Theta)r^2\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial r} + K\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} + \left(\frac{\gamma w^2}{g}r - \frac{\gamma w^2}{g}r\sin^2\varphi\right)r^2\cos\varphi = 0$$

$$(9)\qquad 2K(1+\Theta)\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi} - K\frac{\partial\beta}{\partial r} - \frac{\gamma w^2}{g}r^2\sin\varphi\cos^2\varphi = 0,$$

wobei

$$(10)\qquad \beta = \cos\varphi\left[\frac{\partial(\varDelta r)}{\partial\varphi} - r\frac{\partial(\varDelta t)}{\partial r} - \varDelta t\right].$$

Drückt man nun v durch eine neue Größe η aus, und zwar derart, daß

$$(11)\qquad v = \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[\eta - \frac{\gamma w^2}{2g}r^2 + \frac{\gamma w^2}{2g}r^2\sin^2\varphi\right],$$

so gehen die Gleichungen (8) und (9) in die folgenden über:

$$(12)\qquad r^2\cos\varphi\frac{\partial\eta}{\partial r} + K\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = 0$$

$$(13)\qquad \cos\varphi\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} - K\frac{\partial\beta}{\partial r} = 0,$$

welchen man durch die Funktionen

$$(14)\qquad \eta = L + M\sin^2\varphi$$

$$(15)\qquad \beta = N\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$$

genügen kann. L, M, N sind Funktionen von r und den Bedingungen unterworfen

$$(16)\qquad \begin{cases} r^2\dfrac{dL}{dr} + KN = 0 \\ r^2\dfrac{dM}{dr} - 3KN = 0 \\ 2M - K\dfrac{dN}{dr} = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (16) ergibt sich

$$(17)\qquad M = Ar^2 + \frac{B}{r^3}$$

$$(18)\qquad KN = \tfrac{2}{3}Ar^3 - \frac{B}{r^2}$$

$$(19)\qquad L = C - \tfrac{1}{3}Ar^2 - \frac{B}{3r^3}.$$

A, B, C sind konstante Größen.

Aus (17) und (19) folgt ferner

$$3L + M = 3C. \tag{20}$$

Die Verschiebungen seien ausgedrückt durch die Formeln

$$\Delta r = G + H \sin^2 \varphi \tag{21}$$

$$\Delta t = J \sin \varphi \cos \varphi \tag{22}$$

G, H, J sind Funktionen von r. Aus (4) und (10) ergibt sich

$$\beta = \cos^2 \varphi \sin \varphi \left[2H - r\frac{dJ}{dr} - J \right] \tag{23}$$

$$\nu = \frac{dG}{dr} + \frac{2G}{r} + \frac{J}{r} + \left[\frac{dH}{dr} + \frac{2H}{r} - \frac{3J}{r} \right] \sin^2 \varphi. \tag{24}$$

β ist aber schon durch die Gleichung (15) ausgedrückt. Ebenso ist ν gegeben, wenn man in der Gleichung (11) für η den Wert aus (15) einsetzt. Man erhält also zur Bestimmung der Funktionen G, H, J die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[rL - \frac{\gamma w^2}{2g} r^3 \right] &= r\frac{dG}{dr} + 2G + J \\ \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[rM + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3 \right] &= r\frac{dH}{dr} + 2H - 3J \\ N &= 2H - r\frac{dJ}{dr} - J. \end{aligned} \right. \tag{25}$$

Aus den vorstehenden Ausdrücken lassen sich die folgenden entwickeln:

$$H - J = \frac{E}{r^4} + \frac{1}{r^4}\int \left[\frac{1}{2K(1+\Theta)} \left(M + \frac{\gamma w^2}{2g} r^2 \right) + \frac{N}{r} \right] r^4 \, dr$$

$$2H + 3J = F \cdot r + r \cdot \int \left[\frac{1}{K(1+\Theta)} \left(M + \frac{\gamma w^2}{2g} r^2 \right) - \frac{3N}{r} \right] \frac{dr}{r}$$

$$3G + H = \frac{Cr}{2K(1+\Theta)} + \frac{D}{r^2} - \frac{1}{r^2}\int \frac{\gamma w^2 r^4}{2K(1+\Theta)g} dr.$$

D, E, F, sind konstante Größen.

Setzt man für M und N die Werte ein, so bekommt man:

$$H - J = \frac{E}{r^4} + \frac{7 + 4\Theta}{42K(1+\Theta)} Ar^3 + \frac{\gamma w^2 r^3}{28K(1+\Theta)g} r^3 - \frac{(1 + 2\Theta)B}{4K(1+\Theta)r^2} \tag{26}$$

$$2H + 3J = F \cdot r - \frac{1 + 2\Theta}{2K(1+\Theta)} Ar^3 + \frac{\gamma w^2 r^3}{4K(1+\Theta)g} - \frac{(4 + 3\Theta)B}{3K(1+\Theta)r^2} \tag{27}$$

$$3G + H = \frac{Cr}{2K(1+\Theta)} + \frac{D}{r^2} - \frac{\gamma w^2 r^3}{10K(1+\Theta)g}. \tag{28}$$

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, aus den Oberflächenbedingungen die sechs Konstanten A, B, C, D, E, F zu bestimmen. Gelingt dies, so bekommt man für die Formänderungen und Spannungen die richtigen, weil einzigen Lösungen, da das Problem eindeutig ist.

Wir nennen den Radius der inneren Begrenzungsfläche der Hohlkugel r_i, denjenigen der äußeren r_a. Wirken keine äußeren Kräfte auf den Körper ein, so muß $\sigma_r = \tau = 0$ werden, wenn r den Wert r_i oder r_a annimmt.

Demnach lauten die Oberflächenbedingungen:

$$\text{(I)} \qquad \left| \frac{dG}{dr} + \frac{\Theta}{2K(1+\Theta)} L - \frac{\Theta \gamma w^2}{4K(1+\Theta) g} r^2 = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

$$\text{(II)} \qquad \left| \frac{dH}{dr} + \frac{\Theta}{2K(1+\Theta)} M + \frac{\Theta \gamma w^2}{4K(1+\Theta) g} r^2 = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

$$\text{(III)} \qquad \left| 2H + r\frac{dJ}{dr} - J = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}.$$

Ersetzt man in den vorstehenden drei Doppelgleichungen G, H, J durch die aus (26), (27), (28) zu folgernden Werte, L, M durch die Werte aus (17), (19), so erhält man sechs Gleichungen, welche die Konstanten A, B, C, D, E, F linear enthalten, sodaß deren Bestimmung keine prinzipiellen Schwierigkeiten macht.

Diese Aufgabe kann jedoch erleichtert werden, wenn man aus den Gleichungen (I), (II), (III) gewisse neue Beziehungen ableitet: Multipliziert man die Gleichung (I) mit drei und addiert sie sodann zu (II), so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (20) und (28):

$$\text{(I')} \qquad \left| \frac{1+3\Theta}{2K(1+\Theta)} C - \frac{2D}{r^3} - \frac{(3+5\Theta)\gamma w^2}{10K(1+\Theta) g} r^2 = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}.$$

Diese Doppelgleichung enthält bloß C und D.

Führt man ferner in die Gleichungen (II) und (III) für $\frac{dH}{dr}$ und $r\frac{dJ}{dr}$ die Werte aus (25) und für M, bezw. N die Werte aus (17) und (18) ein, so bekommt man:

$$\left| 2H - 3J = \frac{1}{2K}\left[Ar^3 + \frac{B}{r^2} + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

$$\left| 2H - J = \frac{1}{2K}\left[\frac{2}{3}Ar^3 - \frac{B}{r^2}\right] \right|_{r=r_a}^{r=r_i},$$

woraus

$$\left| J = -\frac{1}{4K}\left[\frac{Ar^3}{3} + \frac{2B}{r^2} + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

$$\left| H = \frac{1}{8K}\left[Ar^3 - \frac{4B}{r^2} - \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

Bildet man nun die Wertverbindungen $H - J$ und $2H + 3J$, so wird

$$\left| H - J = \frac{1}{8K}\left[\frac{4}{3}Ar^3 + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

$$\left| 2H + 3J = -\frac{1}{2K}\left[\frac{5B}{r^2} + \frac{\gamma w^2}{2g} r^3\right] \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

Mit Berücksichtigung von (26) und (27) erhält man endlich

$$\text{(II')} \quad \left| \frac{E}{r^4} - \frac{\Theta}{14K(1+\Theta)} A r^3 - \frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{112K(1+\Theta)g} r^3 - \frac{(1+2\Theta)B}{4K(1+\Theta)r^2} = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

$$\text{(III')} \quad \left| F \cdot r - \frac{1+2\Theta}{2K(1+\Theta)} A r^3 + \frac{(3+2\Theta)\gamma w^2}{4K(1+\Theta)g} r^3 + \frac{(7+9\Theta)B}{6K(1+\Theta)r^2} = 0 \right|_{r=r_a}^{r=r_i}$$

Aus der Doppelgleichung (II') läßt sich E, aus (III') F eliminieren, sodaß zwei in A und B lineare Gleichungen übrig bleiben. Hat man aber die Werte für A und B, so geben (II') und (III') die Konstanten E und F. C und D sind durch (I') für sich bestimmt.

II. Größere Wichtigkeit kommt zweien Sonderfällen zu, bei denen sich die Entwicklung vereinfacht: dem Falle einer sehr dünnen Kugelschale und dem Falle einer Vollkugel. Wir wollen zunächst auf den letzteren genauer eingehen. Der Radius der Kugeloberfläche sei mit R, welches an Stelle von r_a tritt, bezeichnet. r_i nimmt den Wert Null an.

Es ist ohne weiteres klar, daß

$$(29) \qquad D = 0, \quad E = 0, \quad B = 0$$

wird.

Für die Bestimmung der noch fehlenden Konstanten bringen die Gleichungen (I'), (II'), (III') keinen wesentlichen Vorteil, sodaß wir von deren Benützung absehen. Die Ausdrücke in (26), (27), (28) gehen in die folgenden über:

$$(30) \qquad H - J = \frac{1}{14K(1+\Theta)}\left[\frac{7+4\Theta}{3} A + \frac{\gamma w^2}{2g}\right] r^3$$

$$(31) \qquad 2H + 3J = F \cdot r - \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[(1+2\Theta)A - \frac{\gamma w^2}{2g}\right] r^3$$

$$(32) \qquad 3G + H = \frac{1}{2K(1+\Theta)}\left[C - \frac{\gamma w^2}{5g} r^2\right] r.$$

Löst man diese Gleichungen nach G, H, J auf, so bekommt man:

$$(33) \qquad G = \frac{1}{3}\left[-\frac{F}{5} + \frac{C}{2K(1+\Theta)}\right] r + \frac{1}{21K(1+\Theta)}\left[\Theta A - \frac{6\gamma w^2}{5g}\right] r^3$$

$$(34) \qquad H = \frac{F}{5} r - \frac{1}{14K(1+\Theta)}\left[2\Theta A - \frac{\gamma w^2}{g}\right] r^3$$

$$(35) \qquad J = \frac{F}{5} r - \frac{1}{14K(1+\Theta)}\left[\frac{7+10\Theta}{3} A - \frac{\gamma w^2}{2g}\right] r^3.$$

Es lassen sich daher aus den Gleichungen (I), (II), (III) mit Hilfe von (17), (18), (19) für die Konstanten folgende Bedingungsgleichungen angeben:

$$(36) \qquad \begin{cases} -\dfrac{F}{15} + \dfrac{1+3\Theta}{6K(1+\Theta)} C - \dfrac{\Theta R^2}{42K(1+\Theta)} A - \dfrac{(24+35\Theta)\gamma w^2 R^2}{140K(1+\Theta)g} = 0 \\[2ex] \dfrac{F}{5} + \dfrac{\Theta R^2}{14K(1+\Theta)} A + \dfrac{(6+7\Theta)\gamma w^2 R^2}{28K(1+\Theta)g} = 0 \\[2ex] \dfrac{2F}{5} - \dfrac{(7+16\Theta)R^2}{21K(1+\Theta)} A + \dfrac{3\gamma w^2 R^2}{14K(1+\Theta)g} = 0. \end{cases}$$

Man erhält also

$$A = -\frac{3(3+7\Theta)\gamma w^2}{2(7+19\Theta)g} \tag{37}$$

$$F = -\frac{5(3+8\Theta)\gamma w^2 R^2}{2(7+19\Theta)Kg} \tag{38}$$

$$C = \frac{(3+5\Theta)\gamma w^2 R^2}{5(1+3\Theta)g}. \tag{39}$$

Die Gleichungen (33), (34), (35) schreiben sich daher in folgender Weise:

$$G = \frac{\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)Kg}\left[\frac{2(3+16\Theta+25\Theta^2+10\Theta^3)R^2}{1+3\Theta} - \frac{4+13\Theta+5\Theta^2}{2}r^2\right]r \tag{40}$$

$$H = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (1+3\Theta)r^2\right]r \tag{41}$$

$$J = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (2+5\Theta)r^2\right]r. \tag{42}$$

Somit lauten die streng gültigen Formeln für die Verschiebungen eines Punktes einer rotierenden Kugel:

$$\Delta r = \frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg}\left\{\frac{1}{5(1+\Theta)}\left[\frac{2(3+16\Theta+25\Theta^2+10\Theta^3)R^2}{1+3\Theta} - \frac{4+13\Theta+5\Theta^2}{2}r^2\right]\right.$$
$$\left. + \left[-\frac{(3+8\Theta)R^2}{2} + \frac{1+3\Theta}{2}r^2\right]\sin^2\varphi\right\}r \tag{43}$$

$$\Delta t = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (2+5\Theta)r^2\right]r\sin\varphi\cos\varphi. \tag{44}$$

Durch partielle Differentiation ergeben sich daher die folgenden, für die Aufstellung der Spannungsformeln wichtigen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} = \frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg}\left\{\frac{1}{5(1+\Theta)}\left[\frac{2(3+16\Theta+25\Theta^2+10\Theta^3)R^2}{1+3\Theta} - \frac{3(4+13\Theta+5\Theta^2)}{2}r^2\right]\right.$$
$$\left. + \left[-(3+8\Theta)R^2 + 3(1+3\Theta)r^2\right]\frac{\sin^2\varphi}{2}\right\}$$

$$\frac{\partial(\Delta r)}{\partial\varphi} = \frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (1+3\Theta)r^2\right]r\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\partial(\Delta t)}{\partial r} = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + 3(2+5\Theta)r^2\right]\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\partial(\Delta t)}{\partial\varphi} = \frac{\gamma w^2}{2(7+19\Theta)Kg}\left[-(3+8\Theta)R^2 + (2+5\Theta)r^2\right](1-2\sin^2\varphi)r.$$

Da wir die Werte der Konstanten kennen, lassen sich die Hilfsfunktionen L, M, N, somit auch η, β und ν angeben:

$$M = -\frac{3(3+7\Theta)\gamma w^2}{2(7+19\Theta)g}r^2$$

$$N = -\frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg}r^3$$

$$L = \frac{\gamma w^2}{g}\left[\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} + \frac{3+7\Theta}{2(7+19\Theta)}r^2\right]$$

$$\eta = \frac{\gamma w^2}{g}\left[\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} + \frac{3+7\Theta}{2(7+19\Theta)}(1-3\sin^2\varphi)r^2\right]$$

$$\beta = -\frac{(3+7\Theta)\gamma w^2}{(7+19\Theta)Kg} r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi$$

$$(45)\quad \nu = \frac{\gamma w^2}{2(1+\Theta)Kg}\left\{\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} - \frac{1}{7+19\Theta}\left[2(1+3\Theta)+(1+\Theta)\sin^2\varphi\right]r^2\right\}.$$

Schließlich können nach diesen Vorbereitungen die Formeln für die Spannungen in einfacher Weise entwickelt werden:

$$(46)\quad \sigma_r = -\frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)g}\left[\frac{12+49\Theta+45\Theta^2}{5(1+\Theta)} - (3+8\Theta)\sin^2\varphi\right](R^2-r^2)$$

$$(47)\quad \sigma_t = -\frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)g}\left[\frac{-3-6\Theta+5\Theta^2}{5(1+\Theta)}(R^2-2r^2) + (3+8\Theta)(R^2-r^2)\sin^2\varphi\right]$$

$$(48)\quad \sigma_p = -\frac{\gamma w^2}{(7+19\Theta)g}\left\{\frac{1}{5(1+\Theta)}\left[(12+49\Theta+45\Theta^2)R^2 - (4+23\Theta+35\Theta^2)r^2\right] - (1+3\Theta)r^2\sin^2\varphi\right\}$$

$$(49)\quad \tau = \frac{(3+8\Theta)\gamma w^2}{(7+19\Theta)g}(R-r^2)\sin\varphi\cos\varphi.$$

III. Man sieht aus vorstehenden Formeln, daß die elastischen Kräfte und Formänderungen proportional sind dem Faktor $\frac{\gamma w^2}{g}$; erstere sind unabhängig vom Schubmodul K.

Die radiale Spannung σ_r verschwindet einerseits, wenn $r = R$ ist, also an der Oberfläche, andererseits aber auch, wenn

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{12+49\Theta+45\Theta^2}{5(1+\Theta)(3+8\Theta)}},$$

und zwar für jedes r. Θ liegt zwischen $\frac{1}{2}$ und 1. Für diese Werte ist der Nenner des unter dem Wurzelzeichen stehenden Bruches größer als der Zähler. Es gibt daher im allgemeinen einen Kegel mit dem kleinen Öffnungswinkel $90 - \varphi$, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt und dessen Achse die Drehungsachse ist, längs dessen Mantel keine Normalspannungen in der Richtung der Erzeugenden vorhanden sind.

Für die Drehungsachse erhält man durch Einsetzen von $\varphi = 90^0$ folgende Formeln:

$$(50)\quad \begin{cases} \Delta r = \frac{\gamma w^2}{20(1+\Theta)(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}[-(3+36\Theta+105\Theta^2+80\Theta^3)R^2 \\ \quad + (1+7\Theta+10\Theta^2)(1+3\Theta)r^2]r \\ \Delta t = 0 \\ \nu = \frac{\gamma w^2}{2(1+\Theta)Kg}\left[\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} - \frac{3+7\Theta}{7+19\Theta}r^2\right] \\ \sigma_r = \frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}(R^2-r^2) \\ \sigma_t = \sigma_p = -\frac{\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}[(12+49\Theta+45\Theta^2)R^2 \\ \quad - (9+43\Theta+50\Theta^2)r^2] \\ \tau = 0. \end{cases}$$

Die durch vorstehende Formeln ausgedrückten Normalspannungen sind zugleich Hauptspannungen, da Schubkräfte fehlen; sie werden durch Parabeln dargestellt.

Die radiale Kontraktion Δr ist stets negativ; sie verschwindet im Kugelmittelpunkte und erreicht an der Oberfläche den numerisch größten Wert gleich $-\frac{(1+12\Theta+25\Theta^2)\gamma w^2 R^3}{10(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}$.

Die kubische Dilatation im Kugelmittelpunkte ist $\frac{(3+5\Theta)\gamma w^2 R^2}{10(1+\Theta)(1+3\Theta)Kg}$, an den Polen hingegen $\frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}$.

Die Normalspannung längs der Achse ist stets positiv, d. h. ein Druck; an der Oberfläche Null, wächst sie gegen den Kugelmittelpunkt bis zur Größe $\frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}$ an. Die Spannungen in einer Parallelkreisebene sind negativ, also Zugkräfte; für den Kugelmittelpunkt sind sie $-\frac{(12+49\Theta+45\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}$; gegen die Pole nehmen sie bis $-\frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}$ ab. Die Polspannungen sind also dem numerischen Werte nach gerade so groß, wie die Spannung im Kugelmittelpunkt längs der Drehungsachse.

In der Äquatorebene gelten folgende, durch Einsetzen von $\varphi = 0$ erhaltene Beziehungen:

$$(51)\quad \begin{cases} \Delta r = \frac{\gamma w^2}{20(1+\Theta)(1+3\Theta)(7+19\Theta)Kg}[4(3+16\Theta+25\Theta^2+10\Theta^3)R^2 \\ \qquad -(4+13\Theta+5\Theta^2)(1+3\Theta)r^2]r \\ \Delta t = 0 \\ v = \frac{\gamma w^2}{2(1+\Theta)Kg}\left[\frac{(3+5\Theta)R^2}{5(1+3\Theta)} - \frac{2(1+3\Theta)}{7+19\Theta}r^2\right] \\ \sigma_r = -\frac{(12+49\Theta+45\Theta^2)\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}(R^2-r^2) \\ \sigma_t = \frac{(3+6\Theta-5\Theta^2)\gamma' w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}(R^2-2r^2) \\ \sigma_p = -\frac{\gamma w^2}{5(1+\Theta)(7+19\Theta)g}[(12+49\Theta+45\Theta^2)R^2 \\ \qquad -(4+23\Theta+35\Theta^2)r^2] \\ \tau = 0. \end{cases}$$

σ_r, σ_t, σ_p sind Hauptspannungen. Die zur Äquatorebene normale Spannung verschwindet für $r = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot R$; gegen das Innere der Kugel ist es eine Druckkraft, gegen die Oberfläche ein Zug; die Druckspannung im Mittelpunkte ist gerade so groß, wie die Zugspannung an der Oberfläche.

Für $r = 0$ erhalten wir die uns schon bekannten, für den Kugelmittelpunkt gültigen Formeln; nur die Bezeichnung ist eine etwas

andere: es wird $\sigma_r = \sigma_p$ und nicht wie früher $\sigma_t = \sigma_p$, denn jetzt spielt die radiale Spannung die Rolle derjenigen, die wir früher als tangentiale bezeichneten.

Für den Äquator ist $r = R$ zu setzen. Man bekommt:

$$
(52) \quad \begin{cases}
\Delta r = \dfrac{(8 + 31\Theta + 25\Theta^2)\gamma w^2 R^3}{20(1 + 3\Theta)(7 + 19\Theta) Kg} \\
\Delta t = 0 \\
v = \dfrac{(11 + 32\Theta + 5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{10(1 + \Theta)(1 + 3\Theta)(7 + 19\Theta) Kg} \\
\sigma_r = 0 \\
\sigma_t = -\dfrac{(3 + 6\Theta - 5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1 + \Theta)(7 + 19\Theta) g} \\
\sigma_p = -\dfrac{2(4 + 13\Theta + 5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1 + \Theta))(7 + 19\Theta) g}.
\end{cases}
$$

Die Überhöhung des Äquators gegenüber der ursprünglichen Begrenzungsfläche des Körpers ist größer als die Abplattung der Pole. Der Unterschied zwischen einem Durchmesser des Äquatorkreises und der Drehungsachse beträgt während der Drehung $\frac{(2 + 5\Theta)\gamma w^2 R^3}{2(7 + 19\Theta) Kg}$. Die an Kugeln von verschiedenen Dimensionen und gleichen Stoffen durch Drehungen von gleicher Winkelgeschwindigkeit erzeugten Abplattungen verhalten sich wie die dritten Potenzen der Radien.

Die Spannungen im Äquator und in der darauf senkrechten Richtung sind negativ; die ersteren übertreffen weitaus die letzteren.

Schließlich sollen noch die für die Kugeloberfläche gültigen Formeln entwickelt werden. Durch Einsetzen von $r = R$ in die allgemeinen Beziehungen erhält man:

$$
(53) \quad \begin{cases}
\Delta r = \dfrac{\gamma w^2}{20(1 + 3\Theta)(7 + 19\Theta) Kg}[(8 + 31\Theta + 25\Theta^2) \\
\qquad - 5(1 + 3\Theta)(2 + 5\Theta)\sin^2\varphi] R^3 \\
\Delta t = -\dfrac{(1 + 3\Theta)\gamma w^2 R}{4(7 + 19\Theta) Kg}\sin 2\varphi \\
v = \dfrac{\gamma w^2 R^2}{10(1 + \Theta)(1 + 3\Theta)(7 + 19\Theta) Kg}[(11 + 32\Theta + 5\Theta^2) \\
\qquad - 5(1 + \Theta)(1 + 3\Theta)\sin^2\varphi] \\
\sigma_r = 0 \\
\sigma_t = -\dfrac{(3 + 6\Theta - 5\Theta^2)\gamma w^2 R^2}{5(1 + \Theta)(7 + 19\Theta) g} \\
\sigma_p = -\dfrac{\gamma w^2 R^2}{5(1 + \Theta)(7 + 19\Theta g}[2(4 + 13\Theta + 5\Theta^2) \\
\qquad - 5(1 + \Theta)(1 + 3\Theta)\sin^2\varphi] \\
\tau = 0.
\end{cases}
$$

Somit gelten an der Oberfläche folgende Regeln:

Die radiale Dilatation ist Null, wenn $\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{5+13\Theta-25\Theta^2}{5(1-3\Theta)(2-5\Theta)}}$ und in höheren Breiten ist sie negativ, in geringeren positiv. Dieser Winkel bestimmt die Lage der Durchschnittslinien der Oberflächen des Körpers vor und nach der Drehung. Die Verschiebung gegen die Pole ist für komplementäre Winkel gleich und proportional dem Faktor $\frac{7\omega^2 R}{Kg}$. Sie erreicht daher bei $\varphi = 45$ den größten Wert gleich $-\frac{1+3\Theta}{4(7-19\Theta)}\frac{7\omega^2 R}{Kg}$.

Die kubische Dilatation nimmt mit wachsender Breite ab.

Die Richtungen der Hauptspannungen sind die Tangenten an Meridian und Parallelkreis.

Die Normalspannung im Meridian ist an der ganzen Oberfläche konstant und zwar ein Zug; die Spannung in der Richtung des Parallelkreises hingegen ist abhängig von der geographischen Breite und wechselt bei $\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{2(4+13\Theta+5\Theta^2)}{5(1+\Theta)(1+3\Theta)}}$ das Zeichen. In geringeren Breiten besteht eine Zugspannung, in höheren eine Druckspannung.

IV. Liegt eine Hohlkugel vor, deren Dicke gegen Null abnimmt, so nähern sich, wie man aus den Doppelgleichungen (I′), (II′), (III′) entnehmen kann, die Konstanten D, E, B der Null; somit erhalten die übrigen Konstanten die für die Vollkugel ermittelten Werte, wobei R nun den Radius der dünnen Kugelschale bezeichnet. Daraus folgt der Satz: *eine dünne kugelförmige elastische Schale gelangt in denselben Spannungs- und Deformationszustand, wie die Oberfläche einer Kugel vom gleichen Material und Radius, wenn beide Körper mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotieren.*

Spannungen und Formänderungen eines Hohlzylinders und einer Hohlkugel, die von innen erwärmt werden, unter der Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes.

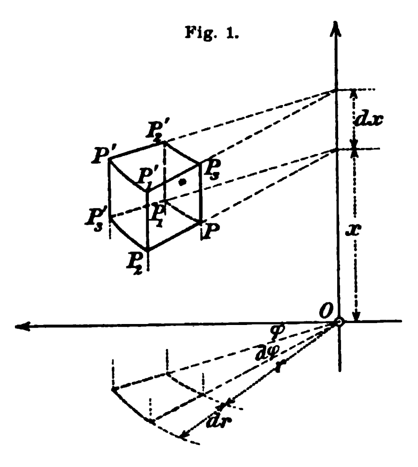
Von Ingenieur Alfons Vincenz Leon,
Assistent an der Techn. Hochschule in Wien.

I. Will man die Größe der Spannungen abschätzen, welche in Rohrleitungen für heiße Gase und Flüssigkeiten, in Geschütz- und Gewehrläufen, in Schornsteinen und modernen Hochöfen deshalb auftreten, weil die Temperatur in den einzelnen Punkten dieser Körper verschieden ist, so drängt sich die Frage auf: welchen Gesetzen gehorchen

die Spannungen und Formänderungen in einem zylindrischen Rohre, das von innen erwärmt wird? Führt man als Temperaturgesetz die Reihe ein, welche Fourier für die konzentrische Verteilung der Temperatur in einem Hohlzylinder angegeben hat, oder auch nur deren erste Glieder, so kommt man zu verwickelten, für Zwecke der Praxis wenig brauchbaren Formeln. Näherungsweise kann man stets annehmen, daß die Temperatur mit zunehmendem Radius gleichmäßig abnehme.

Jedes Element im Innern des Hohlzylinders wird sich deformieren. Dies rührt von Kräften her, welche auf die Oberfläche des Elements von den umliegenden Molekülen geäußert werden. Es ist ohne weiteres klar, daß das zylindrische Rohr nach der Formänderung ein Drehungskörper sein wird. Daher eignet sich zur Untersuchung ein halbpolares Koordinatensystem am besten. Es kommen drei Richtungen, die axiale, tangentiale und radiale in Betracht; sie seien mit den Buchstaben a, t und r bezeichnet. Es kann sich ein Punkt nur in radialer und axialer Richtung verschieben, und zwar müssen die Verrückungen aller in demselben Parallelkreise liegenden Punkte gleich groß sein. $PP_1'P_2P_3$ (Fig. 1) bleiben daher in derselben Meridianebene. Es stehen also auch nach der Formänderung die beiden durch PP_1 gehenden Seitenflächen des Volumelementes auf der Seitenfläche P_2P_3 senkrecht. Daher können in den drei in P zusammenstoßenden Seitenflächen keine Schubspannungen normal zu PP_2 und PP_3 bestehen. Solche gibt es also nur in den beiden durch PP_1 gehenden Ebenen. Nach dem Satze vom paarweisen Auftreten der Schubspannungen (Momentensatz) müssen die beiden in Betracht kommenden schiebenden Spannungen einander gleich sein; sie seien mit τ bezeichnet. Ferner müssen die Summen der Komponenten der auf das Volumelement wirkenden elastischen Kräfte in den drei Achsenrichtungen Null sein, woraus man folgende Beziehungen erhält:

Fig. 1.



$$\frac{\partial(r\cdot\sigma_r)}{r\partial r}-\frac{\sigma_t}{r}+\frac{\partial\tau}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\sigma_a}{\partial x}+\frac{\partial(r\cdot\tau)}{r\partial r}=0. \tag{2}$$

(Siehe z. B. Winkler: Über die Festigkeit der Röhren ... Civiling. 1860, S. 336.)

Es bedeuten σ_x, σ_t, σ_r die axiale bezw. die tangentiale und radiale Spannung. Die relativen Längenänderungen der drei Kanten PP_1, PP_2 und PP_3 sind $\frac{\Delta r}{r}$, $\frac{\partial \Delta r}{\partial r}$, $\frac{\partial \Delta x}{\partial x}$, wenn Δr und Δx die Verrückungen des Punktes P in der radialen und axialen Richtung bedeuten, und für diese gelten nach dem Superpositionsgesetze offenbar folgende Gleichungen, da die vorhandenen Schubkräfte keine Längenänderungen der Kanten, sondern nur ein Schiefstellen derselben bewirken:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_x)\right],$$

$$\frac{\partial \Delta r}{\partial r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_t)\right],$$

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial x} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_t + \sigma_r)\right].$$

E ist der Elastizitätsmodul, m die sogenannte Poissonsche Konstante. Die Druckkräfte sind positiv bezeichnet.

Um auch τ durch die Verrückungen des Punktes P auszudrücken, muß man die Änderung des Winkels P_2PP_3 suchen. Ist nämlich K der Schubmodul und γ die Winkeländerung, so ist

$$\tau = -K \cdot \gamma = -\frac{mE}{2(m+1)}\gamma.$$

Es kann γ dargestellt werden als Summe der Winkeländerungen, welche entstehen, wenn P_2 und P_3 sich gegen P verschieben.

Das r und x von P ist nach der Formänderung $r + \Delta r \ldots x + \Delta x$,

„ „ „ „ „ P_2 „ „ „ „ $r + \Delta r + dr + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r}dr \ldots x + \Delta x + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}dx$,

„ „ „ „ „ P_3 „ „ „ „ $r + \Delta r + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}dx \ldots x + \Delta x + dx + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}dx$,

Die beiden Winkeländerungen sind also $\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}dx : dr = \frac{\partial(\Delta x)}{\partial r}$ bezw. $\frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}dx : dx = \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}$, daher $\gamma = \frac{\partial(\Delta x)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}$ und

$$\tau = -\frac{mE}{2(m+1)}\left[\frac{\partial(\Delta x)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}\right]. \qquad (3)$$

Hiermit sind alle Kräfte durch die Längenänderungen ausgedrückt.

Diese Gleichungen wären gültig, wenn die Temperatur sich nicht änderte. Denken wir uns die Temperatur der mittleren Mantelschichte, d. i. derjenigen, deren Abstand von der Achse $r_m = \frac{r_a + r_i}{2}$ ist, als Normaltemperatur angenommen, so kann die Temperaturerhöhung t

einer Schichte im Abstande r ausgedrückt werden durch $t = -\frac{\Delta t}{d_1}(r - r_m)$, wenn Δt der gesamte Temperaturunterschied zwischen Innen- und Außenmantel und $d_1 = r_a - r_i$ die Rohrdicke bedeuten. Es müssen die relativen Längenänderungen nach den drei Richtungen um $a \cdot t$ vermehrt werden, wenn mit a der lineare Ausdehnungskoeffizient bezeichnet wird. Es ist also

$$(4) \qquad a \cdot t = -\frac{a \cdot \Delta t}{d_1}(r - r_m) = -a'(r - r_m), \text{ wobei}$$

$$(5) \qquad a' = \frac{a \cdot \Delta t}{d_1}.$$

Die gesamten relativen Längen- und Winkeländerungen sind also gegeben durch folgende Gleichungen:

$$(6) \qquad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_a)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(7) \qquad \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_a + \sigma_t)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(8) \qquad \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_a - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_t)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(9) \qquad \frac{\partial(\Delta x)}{\partial r} + \frac{(\partial \Delta r)}{\partial x} = -\frac{2(m+1)}{mE}\tau.$$

Es sind sechs Unbekannte vorhanden: Δr, Δx, σ_t, σ_r, σ_a und τ. Es stehen aber auch sechs voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung: (1), (2), (6), (7), (8) und (9). Dadurch sind die Spannungen und die Verschiebungen als Funktionen von r und x bestimmt. Da außer den Unbekannten auch deren Differentialquotienten vorkommen, so wird sich die Notwendigkeit ergeben, Konstanten zu bestimmen. Hierzu dienen die Bedingungen:

für $x = 0$ und für $x = h$ muß $\sigma_a = 0$ sein, unabhängig von r,
„ $r = r_a$ „ „ $r = r_i$ „ $\sigma_r = 0$ „ „ „ x,

weil wir annehmen, daß auf den Körper keine äußeren Kräfte einwirken. (Fig. 2.)

Rechnet man aus den Gleichungen (6) bis (9) die Spannungen als Funktionen der Formänderungen aus, so erhält man:

$$(6_1) \quad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(7_1) \quad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + (m-1)\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(8_1) \quad \sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + \frac{(\partial \Delta r)}{\partial r} + (m-1)\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} + (m+1)a'(r - r_m)\right].$$

$$(9_1) \quad \tau = -\frac{Em}{2(m+1)}\left[\frac{\partial(\Delta x)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}\right].$$

Würde man von vornherein von den Schubspannungen absehen, so würde nach (2) $\frac{\partial \sigma_a}{\partial x} = 0$, also σ_a von x unabhängig sein. Da nun σ_a für den untersten und obersten Querschnitt verschwindet, würden demnach im ganzen Körper keine axialen Spannungen entstehen, während schon die Anschauung zeigt, daß sie bedeutend sein müssen. Man darf also nicht von Anfang an und in dieser Weise die Schubspannungen vernachlässigen. Dies schließt jedoch nicht aus, daß τ in ganz speziellen Fällen zu Null wird. Die Ursache dieses Verhaltens ist folgende. Betrachtet man ein Element von nebenstehender Form für sich allein, so wird es sich so biegen, wie Fig. 3 andeutet, ohne daß Spannungen entstehen. Im körperlichen Zusammenhang wird aber diese tulpenförmige Ausweitung des Rohres durch die Ringfasern teilweise verhindert. Die in halber Höhe befindlichen Ringfasern werden gedrückt, die oben und unten befindlichen gezogen. Man kann also sagen: die Axialspannungen werden erst *mittelbar* erzeugt. *Unmittelbare* Axialspannungen fehlen.

Fig. 2.

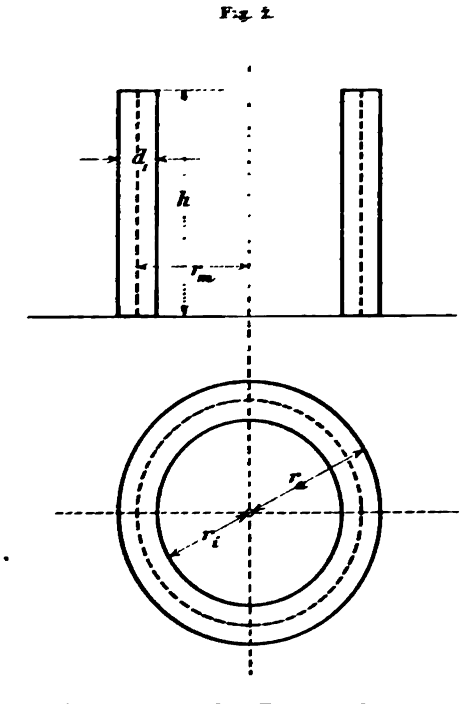
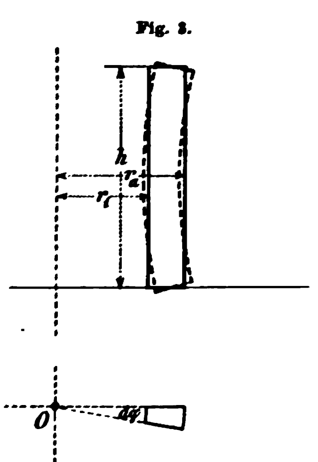


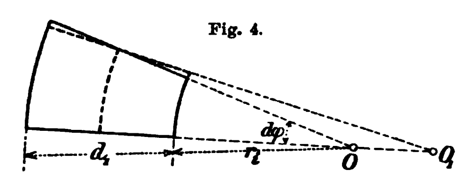
Fig. 3.



Anders verhalten sich die tangentialen Spannungen. Außer den mittelbaren inneren Kräften dieser Art sind auch unmittelbare vorhanden. Betrachtet man nämlich die tangentiale Ausdehnung allein, so ergibt sich, daß der äußere Umfang wegen der niedrigeren Temperatur sich zusammenzieht, während der innere sich ausdehnt. Soll der Körper im Zusammenhang bleiben, sollen also keine Sprünge in radialer Richtung entstehen, so muß auf jeden Teilquerschnitt ein Moment von solcher Größe wirken, daß eine Vergrößerung des Winkels $d\varphi$ nicht stattfindet. Die diesem Momente entsprechenden Spannungen können

unmittelbare Tangentialspannungen genannt werden. (Fig. 4.) Die Ringfasern werden also außen gezogen, innen gedrückt.

Ähnlich verhalten sich die Radialspannungen. In ihrer Richtung dehnt sich das Material innen aus, außen zieht es sich zusammen, sodaß die inneren Mantelschichten nach außen drücken und umgekehrt, die äußeren nach innen.


Fig. 4.

Um die Formänderungen in die Gleichungen (1) und (2) einzuführen, berechnen wir folgende Ausdrücke: $\frac{\partial(r\cdot\sigma_r)}{r\partial r}$, $\frac{\partial\sigma_a}{\partial x}$, $\frac{\partial\tau}{\partial x}$ und $\frac{\partial(r\cdot\tau)}{r\partial r}$ aus (6_1) bis (9_1) und beachten, daß r und x voneinander unabhängige Variable, Δr und Δx Funktionen dieser Größen sind:

$$(10)\quad \frac{\partial(r\cdot\sigma_r)}{r\partial r} = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[m\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial r}+\frac{\partial(\Delta x)}{r\partial x}+(m-1)\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x\cdot\partial r}+(m+1)a'\frac{2r-r_m}{r}\right],$$

$$(11)\quad \frac{\partial\sigma_a}{\partial x} = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial x}+\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r\cdot\partial x}+(m-1)\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2}\right],$$

$$(12)\quad \frac{\partial\tau}{\partial x} = -\frac{Em}{2(m+1)}\left[\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial r\cdot\partial x}+\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x^2}\right],$$

$$(13)\quad \frac{\partial(r\cdot\tau)}{r\partial r} = -\frac{Em}{2(m+1)}\left[\frac{\partial(\Delta x)}{r\partial r}+\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial x}+\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x\cdot\partial r}\right].$$

Diese Werte und die aus den Gleichungen (6_1) bis (9_1) in die Gleichungen (1) und (2) eingesetzt, geben folgende Beziehungen, welchen die Verrückungen genügen müssen:

$$(1_1)\quad (m+1)a'+(m-1)\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial r}+(m-1)\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r^2}+\frac{m\partial^2(\Delta x)}{2\partial r\,\partial x}+\frac{(m-2)\partial^2(\Delta r)}{2\partial x^2}-(m-1)\frac{\Delta r}{r^2}=0,$$

$$(2_1)\quad \frac{m\partial(\Delta r)}{2r\partial x}+\frac{m\partial^2(\Delta r)}{2\partial r\cdot\partial x}+(m-1)\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2}+\frac{(m-2)\partial(\Delta x)}{2r\partial r}+\frac{(m-2)\partial^2(\Delta x)}{2\partial r^2}=0.$$

Diese Formeln gelten aber nicht für den Zylinder allein. Ihre Bedeutung ist eine weitergehende: sie erscheinen bei allen Wärmespannungsproblemen der Rotationskörper, wenn die Temperatur sich so verteilt, wie angenommen wurde. Es dürfte daher auch außerordentlich schwierig sein, die allgemeinen Lösungen von Δr und Δx zu finden, das heißt diejenigen, welche alle Probleme der Drehungskörper als spezielle Fälle enthalten. Andererseits kann man aber durch Versuche, durch Reihenentwicklungen usw. Funktionen für Δr und Δx finden, welche den Gleichungen (1_1) und (2_1) genügen. Aus den Oberflächenbedingungen läßt sich zu jedem so gefundenen Integralsystem der dazu gehörige Drehungskörper finden.

Man kann die vorstehenden Gleichungen auch umformen und in folgender Weise anschreiben:

$$(1_z)\qquad (m-1)\,\sigma' + (m-1)\,\frac{\partial\left[\frac{\partial(\Delta r\cdot r)}{r\,\partial r}\right]}{\partial r} + \frac{\partial\left[\frac{m\,\partial\Delta x}{2\,\partial r} + \frac{(m-2)\,\partial\Delta r}{2\,\partial x}\right]}{\partial x} = 0.$$

$$(2_z)\qquad \frac{\partial\left[r\left(\frac{m\,\partial\Delta r}{2\,\partial x} + \frac{(m-2)\,\partial\Delta x}{2\,\partial r}\right)\right]}{r\,\partial r} + (m-1)\,\frac{\partial\left(\frac{\partial\Delta x}{\partial x}\right)}{\partial x} = 0.$$

II. Für zwei Sonderfälle des vorliegenden Zylinderproblems lassen sich die Lösungen unschwer entwickeln. Ist nämlich der Hohlzylinder sehr kurz, so kann man sowohl die axialen Spannungen, als auch die Schubspannungen vernachlässigen. Dann kann man in einfacher Weise die tangentialen und radialen Spannungen erhalten.

Ist hingegen das Rohr unendlich lang, so müssen die Spannungen von x unabhängig sein, da in allen Punkten mit demselben r der gleiche Spannungszustand herrschen muß, so daß $\frac{\partial\sigma_t}{\partial x} = \frac{\partial\sigma_r}{\partial x} = \frac{\partial\sigma_a}{\partial x} = \frac{\partial\tau}{\partial x} = 0$ ist; ferner muß auch $\frac{\partial(\Delta r)}{\partial x} = 0$, also auch $\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r\cdot\partial x} = \frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x^2} = 0$ sein.

Da wir die Temperaturerhöhungen auf die Temperatur der mittleren Mantelschichte bezogen haben, können wir ferner annehmen, daß das Rohr bei der Deformation seine Länge nicht ändert, also $\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = 0$ ist. Ganz korrekt ist diese Annahme nicht. Ihre Berechtigung ist aber gewiß so groß, wie die früher gemachte eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes; beide gelten unter denselben Verhältnissen. Strenge genommen müßten wir $\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} =$ konstant nehmen und den Wert dieser Konstanten so bestimmen, daß das $\int\sigma_a\,df$ der positiven auf einen Rohrquerschnitt wirkenden axialen Spannungen gleich ist dem der negativen. df bedeutet ein Flächenelement des Rohrquerschnittes. Im übrigen beeinflußt diese Annahme in keiner Weise die Werte für die Tangential- und Radialspannungen, so daß es in sehr einfacher Weise möglich ist, nachträglich die — gänzlich unbedeutende — Korrektur der axialen Spannungen vorzunehmen. Die Spannungslinie — eine Gerade — ist eben so lange parallel zu sich selbst zu verschieben, bis Gleichgewicht an einem Querschnitte herrscht.

Jedenfalls wird $\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial r\cdot\partial x} = \frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2} = 0$ sein.

Daher sind die Gleichungen 1 und 2 für diesen Sonderfall so zu schreiben:

$$(1_s)\qquad \frac{d(r\cdot\sigma_r)}{r\,dr} - \frac{\sigma_t}{r} = 0,$$

$$(2_s)\qquad \frac{d(r\cdot\tau)}{dr} = 0.$$

Die Gleichungen (6) bis (9) lauten:

$$(6_a)\qquad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{m}(\sigma_r + \sigma_a)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(7_a)\qquad \frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_a + \sigma_t)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(8_a)\qquad 0 = -\frac{1}{E}\left[\sigma_a - \frac{1}{m}(\sigma_t + \sigma_r)\right] - a'(r - r_m),$$

$$(9_a)\qquad \frac{d(\Delta x)}{dr} = -\frac{2(m+1)}{mE}\tau.$$

Die Gleichungen (6_1) bis (9_1) und (1_1) sowie (2_1) lauten:

$$(6_{1a})\qquad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right]$$

$$(7_{1a})\qquad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + (m-1)\frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(8_{1a})\qquad \sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(9_{1a})\qquad \tau = -\frac{Em}{2(m+1)}\cdot\frac{d(\Delta x)}{dr}$$

$$(1_{1a})\qquad (m+1)a' + (m-1)\frac{d(\Delta r)}{r\,dr} + (m-1)\frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} - (m-1)\frac{\Delta r}{r^2} = 0$$

$$(2_{1a})\qquad \frac{d(\Delta x)}{r\,dr} + \frac{d^2(\Delta x)}{dr^2} = 0.$$

Aus den zuletzt angeschriebenen Gleichungen erhält man durch Integration:

$$(14)\qquad \Delta r = -\frac{(m+1)a'}{3(m-1)}r^2 + C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

$$(15)\qquad \Delta x = C' \operatorname{logn} r + C''$$

$C_1\, C_2\, C'\, C''$ sind Konstanten.

Aus (14) und (15) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$(16)\qquad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{(m+1)a'}{3(m-1)}r + C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

$$(17)\qquad \frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{2(m+1)a'}{3(m-1)}r + C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$(18)\qquad \frac{d(\Delta x)}{dr} = \frac{C'}{r}.$$

Diese Werte sind in die Gleichungen (6_{1a}) bis (9_{1a}) einzusetzen:

$$(19)\ \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{2(m+1)(m-2)a'}{3(m-1)}r + mC_1 - (m+1)a'r_m + \frac{(m-2)C_2}{r^2}\right],$$

$$(20)\ \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{(m+1)(m-2)a'}{3(m-1)}r + mC_1 - (m+1)a'r_m - \frac{(m-2)C_2}{r^2}\right],$$

$$(21)\ \sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{(m+1)(m-2)a'}{m-1}r + 2C_1 - (m+1)a'r_m\right]$$

$$(22)\ \tau = -\frac{Em}{2(m+1)}\cdot\frac{C'}{r}.$$

Gleichung (22) folgt auch direkt aus (2_a); wenn $\frac{d(r\cdot\tau)}{dr} = 0$ ist, muß $\tau\cdot r$ konstant sein.

Es sind nun zunächst die Konstanten C_1 und C_2 zu bestimmen. Für $r = r_i$ und $r = r_a$ ist $\sigma_r = 0$; daraus folgen die Gleichungen:

$$\frac{(m+1)(m-2)a'}{3(m-1)} r_i + mC_1 - (m+1)a'r_m - \frac{m-2}{r_i^2} C_2 = 0,$$

$$\frac{(m+1)(m-2)a'}{3(m-1)} r_a + mC_1 - (m+1)a'r_m - \frac{m-2}{r_a^2} C_2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen rechnen sich folgende Größen:

$$(23)\quad C_1 = \frac{(m+1)a'}{6m(m-1)(r_a+r_i)}[(m+1)r_a^2 + 2(m-1)r_a r_i + (m+1)r_i^2],$$

$$(24)\quad C_2 = -\frac{(m+1)a' r_a^2 r_i^2}{3(m-1)(r_a+r_i)},$$

$$(25)\quad mC_1 - (m+1)a'r_m = -\frac{(m+1)(m-2)a'(r_a^2 + r_a r_i + r_i^2)}{3(m-1)(r_a+r_i)}.$$

Mit Hilfe dieser Werte lassen sich nun die Normalspannungen als Funktionen von r bestimmen. Es ist

$$(26)\quad \sigma_t = -\frac{Ema'}{3(m-1)}\left[2r - \frac{r_a^2 + r_a r_i + r_i^2}{r_a + r_i} - \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a+r_i)r^2}\right],$$

$$(27)\quad \sigma_r = -\frac{Ema'}{3(m-1)}\left[r - \frac{r_a^2 + r_a r_i + r_i^2}{r_a + r_i} + \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a+r_i)r^2}\right],$$

$$(28)\quad \sigma_a = -\frac{Ema'}{m-2}\left[\frac{m-2}{m-1}r + \frac{(m+1)r_a^2 + 2(2m-1)r_a r_i + (m+1)r_i^2}{3m(m-1)(r_a+r_i)} - \frac{r_a + r_i}{2}\right].$$

Die Gleichungen (26) und (27) stellen eine Art höherer Hyperbeln, Gleichung (28) stellt eine Gerade dar.

Die relative Volumänderung ν, welche durch die Summe $\frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}$ bezw. durch den Ausdruck $\frac{m-2}{Em}(\sigma_t + \sigma_r + \sigma_a)$ gegeben ist, hängt von r linear ab. Es ergibt sich:

$$\nu = \frac{(m+1)a'}{3(m-1)}\left[-3r + \frac{2(m+1)r_a^2 + 4(2m-1)r_a r_i + 2(m+1)r_i^2}{2m(r_a+r_i)}\right].$$

Die Schubspannung τ muß für $r = r_a$ und für $r = r_i$ verschwinden; dies ist nur möglich, wenn $C' = 0$ ist. Es ist daher in allen Punkten des elastischen Körpers

$$(29)\quad \tau = 0.$$

Schließlich läßt sich noch die radiale Verrückung Δr als Funktion von r angeben:

$$(30)\quad \Delta r = \frac{(m+1)a'}{3(m-1)}\left[-r^2 + \frac{(m+1)r_a^2 + 2(2m-1)r_a r_i + (m+1)r_i^2}{2m(r_a+r_i)} r - \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a+r_i)r}\right].$$

Wenn $a' = \frac{a \cdot \Delta t}{d_1}$ Null wird, so verschwinden sämtliche Spannungen. Dies ist der Fall, wenn a oder Δt Null wird.

Obwohl die Formeln (26), (27), (28) ... schon der Annahme eines linearen Temperaturverteilungsgesetzes wegen nur näherungsweise gültig sind, und zwar umsomehr, je kleiner das Verhältnis zwischen Rohrdicke und mittlerem Radius ist, sollen sie doch für einen Sonderfall umgeformt werden, bei dem diese Bedingung nicht erfüllt ist, aber sich merkwürdige Beziehungen ergeben.

Ist nämlich $r_i = 0$, so wird

$$(26_a) \qquad \sigma_t = -\frac{Ema'}{3(m-1)}(2r - r_a),$$

$$(27_a) \qquad \sigma_r = -\frac{Ema'}{3(m-1)}(r - r_a),$$

$$(28_a) \qquad \sigma_a = -\frac{Ema'}{m-2}\left[\frac{m-2}{m-1}r + \frac{(m+1)r_a}{3m(m-1)} - \frac{r_a}{2}\right],$$

$$(30_a) \qquad \Delta r = \frac{(m+1)a'}{3(m-1)}\left[-r^2 + \frac{(m+1)r_a}{2m}r\right].$$

Die drei Normalspannungen verteilen sich also geradlinig; die Verschiebung in radialer Richtung nach einer Parabel. Die Spannungen in einem Punkte der Achse bekommt man, wenn man für r Null einsetzt:

$$(26_b) \qquad \sigma_t = +\frac{E \cdot m \cdot a \cdot \Delta t}{3(m-1)},$$

$$(27_b) \qquad \sigma_r = +\frac{E \cdot m \cdot a \cdot \Delta t}{3(m-1)},$$

$$(28_b) \qquad \sigma_a = -\frac{E \cdot m \cdot a \cdot \Delta t}{m-2}\left[\frac{m+1}{3m(m-1)} - \frac{1}{2}\right],$$

$$(30_b) \qquad \Delta r = 0.$$

Es ist zu beachten, daß diese Spannungen unabhängig sind von r_a. Es kommt nur auf den Temperaturunterschied Δt an, dem sie proportional sind.

Die Spannungen für die Oberfläche erhält man, wenn man für $r \ldots r_a$ einsetzt:

$$(26_c) \qquad \sigma_t = -\frac{Ema\Delta t}{3(m-1)},$$

$$(27_c) \qquad \sigma_r = 0,$$

$$(28_c) \qquad \sigma_a = -\frac{E(3m^2 - 7m + 2)a\Delta t}{6(m-2)(m-1)},$$

$$(30_c) \qquad \Delta r = -\frac{(m+1)a\Delta t}{6m}r_a.$$

Die Spannungen sind wieder von r_a unabhängig; Δr ist proportional r_a.

Zahlenbeispiel: Für eine im unteren Teil eines Schornsteins befindliche, als Hohlzylinder zu betrachtende Trommel sei folgendes teils gegeben, teils angenommen:

$$r_a = 150 \text{ cm},$$
$$r_i = 100 \text{ cm},$$
$$d_1 = r_a - r_i = 50 \text{ cm},$$
$$\varDelta t = 125 \text{ Grad Cels.},$$
$$a = 0{,}00005 \text{ Grad}^{-1},$$
$$E = 45000 \text{ at},$$
$$m = 4.$$

Daher ist:

$$a' = \frac{a \cdot \varDelta t}{d_1} = \frac{125}{10^7} \text{ cm}^{-1},$$
$$\frac{E m a'}{8(m-1)} = 0{\cdot}25 \text{ kg cm}^{-3},$$
$$\frac{r_a^2 + r_a r_i + r_i^2}{r_a + r_i} = 190 \text{ cm},$$
$$\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a + r_i} = 900000 \text{ cm}^3,$$
$$\frac{E m a'}{m-2} = 1{\cdot}125 \text{ kg cm}^{-3},$$
$$\frac{(m+1)r_a^2 + 2(2m-1)r_a r_i + (m+1)r_i^2}{3m(m-1)(r_a+r_i)} - \frac{r_a + r_i}{2} = -83{\cdot}61 \text{ cm}.$$

Eingesetzt in die Gleichungen (26), (27) und (28):

$$\sigma_t = -0{\cdot}25\left[2r - 190 - \frac{900000}{r^2}\right] \text{at},$$
$$\sigma_r = -0{\cdot}25\left[r - 190 + \frac{900000}{r^2}\right] \text{at},$$
$$\sigma_a = -1{\cdot}125\left[\tfrac{2}{3} r - 83{\cdot}61\right] \text{at},$$

für $r = r_i$, $\sigma_t = 20{\cdot}0$ at, $\sigma_r = 0$, $\sigma_a = 19{\cdot}0$ at,
„ $r = r_m$, $\sigma_t = -0{\cdot}6$ at, $\sigma_r = 1{\cdot}7$ at, $\sigma_a = 0{\cdot}3$ at,
„ $r = r_a$, $\sigma_t = -17{\cdot}5$ at, $\sigma_r = 0$, $\sigma_a = 18{\cdot}4$ at.

Da diese Spannungen zum größten Teile weit über der Elastizitätsgrenze liegen, sind die hier angegebenen Werte an sich unrichtig und lassen nur die Überschreitung dieser und die Wichtigkeit der durch die ungleiche Temperaturverteilung entstehenden inneren Kräfte erkennen.

Für Metalle wird $m = \frac{10}{3}$ gesetzt. Dann lauten die Gleichungen (26), (27), (28) und (30):

$$(26_1)\qquad \sigma_t = -\tfrac{10}{21}Ea'\left[2r - \frac{r_a^2 + r_a r_i + r_i^2}{r_a + r_i} - \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a + r_i)r^2}\right],$$

$$(27_1)\qquad \sigma_r = -\tfrac{10}{21}Ea'\left[r - \frac{r_a^2 + r_a r_i + r_i^2}{r_a + r_i} + \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a + r_i)r^2}\right],$$

$$(28_1)\qquad \sigma_a = -\tfrac{5}{3}Ea'\left[\tfrac{4}{7}r + \frac{13(r_a^2 + r_i^2) + 34 r_a r_i}{70(r_a + r_i)} - \frac{r_a + r_i}{2}\right],$$

$$(30_1)\qquad \Delta r = \tfrac{13}{21}a'\left[-r^2 + \frac{13(r_a^2 + r_i^2) + 34 r_a r_i}{20(r_a + r_i)}r - \frac{r_a^2 r_i^2}{(r_a + r_i)r}\right].$$

Kehren wir wieder zu den Gleichungen (1_1) und (2_1) zurück. Folgendes Funktionenpaar genügt denselben:

$$(31)\qquad \begin{aligned} \Delta r &= a_1 r + a_2 r^2 + a_1' r x, \\ \Delta x &= b_0 + b' x + b_2 r^2 + b'' x^2, \end{aligned}$$

(a_1, a_2, ... sind Konstanten), aber auch das folgende:

$$(32)\qquad \begin{aligned} \Delta r &= a_1 r + a_2 r^2 + a_2' r x + a_3 r^3 + a_3' r^2 x + a_3'' r x^2, \\ \Delta x &= b_0 + b' x + b_2 r^2 + b_2'' x^2 + b_3 r^3 + b_3' r^2 x + b_3'' r x^2 + b_3''' x^3. \end{aligned}$$

Diese, durch eine Potenzreihenentwicklung gefundenen Lösungen lassen sich natürlich beliebig erweitern. Merkwürdig ist nun, daß auch folgende, von (31) nur durch ein Glied verschiedene Funktionen Integrale von (1_1) und (2_1) sind:

$$(33)\qquad \begin{aligned} \Delta r &= C_0 r^2 + C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 r x, \\ \Delta x &= C_4 + C_5 x + C_6 x^2 + C_7 r^2. \end{aligned}$$

Dabei müssen aber folgende Bedingungen zwischen den Konstanten erfüllt werden:

$$(34)\qquad \begin{aligned} C_0 &= -\frac{(m+1)a\Delta t}{8(m-1)d_1}, \\ C_7 &= -\frac{m}{2(m-2)}C_3 - \frac{m-1}{m-2}C_6. \end{aligned}$$

Diese Lösungen lassen sich aber durch Entwicklung in Potenzreihen nicht erweitern. Die zu den Gleichungen (31), (32), (33) gehörigen Drehungskörper lassen sich aus den Oberflächenbedingungen finden. Der zu (33) passende Körper enthält den unendlich langen Hohlzylinder als speziellen Fall.

III. Das dem hier behandelten Wärmespannungsproblem analoge der „reinen“ Elastizitätstheorie ist das folgende: ein Hohlzylinder aus isotropem Materiale gehorche dem Hookschen und dem Superpositionsgesetze; auf seinen Innen- und Außenmantel wirke der Druck p_0 bezw. p'; es sind die Spannungen und Formänderungen zu bestimmen! Die Gleichgewichtsbedingungen für ein tonnengewölbsteinförmiges Volum-

element sind wieder durch (1) und (2) gegeben. Die Spannungen hingegen, ausgedrückt durch die spez. Längenänderungen, lauten:

$$(VI_1)\qquad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}\right],$$

$$(VII_1)\qquad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + (m-1)\frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}\right],$$

$$(VIII_1)\qquad \sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial r} + (m-1)\frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}\right],$$

$$(IX_1)\qquad \tau = -\frac{Em}{2(m+1)}\left[\frac{\partial(\Delta x)}{\partial r} + \frac{\partial(\Delta r)}{\partial x}\right].$$

Ersetzt man in den Gleichungen (1) und (2) die Spannungen durch die Längenänderungen, so bekommt man:

$$(I_1)\quad (m-1)\frac{\partial(\Delta r)}{r\partial r} + (m-1)\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial r^2} + \frac{m\partial^2(\Delta r)}{2\partial x\partial r} + \frac{(m-2)\partial^2(\Delta r)}{2\partial x^2} - (m-1)\frac{\Delta r}{r^2} = 0.$$

$$(II_1)\quad \frac{m\partial(\Delta r)}{2r\partial x} + \frac{m\partial^2(\Delta r)}{2\partial r\partial x} + (m-1)\frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2} + \frac{(m-2)\partial(\Delta x)}{2r\partial r} + \frac{(m-2)\partial^2(\Delta x)}{2\partial r^2} = 0.$$

Ist das Rohr unendlich lang und wird es der Beanspruchung unterworfen, so wird im allgemeinen seine Länge sich ändern. Die Spannungen sind von x unabhängig. Ist der Körper spannungslos montiert und verhindern die Befestigungen eine Bewegung der Moleküle längs der Achse, so hängen auch die Formänderungen in keiner Weise von x ab. Es wird also $\frac{\partial\sigma_t}{\partial x} = \frac{\partial\sigma_r}{\partial x} = \frac{\partial\sigma_a}{\partial x} = \frac{\partial\tau}{\partial x} = 0$, ferner $\frac{\partial(\Delta r)}{\partial x} = \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = 0$, also auch $\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x\cdot\partial r} = \frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x\cdot\partial r} = \frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial x^2} = 0$ werden. Somit lauten die Gleichungen (I_1) und (II_1):

$$(I_{1a})\qquad \frac{d(\Delta r)}{r\,dr} + \frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} - \frac{\Delta r}{r^2} = 0,$$

$$(II_{1a})\qquad \frac{d(\Delta x)}{r\,dr} + \frac{d^2(\Delta x)}{dr^2} = 0.$$

Durch Integration erhält man nun:

$$(XIV)\qquad \Delta r = C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

$$(XV)\qquad \Delta x = C'\,\mathrm{logn}\,r + C''.$$

Daher lauten die Spannungsformeln wie folgt:

$$(XIX)\qquad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[mC_1 + (m-2)\frac{C_2}{r^2}\right],$$

$$(XX)\qquad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[mC_1 - (m-2)\frac{C_2}{r^2}\right],$$

$$(XXI)\qquad \sigma_a = -\frac{2C_1 Em}{(m+1)(m-2)},$$

$$(XXII)\qquad \tau = -\frac{C'Em}{2(m+1)r}.$$

Die kubische Dilatation $\nu = 2C_1$ ist also konstant. Aus den Oberflächenbedingungen bekommt man die Konstanten. Setzt man sie in die vorstehenden Gleichungen ein, so wird:

(XXVI) $$\sigma_t = \frac{r_a^2 p' - r_i^2 p_0}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{r_a^2 r_i^2 (p_0 - p')}{(r_a^2 - r_i^2) r^2},$$

(XXVII) $$\sigma_r = \frac{r_a^2 p' - r_i^2 p_0}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{r_a^2 r_i^2 (p_0 - p')}{(r_a^2 - r_i^2) r^2},$$

(XXVIII) $$\sigma_a = \frac{2}{m} \cdot \frac{r_a^2 p' - r_i^2 p_0}{r_a^2 - r_i^2},$$

(XXIX) $$\tau = 0.$$

Ein anderer (sehr oft behandelter) Sonderfall ist der folgende: ein Hohlzylinder ist oben und unten abgeschlossen. Nimmt man an, daß die axiale Spannung sich gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt, so muß, soll äußeres Gleichgewicht herrschen,

$$\sigma_a = \frac{r_a^2 p' - r_i^2 p_0}{r_a^2 - r_i^2}$$

sein.

Ferner wird $\tau = 0$ gesetzt. Rechnet man auf Grund dieser Annahmen die tangentiale und radiale Spannung, so erhält man wieder die Formeln (XXVI) und (XXVII). In diesem Falle sind sämtliche Spannungen unabhängig von den Elastizitätskonstanten. Könnte m den Wert zwei annehmen, so wären beide Sonderfälle identisch.

Zu den Gleichungen (I_1), (II_1) gehören wieder den Systemen (31), (32) und (33) analoge Lösungen. Speziell lauten die letzteren:

(XXXIII) $$\begin{aligned} \Delta r &= C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 r x, \\ \Delta x &= C_4 + C_5 x + C_6 x^2 - \left[\frac{m}{2(m-2)} C_3 + \frac{m-1}{m-2} C_6\right] r^2. \end{aligned}$$

Zu diesem Integralsystem gehören folgende Spannungsformeln:

$$\sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[m C_1 + C_5 + (m-2)\frac{C_2}{r^2} + (m C_3 + 2 C_6) x\right],$$

$$\sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[m C_1 + C_5 - (m-2)\frac{C_2}{r^2} + (m C_3 + 2 C_6) x\right],$$

$$\sigma_a = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}[2 C_1 + (m-1) C_5 + 2\{C_3 + (m-1) C_6\} x],$$

$$\tau = -\frac{Em}{2(m+1)(m-2)}[m C_3 - 2(m-1) C_6] r.$$

Zu diesen Formeln gehört bei gegebener Belastung ein aus den Oberflächenbedingungen zu ermittelnder Drehungskörper und umgekehrt: ist die Körperform gegeben, so kann man den Belastungszustand be-

stimmen. Ist z. B. ein unendlich langer Zylinder gegeben, so ergibt sich eine Belastungsart, welche den hier besprochenen Fall eines konstanten inneren und äußeren Druckes als Sonderfall enthält. Ist aber ein konstanter Oberflächendruck p_0 bezw. p' gegeben, so erhalten wir einen Drehungskörper, welcher unter Umständen in einen unendlich langen Hohlzylinder übergehen kann.

Ein weiteres Integralsystem der Gleichungen (I_1) und (II_1) ist folgendes:

$$\text{(XXXIV)} \qquad \begin{aligned} \varDelta r &= \frac{Cr}{R(x+R)} + \frac{Bxr}{R^3}, \\ \varDelta x &= \frac{A}{R} + \frac{Bx^2}{R^3}. \end{aligned}$$

wobei $R^2 = x^2 + r^2$.

A, B und C sind Konstanten, die folgender Bedingung genügen müssen:

$$2B + \frac{m}{m-2}(B + C - A) = 0 \text{ (Boussinesq.).}$$

Wenn Drehungskörper um ihre Achse rotieren, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial(r \cdot \sigma_r)}{r\partial r} - \frac{\sigma_t}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\gamma\omega^2}{g} r = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial x} + \frac{\partial(r \cdot \tau)}{r\partial r} = 0.$$

γ ist das spez. Gewicht, g die Beschleunigung der Schwere, ω die Winkelgeschwindigkeit. Die Spannungsformeln sind identisch mit (IV_1) bis (IX_1). Setzt man sie in die vorstehenden Gleichungen ein, so bekommt man Ausdrücke, welche sich von (1_1) und (2_1) nur dadurch unterscheiden, daß $(m + 1)a'$ ersetzt ist durch Cr, wobei C nur abhängig ist von m, E und $\frac{\gamma\omega^2}{g}$. Es lassen sich den Gleichungen (33) analoge Lösungen angeben; an Stelle des Gliedes $C_0 r^2$ tritt ein solches mit r^3.

IV. Einfacher sind die Verhältnisse bei einer Hohlkugel. Alle elastischen Kräfte normal zur radialen Richtung sind einander gleich und mit σ_t bezeichnet. Die radiale Spannung sei wieder σ_r genannt. Schubspannungen in radialer oder tangentialer Richtung fehlen. Betrachtet man ein Element, welches die Form eines Kuppelgewölbsteines hat, und bestimmt die Bedingung für das Gleichgewicht aller in radialer Richtung wirkenden Kräfte, so bekommt man die Gleichung:

$$\text{(35)} \qquad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_t) = 0.$$

Unter Beibehaltung der den früheren analogen Bezeichnungen ist der Zusammenhang zwischen Formänderungen und Spannungen gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{m}(\sigma_t + \sigma_r)\right] + a t$$

$$\frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{1}{m}(\sigma_t + \sigma_t)\right] + a t$$

$$(36) \qquad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{E}\left[\frac{m-1}{m}\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m}\right] - a'(r - r_m)$$

$$(37) \qquad \frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{1}{E}\left[\sigma_r - \frac{2}{m}\sigma_t\right] - a'(r - r_m).$$

Berechnet man aus den vorstehenden Gleichungen die Spannungen, so erhält man:

$$(38) \quad \sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{m\,\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right],$$

$$(39) \quad \sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{2\,\Delta r}{r} + (m-1)\frac{d(\Delta r)}{dr} + (m+1)a'(r - r_m)\right].$$

Daraus ergeben sich folgende, in Gleichung (35) vorkommende Ausdrücke:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[-\frac{2\,\Delta r}{r^2} + \frac{2\,d(\Delta r)}{r\,dr} + (m-1)\frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} + (m+1)a'\right],$$

$$\sigma_r - \sigma_t = -\frac{Em}{m+1}\left[-\frac{\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr}\right],$$

welche dort eingesetzt, folgende Differentialgleichung liefern:

$$(40) \qquad -\frac{2\,\Delta r}{r^2} + \frac{2\,d(\Delta r)}{r\,dr} + \frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} + \frac{(m+1)a'}{m-1} = 0.$$

Es ist daher

$$(41) \qquad \Delta r = -\frac{(m+1)a'}{4(m-1)}r^2 + \frac{C_1}{3}r + \frac{C_2}{r^2}$$

und

$$(42) \qquad \frac{d(\Delta r)}{dr} = -\frac{(m+1)a'}{2(m-1)}r + \frac{C_1}{3} - \frac{2\,C_2}{r^3}.$$

C_1 und C_2 sind die Integrationskonstanten.

Die Gleichungen (38) und (39) gehen nun über in die folgenden:

$$\sigma_t = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{3(m+1)(m-2)a'}{4(m-1)}r + \frac{m+1}{3}C_1 - (m+1)a'r_m + (m-2)\frac{C_2}{r^3}\right].$$

$$\sigma_r = -\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{(m+1)(m-2)a'}{2(m-1)}r + \frac{m+1}{3}C_1 - (m+1)a'r_m - 2(m-2)\frac{C_2}{r^3}\right].$$

Bestimmt man C_1 und C_2 aus der Bedingung, daß die radiale Spannung für $r = r_i$ und $r = r_a$ verschwindet, so bekommt man:

$$(43) \qquad C_1 = \frac{3\,a'(r_a + r_i)[r_a^2 + (m-1)r_a r_i + r_i^2]}{2(m-1)[r_a^2 + r_a r_i + r_i^2]},$$

$$(44) \qquad C_2 = -\frac{(m+1)\,a'\,r_a^2 r_i^2}{4(m-1)[r_a^2 + r_a r_i + r_i^2]},$$

so daß endlich

$$(45) \qquad \sigma_t = -\frac{Ema'}{4(m-1)}\left[3r - \frac{2(r_a+r_i)(r_a^2+r_i^2)}{r_a^2+r_ar_i+r_i^2} - \frac{r_a^3r_i^3}{r_a^2+r_ar_i+r_i^2}\cdot\frac{1}{r^3}\right],$$

$$(46) \qquad \sigma_r = -\frac{Ema'}{2(m-1)}\left[r - \frac{(r_a+r_i)(r_a^2+r_i^2)}{r_a^2+r_ar_i+r_i^2} + \frac{r_a^3r_i^3}{r_a^2+r_ar_i+r_i^2}\cdot\frac{1}{r^3}\right]$$

und

$$(47) \qquad \Delta r = \frac{(m+1)a'}{4(m-1)}\left[-r^2 + \frac{2(r_a+r_i)[r_a^2+(m-1)r_ar_i+r_i^2]}{(m+1)(r_a^2+r_ar_i+r_i^2)}r - \frac{r_a^3r_i^3}{r_a^2+r_ar_i+r_i^2}\cdot\frac{1}{r^2}\right].$$

Die relative Volumänderung ist

$$(48) \qquad v = \frac{2\Delta r}{r} + \frac{d(\Delta r)}{dr} = \frac{(m+1)a'}{2(m-1)}\left[-2r + \frac{3(r_a+r_i)[r_a^2+(m-1\; r_ar_i+r_i^2]}{(m+1)(r_a^2+r_ar_i+r_i^2)}\right].$$

Maßgebend für die Beanspruchung ist immer die tangentiale Spannung, welche an der (äußeren und inneren) Oberfläche die größten Werte erreicht:

$$\text{für } r = r_a \ldots\ldots \min \sigma_t = -\frac{Ema'(r_a^3+r_a^2r_i+r_ar_i^2-3r_i^3)}{4(m-1)(r_a^2+r_ar_i+r_i^2)},$$

$$\text{für } r = r_i \ldots\ldots \max \sigma_t = -\frac{Ema'(-3r_a^3+r_a^2r_i+r_ar_i^2+r_i^3)}{4(m-1)(r_a+r_ar_i+r_i^2)}.$$

Daher sind die reduzierten Tangentialspannungen:

$$\min \sigma_t \,\text{red} = -\frac{Ea'(r_a^3+r_a^2r_i+r_ar_i^2-3r_i^3)}{4(r_a^2+r_ar_i+r_i^2)},$$

$$\max \sigma_t \,\text{red} = -\frac{Ea'(-3r_a^3+r_a^2r_i+r_ar_i^2+r_i^3)}{4(r_a^2+r_ar_i+r_i^2)}.$$

Hätten die Formen auch für den Grenzfall $r_i = 0$ Gültigkeit, so wäre:

$$\sigma_t = -\frac{Ema'}{4(m-1)}(3r-2r_a),$$

$$\sigma_r = -\frac{Ema'}{2(m-1)}(r-r_a),$$

$$\Delta r = \frac{(m+1)a'}{4(m-1)}\left[-r^2 + \frac{2r_a}{m+1}r\right].$$

Die Spannungen wären also lineare Funktionen von r. Natürlich ist a' gleich $\frac{a\cdot\Delta t}{r_a}$. Für die Kugeloberfläche ist

$$\sigma_t = -\frac{Ema\Delta t}{4(m-1)},$$

$$\sigma_r = 0,$$

$$\Delta r = \tfrac{1}{4}a\Delta t r_a$$

und für den Kugelmittelpunkt

$$\sigma_t = \sigma_r = \frac{Ema\Delta t}{2(m-1)},$$

$$\Delta r = 0.$$

Korrektionsspiegel zu parabolischen Reflektoren.[1])

Von F. Biske in Straßburg i. E..

I. Aberration parabolischer Spiegel.

Wenn OP den Durchschnitt eines Rotationsparaboloides mit der Achse OX darstellt, F seinen Brennpunkt mit der Brennweite f, P einen Punkt seiner Fläche mit den rechtwinkligen Koordinaten X, Y und den Polarkoordinaten θ, R, und wenn auf dieses Paraboloid unter dem Winkel α gegen seine Achse ein Strahlenbüschel s fällt, das vom Zentrum O in der Richtung OF_0 und vom Punkte P in der Richtung PF_θ reflektiert wird, so ist die Distanz $OF_\theta = f_\theta$ eine Funktion der Variablen α, θ und kann folgendermaßen entwickelt werden:

Aus dem $\triangle\, OLF_\theta$ ist:

$$f_\theta = OL \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin\theta},$$

da aber

$$OL = X + Y \operatorname{cotg}(\theta + \alpha)$$

und die Gleichung der Parabel

$$Y^2 = 4fX,$$

außerdem

$$\sin\theta = \frac{Y}{R}$$

und die Polargleichung der Parabel

$$R = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

also

$$Y = 2f \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \tag{1}$$

so wird

$$OL = \frac{Y^2}{4f} + Y \operatorname{ctg}(\theta + \alpha) \tag{2}$$

und folglich ist

$$f_\theta = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\left[\cos(\theta + \alpha) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin(\theta + \alpha)\right]. \tag{3}$$

---

1) Bei dieser Untersuchung wurden die Arbeiten berücksichtigt: „The abberation of parabolic mirrors“, Ch. L. Poor (Astron. Journ. 420); „The parabolic mirror“, C. W. Crockett (Astroph. Journ. VII).

Für $\alpha = 0$ ist

(4) $$f_\theta = f;$$

dies ist die Fundamentaleigenschaft des Paraboloides.

Für $\theta = 0$ ist

$$f_o = f \cos\alpha;$$

dies ist die Polargleichung eines Kreises mit dem Durchmesser f. Wenn also θ bis Null abnimmt, so nähern sich die seitlichen Brennpunkte bis zu einem geometrischen Orte, der hier eine Kugel mit dem Durchmesser gleich der Brennweite ist und die Fokalfläche des Paraboloides bildet.

Die lineare Aberration in der Richtung des Zentralstrahles ist nach Substitution von (3) und (4)

(5) $$f_o - f_\theta = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\sin\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\theta\sin\alpha\right)$$

oder

$$\varDelta_1 f_\theta = f\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right).$$

Die lineare Aberration senkrecht zum Zentralstrahl in der Fokalfläche ist nach der Figur

$$\varDelta_2 f_\theta = \varDelta_1 f_\theta \cdot \operatorname{tg}\theta$$

und die winkelige Aberration vom Zentrum O aus

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\varDelta_2 f_\theta}{f_o},$$

folglich nach Substitution von (4) und (5)

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\theta\left(1 + \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right),$$

oder bei kleinem α und θ

(7) $$\operatorname{tg}\gamma = 6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}.$$

II. Aufstellung und Auflösung der Differentialgleichung des Korrektionsspiegels.

Bei der Brennweite $f = 10$ m und dem Einfallswinkel $\alpha = 1^0$ ist $f\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = 0{,}75$ mm; sei $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ eine kleine Größe 1er Ordnung.

Beim Verhältnisse der Öffnung zur Brennweite nach (1)

$\frac{2Y}{f} = 4\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{cases}$ und $f = \begin{cases} 7.5 \text{ m} \\ 10 \text{ m} \end{cases}$ ist $f\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2} = \begin{cases} 0.75 \text{ mm} \\ 0.15 \text{ mm} \end{cases}$, angenähert derselben Ordnung wie $f\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; also $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ eine kleine Größe $\frac{2}{3}$er Ordnung im Maximum.

Die winkelige Aberration vom Zentrum O aus ist nach (7) $\operatorname{tg}\gamma = 6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$; vom Punkte P aus ist der Winkel γ angenähert von derselben Größe; vom Punkte P_1, angenähert in halber Entfernung, ist der Aberrationswinkel σ fast zweimal größer als γ, aber $\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}$ ist ungefähr derselben Ordnung wie $6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$; also $\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}$ eine kleine Größe $2\frac{1}{3}$er Ordnung im Maximum.

Die Ordinate des Punktes P_1 ist $y = SL\operatorname{tg}(\theta + \alpha)$; für $\alpha = 0$ ist angenähert $y = \frac{1}{2}OF\operatorname{tg}\theta = OF\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, bei endlichem α ist y kleiner; also y eine kleine Größe $\frac{2}{3}$er Ordnung im Maximum.

Die Abszisse x des Punktes P_1 ist bei kleinem Winkel $\frac{\sigma}{2}$, den die Tangente in P_1 mit y einschließt, angenähert gleich $y\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}$; also x eine kleine Größe 3er Ordnung im Maximum.

Gegen endliche Größen wie $f = 1$ können die kleinen Größen 2er Ordnung und höherer vernachlässigt werden.

Stellt man sich in der Entfernung $Oo = a$ senkrecht zur Achse einen Planspiegel eingeführt vor, so würden die Strahlen OF_o, PF_θ nach RF_o' und MF_θ' reflektiert.

Die Entfernung der Punkte F_o', F_θ' bleibt nach (5)

$$(8)\qquad F_o'F_\theta' = f_o' - f_\theta' = \frac{f}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\sin\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cos\theta\sin\alpha\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}f\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) = f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Wird das Spiegelelement ds vom Punkte M in der Richtung des Strahles PM parallel zu sich selbst bis zum Punkte P_1 mit den Koordinaten x, y verschoben, so wird der reflektierte Strahl MF_θ' parallel zu sich selbst in die Lage P_1K verlegt.

Sei $NK \parallel MP_1$, so wird

$$(9)\qquad NK = MP_1 = \frac{x}{\cos(\theta + \alpha)};$$

da außerdem aus dem $\triangle F_0' N K$

$$F_0' K = \frac{x \sin(2\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha) \sin\theta} = \frac{2x}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\left(\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \tfrac{1}{2}\sin\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{2x}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

so wird die lineare Aberration in der Richtung des Korrektionsstrahles jetzt

(10) $$F_e' K = F_e' F_0' + F_0' K =$$

$$= \frac{f \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) + 2x\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

Aus dem $\triangle MoL$ und nach (2) hat man

$$ML = \frac{\left[f \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + 2f \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}(\theta+\alpha) - a\right]}{\cos(\theta+\alpha)} =$$

$$= \frac{\left[f\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - 3\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) - a\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\left[f\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) - a\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}$$

und außerdem aus dem $\triangle LOF$ und nach (3)

$$LF_0 = \frac{f\left[\cos(\theta+\alpha) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin(\theta+\alpha)\right]\sin\alpha}{\cos^2\frac{\theta}{2}\sin(\theta+\alpha)} =$$

$$= \frac{f\left(2 - 3\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\sin\alpha}{2\left(\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{f\left(1 - 3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)},$$

also

(11) $$MF_0' = MF_0 = ML + LF_0,$$

und aus dem $\triangle NF_0'K$ und nach (9)

$$F_0'' N = \frac{x \sin(\theta + 2\alpha)}{\cos(\theta + \alpha)\sin\theta} = \frac{x\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(\cos\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{x\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)};$$

folglich wird aus der Figur und nach (11)

$$(12) \qquad P_1K = MN = MF'_\theta - F'_\theta N = ML + LF_\theta - NF'_\theta =$$

$$= \frac{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left[f\left(\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-4\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}\right)-a\left(\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}-4\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$- \frac{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)x\left(\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}+3\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-8\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}+2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}-4\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Die winkelige Aberration vom Punkte P_1 aus, $\sigma = \angle F'_o P_1 K$, läßt sich jetzt ermitteln aus dem $\triangle F'_o P_1 K$

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\theta-\sigma)} = \frac{F'_o K}{P_1 K},$$

oder da

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\theta-\sigma)} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\sigma}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}-\mathrm{tg}\frac{\sigma}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)},$$

wird

$$\mathrm{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{F'_o K\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{P_1K\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)+F'_o K\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)};$$

wenn in den Koeffizienten die Glieder vom größten bis zu 2er höherer Ordnung ausschließlich mitgenommen werden, nach Substitution von (10) und (12) ist

$$(13) \quad \mathrm{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{f\left(3\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}+3\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}-2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^5\frac{\theta}{2}-17\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^4\frac{\theta}{2}\right)}{(f-a)\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+2\,\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)+x\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}-24\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$+ \frac{2x\left(\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}+2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}^4\frac{\theta}{2}-8\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}\right)}{(f-a)\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+2\,\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)+x\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}^3\frac{\theta}{2}-23\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Wird jetzt dem Spiegelelement ds im Punkte P_1 eine Drehung um die Hälfte der winkeligen Aberration erteilt, so wird der Strahl PP_1, statt in früherer Richtung P_1K, nach $P_1F'_o$ reflektiert und die Aberration korrigiert.

Da die Verlängerung des Elementes ds die Tangente P_1T bildet, so ist

$$(14) \qquad \mathrm{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{dx}{dy} = x'.$$

Die winkelige Aberration ist ausgedrückt in der Funktion von θ nach (13); aus dem $\triangle P_1SL$ ist aber

$$y = \operatorname{tg}(\theta + \alpha)\left[f \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + 2f \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \operatorname{ctg}(\theta + \alpha) - a - x\right],$$

und wenn diese Gleichung nach Potenzen von $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ geordnet wird:

$$2f \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2} + \left[2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(3f - a) - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}x - y\right]\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} -$$
$$- 2\left[(f - a) - x + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}y\right]\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}a + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}x + y = 0,$$

oder da das Glied mit der 4ten Potenz um mehr als $2\frac{2}{3}$er Ordnung kleiner als das konstante ist, so kann $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ aus der quadratischen Gleichung bestimmt werden, d. h.

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}, \tag{15}$$

wo

$$\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(3f - a) - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}x - y, \quad \beta = -(f - a) + x - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}y,$$
$$\gamma = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}a + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}x + y. \tag{16}$$

Wenn $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ in (13) und (14) substituiert wird und die Glieder mit und ohne die Wurzel gesondert vereinigt werden, so ist

$$\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}\left\{x'\alpha^2\left\{(f - a)\left[(\alpha^2 + 8\beta^2 - 2\alpha\gamma) - 2\alpha\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right.\right.$$
$$\left. + x\left[(\alpha^2 - 24\beta^2 + 6\alpha\gamma) + 46\alpha\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right\}$$
$$- \left\{ f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left[(3\alpha^4 - 32\beta^4 + 24\alpha\beta^2\gamma + 9\alpha^2\beta^2 - 3\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha^2\gamma^2)\right.\right.$$
$$\left. + (136\alpha\beta^3 - 6\alpha^3\beta - 68\alpha^2\beta\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$\left.\left. + 2x\left[(8\alpha\beta^3 - 2\alpha^3\beta - 4\alpha^2\beta\gamma) + (2\alpha^4 - 32\alpha^2\beta^2 + 8\alpha^3\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right\}\right\}$$
$$= -x'\alpha^2\left\{(f - a)\left[(-\alpha^2\beta - 8\beta^3 + 6\alpha\beta\gamma) + (\alpha^3 + 2\alpha\beta^2 - \alpha^2\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right.$$
$$\left. + x\left[(-\alpha^2\beta + 24\beta^3 - 18\alpha\beta\gamma) + (\alpha^3 - 46\alpha\beta^2 + 23\alpha^2\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]\right\}$$
$$+ \left\{ f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left[(32\beta^5 - 12\alpha^2\beta^3 - 40\alpha\beta^3\gamma + 9\alpha^3\beta\gamma + 10\alpha^2\beta\gamma^2)\right.\right.$$
$$\left. + (6\alpha^3\beta^2 - 3\alpha^4\gamma - 17\alpha^3\gamma^2 - 136\alpha\beta^4 + 136\alpha^2\beta^2\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$+ 2x\left[(2\beta^5 - \alpha^4\gamma - 8\alpha\beta^4 + 8\alpha^2\beta^2\gamma - \alpha^3\gamma^2)\right.$$
$$\left.\left. + (-2\alpha^4\beta + 32\alpha^2\beta^3 - 24\alpha^3\beta\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \alpha^5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right]\right\}.$$

Werden beim Quadrieren, nach Aufhebung gleicher Glieder, in allen Koeffizienten die Glieder vom größten bis zu 2er höherer Ordnung ausschließlich mitgenommen, so ist die Gleichung:

$$\left[12f^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}(\alpha^2\beta^8 + \alpha^2\beta^7\gamma) - 16fx \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\beta^{10}\right]$$
$$+ x'\left[3f(f-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\alpha^4\beta^6 + \alpha^4\beta^5\gamma) - 4(f-a)x\cdot\alpha^2\beta^8\right] = 0.$$

Nach (16) sind hier die Glieder mit größeren Potenzen von β die größten; da die größten Potenzen von y durch β und teilweise durch α geliefert werden, in β aber das Glied mit y kleiner als das konstante ist und wenn noch in α möglichst

$$\text{(17)} \qquad \text{Maximum} \quad y < 2(3f-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad .$$

wird, so werden allgemein die konstanten Glieder die größten und die mit wachsenden Potenzen von y allmählig kleiner sein.

Die einzelnen Glieder, bis zu den angenommenen Ordnungen entwickelt, werden:

$$\alpha^2\beta^8 = 2^2(3f-a)^2(f-a)^8\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2^2(3f-a)(f-a)^8\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}y + (f-a)^8y^2,$$

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^7\gamma = &-2^3(3f-a)^2(f-a)^7a\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\\ &+\left[2^3(3f-a)(f-a)^7a\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 2^2(3f-a)^2(f-a)^7\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right]y\\ &+\left[2^2(3f-a)(f-a)^7\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 2(f-a)^7a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]y^2 - (f-a)^7y^3,\end{aligned}$$

$$\beta^{10} = (f-a)^{10},$$

$$\begin{aligned}\alpha^4\beta^6 = &\,2^4(3f-a)^4(f-a)^6\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 2^5(3f-a)^3(f-a)^6\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}y\\ &+3\cdot 2^3(3f-a)^2(f-a)^6\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}y^2 - 2^3(3f-a)(f-a)^6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}y^3 + (f-a)^6y^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^4\beta^5\gamma = &-2^5(3f-a)^4(f-a)^5a\operatorname{tg}^5\frac{\alpha}{2}\\ &+\left[2^6(3f-a)^3(f-a)^5a\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} - 2^4(3f-a)^4(f-a)^5\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\right]y\\ &+2^5\left[(3f-a)^3(f-a)^5\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} - 3\cdot 2^4(3f-a)^2(f-a)^5a\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\right]y^2\\ &+\left[2^4(3f-a)(f-a^5)a\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 3\cdot 2^3(3f-a)^2(f-a)^5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right]y^3\\ &+\left[2^3(3f-a)(f-a)^5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 2(f-a)^5a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]y^4 - (f-a)^5y^5.\end{aligned}$$

Nach Substitution ist die gesuchte Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
(18)\ \Bigg\{\Bigg[&\begin{array}{l|l|}
+2^4\cdot 3(3f-a)^2(f-a)^2f^2\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} & -2^4\cdot 3(3f-a)(f-a)^2f^2\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\\
-2^5\cdot 3(3f-a)^2(f-a)f^2a\operatorname{tg}^5\frac{\alpha}{2} & +2^5\cdot 3(3f-a)(f-a)f^2a\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\\
 & -2^4\cdot 3(3f-a)^2(f-a)f^2\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}
\end{array}\ y\\
&\begin{array}{l|}
+2^2\cdot 3(f-a)^2f^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\\
-2^3\cdot 3(f-a)f^2a\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\\
+2^4\cdot 3(3f-a)(f-a)f^2\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}
\end{array}\ y^2\ -2^2\cdot 3(f-a)f^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\,\Big|\,y^3\Bigg]-\Big[+2^4(f-a)^4f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Big]x\Bigg\}\\
+\Bigg\{\Bigg[&\begin{array}{l|l|}
+2^4\cdot 3(3f-a)^4(f-a)f\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2} & -2^5\cdot 3(3f-a)^3(f-a)f\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\\
-2^5\cdot 3(3f-a)^4fa\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2} & +2^6\cdot 3(3f-a)^3fa\operatorname{tg}^5\frac{\alpha}{2}\\
 & -2^4\cdot 3(3f-a)^4f\operatorname{tg}^5\frac{\alpha}{2}
\end{array}\ y\\
&\begin{array}{l|l|}
+2^3\cdot 3^2(3f-a)^2(f-a)f\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} & -2^3\cdot 3(3f-a)(f-a)f\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\\
-2^4\cdot 3^2(3f-a)^2fa\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} & +2^4\cdot 3(3f-a)fa\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\\
+2^5\cdot 3(3f-a)^3f\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} & -2^3\cdot 3^2(3f-a)^2f\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}
\end{array}\ y^2\ \ y^3\\
&\begin{array}{l|}
+3(f-a)f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\\
-2\cdot 3f\cdot a\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\\
+2^3\cdot 3(3f-a)f\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}
\end{array}\ y^4\ -3f\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\Big|\,y^5\Bigg]-\Big[+2^4(3f-a)^2(f-a)^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\,\Big|\\
&\qquad -2^4(3f-a)(f-a)^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\Big|\,y\ +2^2(f-a)^3\,\Big|\,y^2\Big]x\Bigg\}\frac{dx}{dy}=0.
\end{aligned}
$$

Diese Differentialgleichung ist von der Form:

$$(Y_0^1+Y^1x)+(Y_0^2+Y^2x)\frac{dx}{dy}=0;$$

sie kann nach Division durch den Koeffizienten bei $\frac{dx}{dy}$ dargestellt werden in der Form

$$(19)\qquad Y_0+Yx+\frac{dx}{dy}=0,$$

wo

$$Y_0=\frac{Y_0^1}{Y_0^2}\quad\text{und}\quad Y=\frac{Y^1-\frac{Y^2\cdot Y_0^1}{Y_0^2}}{Y_0^2}.$$

In einzelnen Teilen der Gleichung (18), und dadurch auch in (19) nehmen die Glieder mit wachsenden Potenzen von y allmählich ab, nach (17); wenn noch die Ordnung von x berücksichtigt wird, so kann der Teil Y in Gleichung (19) bis zum konstanten Gliede abgekürzt werden, und die resultierende Gleichung kann dargestellt werden in der Form:

$$\Upsilon + \mathsf{A}x + \frac{dx}{dy} = 0. \tag{20}$$

Die Gleichungen (19) und (20) können integriert werden durch die Substitution $x = uv$. Die aufgelöste Gleichung (20) ist:

$$x = \left(e^{-\int \mathsf{A}\,dy}\right)\left(c - \int \Upsilon\, e^{\int \mathsf{A}\,dy} \cdot dy\right). \tag{21}$$

Da Υ ein Aggregat von konstanten und nach Potenzen von y geordneten Gliedern darstellt, so ist das hier vorkommende allgemeine Integral von der Form:

$$\int y^m e^{ay} dy = \left[\frac{y^m}{a} - \frac{m\,y^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1)y^{m-2}}{a^3} \cdots + (-1)^m \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{a^{m+1}}\right]\cdot e^{ay}.$$

Soll für $y = 0$, $x = 0$ werden, so ist die Konstante der Gleichung (21):

$$c = (-1)^m \frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{a^{m+1}} + (-1)^n \frac{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}{a^{n+1}} + \cdots$$

Für allmählich wachsende y ist es möglich die zugehörigen x zu berechnen.

III. Diskussion.

Als Kontrolle der Gleichung (18) oder (19) ergibt sich für $\alpha = 0$, unabhängig von a, $\frac{dx}{dy} = 0$, d. h. ein Planspiegel.

In der Gleichung dieses Korrektionsspiegels sind die Koordinaten x, y in Funktion der Konstanten f, a, α ausgedrückt. Die Aberration ist für einen bestimmten Winkel α korrigiert, denn sie wird nach (7) für wachsende α größer. Aus der Figur ist aber ersichtlich, daß es durch axiale Bewegung des Korrektionsspiegels in der Richtung zum parabolischen Spiegel möglich ist den reflektierten Strahl bei größerem α vom Elemente des Korrektionsspiegels mit größerer Neigung, dagegen durch Rückwärtsbewegung bei kleinerem α vom Elemente mit kleinerer Neigung, reflektieren zu lassen. Es wird durch diese Verschiebungen in den Grenzen für α, in welchen die Neigung der Elemente des Korrektionsspiegels von o bis P_1 dazu ausreicht, eine im richtigen Sinne wirkende Korrektion der Strahlen ermöglicht.

Bei gleich dem mittleren Winkel des Gesichtsfeldes gewähltem α

ist die vorteilhafteste Höhe und die mittlere Entfernung a des Korrektionsspiegels bestimmt durch den vom Punkte des parabolischen Spiegels mit größtem θ reflektierten Strahl und dadurch, daß der zum axialen Punkte des Korrektionsspiegels reflektierte Strahl noch eben am Rande dieses Spiegels vorher vorbeigehen soll. An dem reflektierten Strahle PL soll also der Punkt M so bestimmt werden, daß der einfallende Strahl MG nach seiner Reflexion durch den Fußpunkt o des Lotes von M zur Achse hindurchgehen wird.

Es ist dann aus $\triangle\, MLo$ und $\triangle\, MGo$ bei Berücksichtigung von (1)

$$(22)\qquad oM = oL \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = f \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}(\theta + \alpha) + 2\right] - a \operatorname{tg}(\theta + \alpha)$$

und

$$oM = 2f \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\operatorname{ctg}(\vartheta + \alpha)[\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha)],$$

wo $\angle\, OFG = \vartheta$, und nach (2)

$$(23)\qquad a = f \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} + 2\operatorname{ctg}(\vartheta + \alpha)\right];$$

es läßt sich, durch Vergleichung der Werte von oM, ϑ in Funktion von f, θ, α bestimmen. Da $\operatorname{tg}\alpha = 1$er Ordnung, $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{2}{3}$er Ordnung, $\operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{1}{3}$er Ordnung, so ist es möglich, bei Berücksichtigung der Glieder bis zu 2er höherer Ordnung, ϑ aus der quadratischen Gleichung zu berechnen:

$$(24)\qquad p \operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2} + 2(m - n)\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} + m \operatorname{tg}\alpha = 0,$$

wo

$$m = f \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}(\theta + \alpha) + 2\right], \qquad n = f[\operatorname{tg}(\theta + \alpha) + 2\operatorname{tg}\alpha],$$

$$p = f[3\operatorname{tg}(\theta + \alpha)\operatorname{tg}\alpha - 4].$$

Nach den Dimensionen $f = 10m$, $\frac{2Y}{f} = 0.1$ ist aus (24), (23), (22)

für $\alpha =$	$\vartheta =$	$\alpha =$
1^0	$28'\,10''.4$	$0.3195f$
$30'$,	$39'\,46''.4$,	$0.5700f$,
$15'$	$33'\;\;2''.9$	$0.6878f$

Max. $y < Mo <$	dagegen nach (17) Max. $y <$
$0.0285f$	$0.0468f$
$0.0165f$,	$0.0212f$.
$0.0126f$	$0.0101f$

Das Beobachten mit dem Korrektionsspiegel ist ermöglicht durch eine Öffnung bei O im parabolischen Spiegel, oder durch Reflexion der korrigierten Strahlen von einem 45^0 zur Achse geneigten Spiegel, der in H, wo der äußerste korrigierte Strahl den innersten schneidet, gesetzt wird.

Durch den Meridian oP' des Korrektionsspiegels werden die Strahlen korrigiert, welche von dem Meridiane OP des parabolischen Spiegels reflektiert sind, der in derselben Ebene durch die Achse liegt und welche von dem Punkte des Objektes ausgehen, der in demselben Meridiane sich befindet; dasselbe gilt auch für andere Meridiane. Die Intensität des korrigierten Bildpunktes wird also in dem Verhältnisse größer sein, als die mit dem Auge gesehene, in welchem die Fläche des elementaren Meridians des parabolischen Spiegels größer als die der Augenpupille ist. Da die Strahlen, welche von einem Punkte des Objektes ausgehen, der in einem bestimmten Meridiane sich befindet, und welche durch den ganzen parabolischen Spiegel reflektiert sind, ein Bildchen erzeugen, das eine bestimmte Flächenausdehnung hat, so würde für Korrektion aller dieser Strahlen eine Fläche des Korrektionsspiegels nötig und die gleichzeitige Korrektion für Punkte des Objektes in anderen Meridianen nicht möglich sein. Es wäre möglich eine sukzessive Korrektion für Punkte des Objektes in allen Meridianen durch die Rotation um die Achse eines solchen Korrektionsspiegels für alle Strahlen zu erreichen. Die sukzessive Abbildung des Objektes könnte aber einfacher durch eine spiralförmige Rotation der Achse des parabolischen Spiegels selbst um das Zentrum O erreicht werden. Dazu müßte aber vor der unbeweglichen photographischen Platte in F ein durch die Achse mitgeführtes Diaphragma angebracht werden, damit nur der zentrale Lichtkegel zur Platte gelangen kann. Wenn dieser Lichtkegel von einem hyperbolischen Spiegel h reflektiert wird, der einen Brennpunkt in F hat, möglichst nahe an ihm liegt und nur die Strahlen dieses Kegels aufnimmt, so werden die nicht axialen Strahlen größtenteils am hyperbolischen Spiegel vorbeigehen und noch durch ein Diaphragma im Zentrum O des parabolischen Spiegels abgegrenzt, zur photographischen Platte, die im zweiten Brennpunkte des hyperbolischen Spiegels sich befinden sollte, nicht gelangen. Die Rotation der Achse des parabolischen Spiegels kann dann um das Zentrum des hyperbolischen Spiegels erfolgen. Die Punkte des Objektes werden dann durch die fundamentale Eigenschaft des parabolischen Spiegels in Punkten und durch die sukzessive Einstellung der Achse des Spiegels winkeltreu abgebildet.

Zürich, im Oktober 1902.

Über das natürliche Erhaltungsprinzip.

Von S. WELLISCH, Oberingenieur der Stadt Wien.

Die mechanische Begründung der *Methode der kleinsten Quadrate* hat so vielerlei Wege genommen, daß ein Rückblick auf die wichtigsten Entwicklungsstadien des mit dieser Methode verwandten mechanischen Prinzips der möglichsten Erhaltung des Naturzustandes von einigem Interesse sein dürfte.

In Anlehnung an die von Galilei in seiner Hauptschrift: „Discorsi e dimostrazioni matematiche", Leyden 1638, festgestellte Wirkungsweise der Schwere, wonach Hebungen und Senkungen durch die Quadrate der Geschwindigkeiten dargestellt werden, hat Huygens in dem Werke: „Horologium oscillatorium," Paris 1673, für das Erhaltungsprinzip das erste Fundament gelegt, indem er der erste war, welcher erkannt hat, daß dasjenige, was in der Natur erhalten bleibt, durch die Summe der Produkte aus den Massen und den Quadraten der Geschwindigkeiten auszudrücken sei. Der mit diesem Produkte verbundene Begriff der „lebendigen Kraft", welcher später von Cartesius (1686), Leibniz (1695) und den drei Bernoulli (1686—1748) eine bestimmtere Ausbildung und Aufklärung gefunden hat, wurde in dem Erhaltungsprinzip zum Gegenstand verschiedener Variationen gemacht.

In seinem Werke: „Varia opera mathematica", Tolosae 1679, hat Fermat zum ersten Male den Satz ausgesprochen, „daß die Natur immer auf den kürzesten Wegen tätig sei," oder mit anderen Worten, daß die Natur mit dem „möglich geringsten Kraftaufwand" auskomme, d. h. im Sinne des „geringsten Widerstandes" vorgehe. Diesen Gedanken hat im Jahre 1740 und einige Jahre später Maupertuis aufgegriffen, um in der Mechanik ein neues Gesetz aufzustellen, welches in seiner Abhandlung: „Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe méthaphysique" (Histoire de l'académie de Berlin, 1746) folgenden Wortlaut hat: „Wenn in der Natur eine Veränderung vorgeht, so ist die für diese Veränderung notwendige Tätigkeitsmenge die kleinst mögliche." Die für die Veränderung eines Bewegungzustandes erforderliche Tätigkeitsmenge ist als Produkt von der Form

$$m \cdot v \cdot s$$

zu denken, worin m die Masse, v die Geschwindigkeit und s den zurückgelegten Weg bedeutet. Unter der Veränderung, die in der Natur vor sich gehen und ein Minimum werden soll, wird die Differenz zwischen

zwei Tätigkeitsmengen verstanden, deren eine dem Zustande vor dem Ereignis, die andere demjenigen nach dem Ereignis entspricht, gleichviel, ob das letztere ein wirklicher oder nur ein denkbar möglicher, ein virtueller Vorgang sei.

Da diese Darstellung des Prinzips der möglichsten Erhaltung des Naturzustandes, welches man auch als das „Prinzip der kleinsten Wirkung“ (principium minimae actionis) bezeichnet, nicht klar genug durchsehen läßt, wie im allgemeinen eine unendlich kleine oder doch eine sehr geringfügige Veränderung eines Systems in der Nähe des Gleichgewichtszustandes — worauf es am meisten ankommt — zu behandeln sei, so erscheint die von Euler gegebene Fassung in differentieller Form viel exakter und deutlicher. In seiner Schrift: „Methodus inveniendi lineas curvas,“ Lausanne 1741, stellt er für die Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung das Produkt

$$m \cdot v \cdot ds$$

auf. Dieses Produkt, worin die Bewegungsgröße mv mit dem differentiellen Wegelement ds multipliziert erscheint, bezeichnet er als die augenblickliche lebendige Kraft, und das Integral dieser augenblicklichen lebendigen Kräfte zwischen zwei entsprechenden Zeitgrenzen läßt er ein Minimum werden. Mit Bezug auf die Relation

$$v = \frac{ds}{dt}$$

könnte der Eulersche Ausdruck auch geschrieben werden wie folgt:

$$m \cdot v^2 \cdot dt \quad \text{oder} \quad m\frac{ds^2}{dt}$$

und unter Zugrundelegung der Zeiteinheit:

$$m \cdot v^2 \quad \text{oder} \quad m \cdot ds^2.$$

In der Schrift: „Traité de dynamique,“ Paris 1743, gibt d'Alembert den elementaren Wirkungen die Form

$$m \cdot v \cdot dv.$$

Setzt man hierin $m = \frac{p}{g}$, $v = \frac{ds}{dt}$ und $dv = g \cdot dt$, wo p die Kraft und g die zugehörige Beschleunigung bedeutet, so hat man

$$m \cdot v \cdot dv = \frac{p}{g} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot g \cdot dt = p \cdot ds$$

d. i. das Element der *Arbeit*.

Nach Lagrange, welcher in seiner „Mécanique analytique“ Paris 1788, die Eulersche Formel analytisch insofern ausdehnte, als

er an die Stelle des eindeutigen Minimums die doppelte Möglichkeit von Maximum und Minimum einführte, könnte man dieses Prinzip als dasjenige „der größten und kleinsten lebendigen Kraft“ bezeichnen, in welcher Ausdrucksweise es sich auch unmittelbar auf den Grenzfall des Gleichgewichtes anwenden läßt, indem Lagrange nachgewiesen hat, daß unter allen Lagen eines bewegten Systems die der größten und kleinsten lebendigen Kraft entsprechende auch diejenige sei, in welche man es bringen müßte, damit es sich im Zustande des Gleichgewichtes befände.

Laplace drückt sich in seinem Werke: „Exposition du système du monde“ wie folgt aus: „Das Integral der mit dem Zeitelemente multiplizierten lebendigen Kraft eines Systems ist ein Minimum, sodaß also die wahrhafte Ökonomie der Natur diejenige der lebendigen Kraft ist.“ Dieser Auffassung, welche der Eulerschen Formulierung vollkommen entspricht, schließen sich später auch Poisson (Traité de mécanique, 1833), Hamilton (Philosophical Transactions, 1834) und Jacobi (Vorlesungen, 1842) an, jedoch unter erweiterten Gesichtspunkten, die in der analytischen Bearbeitung des Prinzips zum Ausdrucke gelangen.

Carnot läßt in seinen „Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement“, Paris 1803, den Verlust an lebendiger Kraft zu einem Minimum werden und nähert sich damit wieder der d'Alembertschen Form.

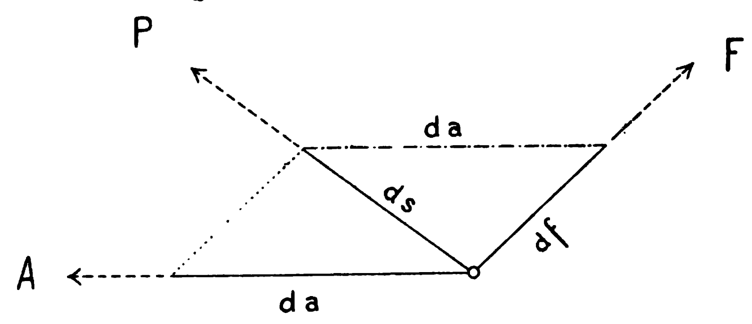
In dem Aufsatze: „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik“, (Crelle, Journal für Mathematik, Bd. IV, 1829) hat Gauß einen mit dem Prinzip der geringsten Wirkung verwandten Satz dahin formuliert: „Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äußere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblicke in möglich größter Übereinstimmung mit der freien Bewegung oder *unter möglich kleinstem Zwange*, indem man als Maß des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeitteilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punktes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.“ Unter der Ablenkung da, welche ein materieller Punkt von der Masse m in jedem Zeitteilchen erleidet, wird jener Unterschied in der Bewegung verstanden, welcher eintreten würde, wenn die Bewegung anstatt unter dem Einflusse der vorgeschriebenen Bedingungen unter demjenigen der frei wirkenden Kräfte, also ohne das Vorhandensein dieser Bedingungen ausgeführt werden würde. Nach dem Gaußschen Satze findet also die zwangloseste Bewegung unter der Bedingung statt, daß die sogenannte Ablenkungssumme

$$\sum m \cdot da^2$$

ein Minimum wird. — Ist das unter dem Einflusse der *freien* Bewegung zurückgelegte Wegelement df, das unter dem Einflusse der *gezwungenen* Bewegung ds, so erklärt das Prinzip der geringsten Wirkung aber denjenigen Grenzfall als den Gleichgewichtszustand, für welchen die Summe der Produkte $m \cdot ds^2$ ein Minimum ist. Oder betrachtet man mehrere materielle Punkte m_1 m_2 m_3 ..., welche im *freien* Zustande von den angreifenden Kräften um df_1 df_2 df_3 ..., im *verbundenen* Zustande aber um ds_1 ds_2 ds_3 ..., verschoben werden, sodaß sie vermöge ihrer Verbindungen die seitlichen Ablenkungen da_1 da_2 da_3 ... erleiden, so erfolgt die *wirkliche* Bewegung unter der Minimumsbedingung:

$$\sum m \cdot ds^2 = \text{min.}$$

Führt man die freiwirkenden Kräfte F, die von der freien Bewegung ablenkenden, durch die vorgeschriebenen Bedingungen wachgerufenen Ablenkungskräfte A und die tatsächlich zur Wirksamkeit



kommenden Resultierenden P ein, welche sich nach vorstehender Figur zusammensetzen; bezeichnet man ferner die den verschiedenen Kräften und dem gleichen Zeitteilchen dt entsprechenden Beschleunigungen mit φ, α und π, sodaß die Beziehungen bestehen:

$$F = m\varphi \qquad df = \varphi \frac{dt^2}{2}$$

$$A = m\alpha \qquad da = \alpha \frac{dt^2}{2}$$

$$P = m\pi \qquad ds = \pi \frac{dt^2}{2},$$

so erhält man die Arbeitsgleichungen:

$$\sum m \cdot df^2 = \frac{dt^2}{2} \sum m \cdot \varphi \cdot df = \frac{dt^2}{2} \sum F \cdot df$$

$$\sum m \cdot da^2 = \frac{dt^2}{2} \sum m \cdot \alpha \cdot da = \frac{dt^2}{2} \sum A \cdot da$$

$$\sum m \cdot ds^2 = \frac{dt^2}{2} \sum m \cdot \pi \cdot ds = \frac{dt^2}{2} \sum P \cdot ds.$$

Wenn im verbundenen Zustande $\frac{dt^2}{2}\sum F \cdot df = 0$ und daher $\sum A \cdot da = \sum P \cdot ds = \min$ ist, dann kann man sagen: **Es findet die wirkliche Bewegung nach dem Prinzip des kleinsten Zwanges so statt, wie nach dem Prinzip der geringsten Wirkung, nämlich derart, daß die Summe der von den Ablenkungskräften verrichteten Arbeiten ein Minimum wird.** Andernfalls müßte man, um das Gaußsche Prinzip mit dem natürlichen Erhaltungsprinzip in Übereinstimmung zu bringen, den Einfluß der freiwirkenden Kräfte in Berücksichtigung ziehen, oder es müßte das Prinzip des kleinsten Zwanges mit dem Trägheitsgesetze in Verbindung gebracht werden. (Mach: „Die Mechanik in ihrer Entwicklung"; Hertz: „Die Prinzipien der Mechanik".) In dieser Verbindung erscheint das Minimumsprinzip in der allgemeinsten Form, und in dieser erhielt es die vollkommenste und verständlichste Fassung von Castigliano durch seinen „Lehrsatz von der kleinsten Arbeit", welchen er zum ersten Male im Jahre 1873 in seiner Diplomarbeit als Ingenieur und später in seinem klassischen Werke: „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications," Turin 1879, gegeben hat. Begründet durch die Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und als eine Folgerung seiner berühmten Sätze über den Differentialquotienten der Arbeit, lautet dieser Lehrsatz wie folgt: „Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des Körpers oder des Systems zwischen den Molekülen auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insofern man die Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, daß zwischen diesen Kräften um jedes Molekül Gleichgewicht herrscht."

Der Zusammenhang des mechanischen Minimumsprinzips mit dem geometrischen Minimumsprinzip wurde schon zur Zeit der Auffindung der methodischen Ausgleichungsrechnung geahnt. Legendre, welcher die Methode der kleinsten Quadrate in einem Anhange zu seinem Werke: „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes," Paris 1805, zuerst öffentlich behandelt hat, findet die Analogie des Ausgleichungsproblems mit den Eigenschaften des Schwerpunktes bemerkenswert, indem er zeigt, daß der nach seiner Methode berechnete Mittelpunkt eines beliebigen Punktsystems mit dessen Schwerpunkt zusammenfällt. Berührungspunkte zwischen der Bestimmung des Minimumspunktes und den Gesetzen der Natur finden sich auch bei Laplace (Théorie analytique des probabilités, Paris 1812) und Gauß (Theoria combinationis, Göttingen 1821); Versuche zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate aus mechanischen Prinzipien hat die Literatur seit Ivorys Vergleich mit dem Hebelgesetze (Tilloch's Philosoph.

Magaz. 1825 und 1826) nicht wenige aufzuweisen; in besonders zutreffender Weise hat Henke in seiner Inaugural-Dissertation: „Über die Methode der kleinsten Quadrate," Dresden 1868 und 1894, die Meinung von der Möglichkeit, daß das Ausgleichungsproblem eine ganz allgemeine Bedeutung für die Auffassung von Naturvorgängen haben könne, mit den Worten zum Ausdrucke gebracht: Die durch äußere Einflüsse bewirkten Veränderungen geschehen stets so, daß die veränderten Zustände denjenigen, aus welchen sie hervorgegangen, immer möglichst nahe liegen — und daß man als mathematischen Ausdruck dieses Prinzips den Fundamentalsatz der Methode der kleinsten Quadrate zu betrachten habe.

Nach den jüngsten Untersuchungen ist man im allgemeinen zu der Behauptung berechtigt, daß die Anwendung des natürlichen Erhaltungsprinzips auf die Ausgleichungsrechnung zu der allgemeinen Theorie der kleinsten Summen führt. Wird nun im besonderen ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht die Summe der von den Ablenkungskräften allein verrichteten Arbeiten, die „Ablenkungsarbeit" zu einem Minimum gemacht, dann ist auch der mathematische Ausdruck dieses Prinzips das Fundamentalgesetz der kleinsten Quadratsummen, und es entspricht das hierbei in Anwendung kommende Rechenverfahren der Gaußschen *Methode der kleinsten Quadrate.* Wird aber die Summe der zur Erlangung des Gleichgewichts notwendigen Arbeiten, die „Deformationsarbeit", auf ein kleinstes Maß gebracht, so erweitert sich das Rechenverfahren zur *Methode der kleinsten Produkte,* wie sie zum ersten Male in der „Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen", Wien 1904, unter dem Titel: „Fehlerausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme" vom Verfasser ausführlich behandelt worden ist.

Da diese erweiterte Methode durch Einführung entsprechender, von den vorgeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen abhängender Gewichtszahlen immer auf die Gaußsche Methode zurückgeführt werden kann, so findet die eine wie die andere — unabhängig von der Wahrscheinlichkeitstheorie — nach der strengen Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme oder allgemein durch das natürliche Erhaltungsprinzip ihre mechanische Begründung.

Zur Massenberechnung im Wegbau.

Von LUDWIG SCHLEIERMACHER in Aschaffenburg.

Mit Tafel.

Zur Berechnung der Massen bedient man sich im Wegbau der Formel

$$V = \tfrac{1}{2}(Q_0 + Q_1)\,l, \tag{1}$$

in welcher Q_0, Q_1 die Flächeninhalte des Anfangs- und Endprofils einer Station bedeuten, l aber den Horizontalabstand dieser Profile, die Stationslänge. In der Praxis erweist sich die Formel als hinreichend verlässig. Es soll untersucht werden, wie weit sie genau ist für Wegkörper, welche von ebenen Flächen begrenzt, also Polyeder sind. Dementsprechend wird vorausgesetzt, daß der Weg geradlinig ist und das Gelände eben, aber von beliebigem Längs- und Quergefälle. Den Ausgangspunkt bildet ein gewisses Polyeder, für welches die Formel (1) strenge richtig ist. Es wird sich zeigen, daß sämtliche Wegkörpertypen, die unter den genannten Voraussetzungen möglich sind, hinsichtlich ihrer Gestalt nur wenig von ihm abweichen.

Als rein empirische Formel ist (1) wohl nicht anzusehen. Offenbar entspringt sie der Absicht, den i. A. unregelmäßig gestalteten Wegkörper zu ersetzen durch ein Prisma von gleicher Länge, dem dann das arithmetische Mittel der Grenzprofile näherungsweise und aus Billigkeitsgründen als Basis zuerkannt werden muß. Diese Absicht wird durch die räumliche Vorstellung gerechtfertigt, solange ein Wegkörper vorliegt, der nur aus Auftrag, oder nur aus Abtrag besteht. In andern Fällen versagt die Vorstellung. Nehmen wir einmal das Extrem: einen Wegabschnitt[1]), bei welchem das Anfangsprofil nur Auftrag, das Endprofil nur Abtrag aufweist; wie will man sich zwischen diesen Profilen ein Prisma von gleicher Länge denken, welches den Wegkörper annähernd ersetzt? Gleichwohl liefert in diesem Falle die Formel (1) ebenfalls und zwar dann ein brauchbares Ergebnis, wenn man den Inhalt des Abtragsprofils negativ nimmt. Sie ergibt nämlich ungefähr die Masse, welche zur Herstellung des Wegabschnittes anzufahren ist. Man wird hier nicht einwenden, daß die Änderung eines Vorzeichens eine willkürliche Modifikation der Formel sei, und daß durch derlei Willkürlichkeiten für irgend einen gegebenen Fall immer ein „ungefähr richtiges" Ergebnis erpreßt werden könne. Die Änderung

1) Figur 7.

erscheint mit Rücksicht auf den Gegensatz von Auftrag und Abtrag doch mindestens als plausibel; ihre Zulässigkeit aber läßt einen Übergang ahnen vom einfachen Auftragskörper zu solchen Gebilden. Man beachte die unterscheidenden Merkmale beider Gebilde! Ein Körper im gewöhnlichen Sinne ist durch eine geschlossene Fläche als durch seine Oberfläche bestimmt und umschlossen; es gibt ein „innen" und „außen"; der Begriff Inhalt ist klar. Solche Körper sollen *schlicht* heißen. Hingegen ist ein Raumgebilde, wie es oben gedacht und z. B. in Fig. 7 abgebildet ist, zwar gleichfalls durch eine geschlossene Fläche bestimmt, jedoch nicht von ihr als Oberfläche umschlossen. Denn die Fläche durchsetzt sich selbst in der sogenannten *Übergangslinie*[1]), da wo Auftrag und Abtrag keilförmig in der Oberfläche des natürlichen Geländes zusammenstoßen. Infolgedessen kann man von einem Inneren dieses Gebildes nicht reden. Auch ein solches Gebilde soll Körper, jedoch *zwerch*[2]) genannt werden. Seit Möbius steht fest, daß und wie man einem zwerchen Körper einen Inhalt, ein Volum zuzuerkennen hat. Auf eine allgemeine Entwickelung des Inhaltsbegriffes aller Raumgebilde einzugehen, ist nicht Zweck dieses Aufsatzes. Insoweit aber der Begriff hier hereinspielt, wird er erläutert. Schon im voraus sei bemerkt, daß für den oben geschilderten zwerchen Wegkörper dasjenige, was als sein Volum anzusehen ist, sich genau mit der Größe deckt, die der Praktiker zu ermitteln hat, nämlich dem Überschusse des Auftrages über den Abtrag.

§ 1. Der Klotz.

Ein Sechsflächner mit zwei Paaren paralleler Gegenflächen heiße *Klotz.*

Die beiden Paare paralleler Gegenflächen für sich allein begrenzen einen prismatischen Raum, welcher von jeder anderen Ebene in einem Parallelogramm durchschnitten wird. Insbesondere ist also das Normalprofil des prismatischen Raumes ein Parallelogramm. Daher kann der Klotz auch erklärt werden als ein beliebig (schief) abgeschnittenes vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm als Profil. Als äußerliche Kennzeichen fallen an dem Klotz (Fig. 1) zunächst ins Auge die vier parallelen Prismenkanten AE, BF, CG, DH, in welchen ein Parallelflächenpaar das andere durchschneidet. Ferner bemerkt man die beiden Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$, welche die Endpunkte der Prismenkanten zu Ecken haben. Die übrigen Flächen sind Trapeze.

---

1) Knotenlinie, Doppelkurve.

2) d. h. verwachsen oder durchwachsen. Die Kürze und die im § 2 geschilderte Erzeugung solcher Gebilde möge diese Benennung rechtfertigen.

Ein Prismatoid, d. h. ein Polyeder, dessen Ecken auf zwei parallele Grundflächen verteilt sind, ist der Klotz in doppelter Hinsicht, je nachdem man nämlich zu Grundflächen das eine oder andere Parallelflächenpaar wählt.

Bezeichnet man mit Q_0, Q_1 die Inhalte eines Parallelflächenpaares, mit l ihren Abstand, so ist das Volum V des Klotzes

$$V = \tfrac{1}{2}(Q_0 + Q_1)\,l. \tag{1}$$

Man beweist dies zunächst für den schlichten Körper, *Typus* $\mathfrak{K}$ (Fig. 1), wie folgt.[1]) Grundflächen seien $BFGC$ und $AEHD$. Durch den Mittelpunkt O einer Seitenkante AB führe man zu den Grundflächen die Parallelebene, welche die übrigen Seitenkanten DC, HG, EF in den Punkten P, R, S hälftet. Sodann führe man parallel zu den Seitenkanten EF, HG durch OP die Ebene, welche die Prismenkanten des Klotzes AE, BF, CG, DH in den Punkten X, Y, Z, U schneidet. Dann kann der Klotz aus Prismen additiv so zusammengesetzt werden[2]):

$$\text{Klotz}\ \frac{BFGC}{AEHD} = \text{Prisma}\ \frac{YFGZ}{XEHU} - \frac{OBY}{PCZ} + \frac{OAX}{PDU}.$$

Die beiden letzten Prismen sind aber volumgleich und heben sich weg. Folglich ist das Volum V des Klotzes gleich dem des ersten Prismas, welches mit ihm die Höhe l (Abstand des Grundflächenpaares) und den

1) Den folgenden Beweis, sowie die Beschreibung des schlichten Klotzes, als eines „Obelisken, in welchem außer den Grundflächen zwei weitere Grenzflächen einander parallel sind", findet man bei Heis und Eschweiler, Lehrbuch der Geometrie (2. Teil, Stereometrie). Er dient dort zur Herleitung der Volumformel des allgemeinen Obelisken (Koppeschen Satzes) auf Grund einer Zerlegung, die noch einfacher ist als die bekannte Steinersche. Schon um deswillen ist der Körper für die Stereometrie wichtig und verdient einen besonderen Namen. Wir haben den Namen Klotz gewählt, weil er kurz ist und weil solche Körper entstehen, wenn der Zimmermann einen Balken zersägt, etwa um Schifter herzustellen. Man begegnet übrigens dem Klotze in seinen vielfältigen Formen häufig genug.

2) Der Bezeichnung der Polyeder liegt hier und ferner folgende Vorstellung zugrunde. Man denke sich das Polyeder zwischen zwei Ebenen eingespannt, ein Prismatoid z. B. zwischen die Ebenen der Grundflächen. Nun bewege sich eine dritte Ebene aus der Lage der ersten in die der zweiten, indem sie den Körper immer schneidet. Es sollen dann

1. Ecken, welche derselben Lage der beweglichen Ebene angehören, auf dieselbe Zeile,
2. Ecken, die auf einer Kante liegen, welche von der 1. Ebene bis zur 2. Ebene reicht (Seitenkante) untereinander gesetzt werden.

Im Texte gestatten wir uns statt der Untereinanderstellung die Nebeneinanderstellung mit Trennung durch ein Komma.

Mittelschnitt $OPRS$ gemein hat. Wir bezeichnen den Inhalt des Mittelschnittes mit $Q_{\frac{1}{2}}$ und haben:

$$V = Q_{\frac{1}{2}} l. \tag{2}$$

Nun gilt aber für die Grundflächen des Klotzes und dieses Prismas:

$$BFGC + AEHD = \frac{YFGZ - YBCZ}{XEHU + AXUD} = \frac{YFGZ}{+XEHU} = 2 \times OSRP$$

oder:

$$Q_0 + Q_1 = 2 Q_{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

womit die Übereinstimmung von (1) und (2) erwiesen ist:

Das Volum des Klotzes ist Höhe mal Mittelschnitt, oder Höhe mal dem arithmetischen Mittel der Grundflächen.

Dasselbe Ergebnis liefert auf Grund von (3) auch die bekannte Simpsonsche Formel:

$$V = \tfrac{1}{6}\left(Q_0 + Q_1 + 4 Q_{\frac{1}{2}}\right) l, \tag{S}$$

welche für jedes Prismatoid gilt.

§ 2. Gestaltsänderungen.

Irgend eine Ebene, welche die Prismenkanten schneidet, zerlegt den Klotz in zwei Körper derselben Art. Insbesondere trennt (Fig. 2) die Ebene $GHE'F'$ von dem Klotze das gleichhohe dreiseitige Prisma über der Grundfläche $F'FG$ ab, das als Klotz angesehen werden kann, in welchem die durch G und H laufenden Prismenkanten unendlich klein sind. Wir bezeichnen das Volum des Prismas mit V^*. Es erscheint dann der übrigbleibende Klotz — er heiße *Restkörper* — als Differenz von zwei gleichhohen schlichten Klötzen, nämlich

$$\frac{BF'GC}{AE'HD} = \frac{BFGC}{AEHD} - \frac{F'FG}{E'EH} \tag{4}$$

oder, wenn V' das Volum des Restkörpers

$$V' = V - V^*. \tag{4a}$$

Grundflächen und Mittelschnitt des Restkörpers sind gleichfalls Differenzen, z. B.

$$BF'GC = BFGC - F'FG \tag{5}$$

oder, wenn wir mit $\varDelta$ den Inhalt des Dreiecks $F'FG$ bezeichnen und die Inhalte der Grundflächen und des Mittelschnittes des Restkörpers mit Q_0', Q_1', $Q_{\frac{1}{2}}'$:

$$Q_0' = Q_0 - \varDelta, \quad Q_1' = Q_1 - \varDelta, \quad Q_{\frac{1}{2}}' = Q_1 - \varDelta \tag{5a}$$

und deswegen gelten für den Restkörper auch die Beziehungen (2) und (3) in der Form:

$$(6) \qquad V' = Q'_{\frac{1}{2}}\, l, \quad Q'_0 + Q'_1 = 2\, Q'_{\frac{1}{2}}.$$

Dreht man jetzt die Ebene $GHE'F'$ um GH, so bleiben für alle ihre Lagen die vorstehenden Gleichungen (4), (4a), (5), (5a), (6) in Geltung: zunächst solange wie in Fig. 2 der Punkt F' zwischen F und B, S' zwischen S und O, E' zwischen E und A verharrt, aber auch dann noch, wenn diese Punkte einer nach dem andern das betreffende Intervall überschreiten, wie in Fig. 3 und 4 — sofern man nur die Inhalte der Grundflächen, des Mittelschnittes und des Restkörpers, welche dabei teilweise oder sämtlich zwerche Gestalt annehmen, im Anhalte an die Gleichungen (4), (4a), (5), (5a) erklärt.

Demzufolge hat man in Fig. 3 mit Rücksicht auf (5) als Inhalt des zwerchen Trapezes $BF'GC$ anzusehen die Differenz der Dreiecke GCL und $LF'B$, da bei dieser Lage von F' Minuend und Subtrahend in (5) den Flächenteil $BFGL$ gemein haben, der also von beiden abgezogen werden darf.

Der Restkörper in Fig. 3 hat eine Übergangslinie IL erhalten, längs welcher sich seine Oberfläche durchsetzt, ist aber gleichwohl im Sinne der Erklärung des § 1 ein Klotz geblieben. Wir bezeichnen diese Gestalt des zwerchen Klotzes fernerhin als *Typus* $\mathfrak{K}'$. Sein Volum V' muß im Anhalte an (4) erklärt werden als Differenz der beiden schlichten Körper, welche längs IL zusammenstoßen, nämlich[1])

$$\begin{matrix} BF'GC \\ AE'HD \end{matrix} = J \begin{matrix} & LGC \\ AE' & HD \end{matrix} - \begin{matrix} BF'L \\ J \end{matrix},$$

welche übrig bleiben, nachdem Minuend und Subtrahend in (4) befreit sind von dem ihnen gemeinsamen schlichten Körperteil

$$J \begin{matrix} LGFB & \\ HE & E' \end{matrix}.$$

Rückt bei weiterer Drehung der Ebene $GHE'F'$ auch E' über A hinaus, wie in Fig. 4, so werden beide Grundflächen und der Mittelschnitt des Restkörpers zwerche Trapeze, deren Inhalte wie oben zu verstehen sind.

Der Restkörper (Fig. 4) verliert dabei nicht die definierenden Eigenschaften eines Klotzes; doch ist seine Gestalt, die wir als *Typus* $\mathfrak{K}''$ des zwerchen Klotzes bezeichnen, wesentlich verschieden von der des Typus $\mathfrak{K}'$. Er wird gebildet von den beiden dreiseitigen Pyramiden,

1) In der Figurentafel sind positive und negative Teile zwercher Körper durch rote und gelbe Farbe unterschieden.

welche in der Übergangslinie NL zusammenhängen, und sein Volum ist ihrer Differenz gleichzusetzen, da die Gleichung (4) nach Beseitigung des dem Minuenden und Subtrahenden gemeinsamen Körperteiles

$$\begin{matrix} LGFB \\ NHEA \end{matrix}$$

(eines schlichten Klotzes) die Form annimmt:

$$\frac{BF'GC}{AE'HD} = \frac{LGC}{NHD} - \frac{BLF'}{ANE'}.$$

Als unterscheidende Merkmale der drei Typen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ heben wir hervor:

bei $\mathfrak{K}$ besteht jedes Paar paralleler Gegenflächen (Prismenflächen) aus schlichten Trapezen,

bei $\mathfrak{K}'$ ist von jedem Paare eine Fläche ein schlichtes, die andere ein zwerches Trapez,

bei $\mathfrak{K}'$ besteht ein Paar aus schlichten, das andere aus zwerchen Trapezen.

Man beachte, daß in diesem Paragraphen der Typus $\mathfrak{K}''$ auf dem Paare der zwerchen Trapeze als Grundflächen aufgestellt ist.[1])

§ 3. Fortsetzung.

Bei den vorstehend geschilderten Gestaltsänderungen des Klotzes wurde die Ebene $EFGH$ um die Seitenkante GH gedreht und dies hatte zur Folge, daß gleichzeitig beide Grundflächen ihre Gestalt veränderten. Man kann aber die Ebene auch um eine Grundkante, z. B. um HE drehen, dann bleibt die zugehörige Grundfläche, hier $AEHD$, ungeändert. Sei nun $HEF'G'$ (Fig. 2) eine Lage der sich drehenden Ebene, so zerlegt auch sie den schlichten Klotz $\mathfrak{K}$, von dem wir wiederum ausgehen, in zwei Klötze. Davon ist einer eine dreiseitige Pyramide, nämlich derjenige, dessen durch E und H laufende Prismenkanten null sind: sein Volum sei V_0. Der andere heiße Restkörper; sein Volum sei V'. Es ist:

$$\frac{BF'G'C}{AEHD} = \frac{BFGC}{AEHD} - \frac{F'FGC}{EEHH} \tag{7}$$

oder

$$V' = V - V_0.$$

Sei Π der Inhalt des Parallelogramms $F'FGG'$, so ist $\frac{1}{2}\Pi$ der Inhalt des Parallelogramms $S''SRR'$. Bezeichnet man ferner die Inhalte der

1) Über einem zwerchen Trapeze als Grundfläche läßt sich selbstverständlich auch ein Prisma errichten. Man kann also die oben geschilderte Veränderung des Inhaltes auch am Prisma studieren.

Grundflächen und des Mittelschnittes des Restkörpers mit Q_0', Q_1', $Q_{\frac{1}{2}}'$, so ist:

$$Q_0' = BF'G'C = BFGC - F'FGG' = Q_0 - \Pi$$
$$(8) \qquad Q_{\frac{1}{2}}' = OS''R'P = OSRP - S''SRR' = Q_{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\Pi$$
$$Q_1' = Q_1, \quad V_0 = \tfrac{1}{2}\Pi l,$$

somit

$$(9) \qquad V' = Q_{\frac{1}{2}}'l, \quad Q_0' + Q_1' = 2\,Q_{\frac{1}{2}}'.$$

Diesen Gleichungen erteilen wir nun wieder dauernde Gültigkeit für jede Lage der sich drehenden Ebene, so für Fig. 5 wie für Fig. 6, welche, wie man leicht sieht, wiederum den Typus $\mathfrak{K}'$ bezw. $\mathfrak{K}''$ darstellen. Im Gegensatze zu § 2 und Fig. 4 hat jedoch $\mathfrak{K}''$ hier das schlichte Parallelflächenpaar zu Grundflächen.

Man erkennt im Anhalte an (7), daß die Volume dieser Körper genau wie oben bei Fig. 3 und 4 zu erklären sind. Dasselbe gilt mit Rücksicht auf (8) auch für ihre Grundflächen und den Mittelschnitt. Besondere Beachtung aber verdient dabei, daß in Fig. 6 die Grundfläche $BF'G'C$ (vergl. 8), als Differenz, deren Subtrahend den Minuenden gerade um diese Fläche übertrifft, einen negativen Inhalt Q_0 gewinnt.[1]) Bei weiterer Drehung der Ebene kann auch der Mittelschnitt und somit das Volum V' negativ werden.

Hiermit ist jetzt dargetan, daß die Volumformel (1) und (2) § 1 für alle drei Typen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ gilt[2]), und was darin in jedem einzelnen dieser drei Fälle V, Q_0, Q_1, $Q_{\frac{1}{2}}$ bedeuten.

Über den Klotz noch folgende Bemerkungen: er ist offenbar das stereometrische Analogon des Trapezes und kann (wie dieses dem Parallelogramm) dem Parallelepiped, als ein Stück von ihm, angereiht werden. Irgend ein Parallelschnitt zu den Grundflächen, dessen Abstand von Q_0 sich zur Höhe l verhält wie $\xi : 1$, hat den Inhalt $Q_0 + (Q_1 - Q_0)\,\xi$.

1) Man beachte, daß der negative Charakter der Fläche sich verrät in dem Sinne des Umlaufs, welcher der konsequent beibehaltenen Bezeichnung $BFGC$ (Fig. 1), $BF'G'C$ (Fig. 2, 5, 6) folgt. Wenn nämlich auf der wagrecht gedachten Grundfläche eine Person in Fig. 1 den Weg $BFGCB$ zurücklegt, bleibt ihr die umlaufene Fläche zur Rechten. Dagegen bleibt ihr in Fig. 6 die umlaufene Grundfläche $BF'G'C$ zur Linken. Den Übergang bildet Fig. 5: hier bleibt auf dem Wege $BF'G'CB$ die Fläche $BF'L$ zur Linken, $LG'C$ zur Rechten des Umlaufenden. Es entspricht dies der Tatsache, daß als Inhalt des zwerchen Trapezes $BF'G'C$ die Differenz $LG'C - BF'L$ wegen (8) zu betrachten ist.

2) Sie gilt auch für die Zwischenformen dieser Typen, auf welche hier ebensowenig eingegangen werden soll, wie auf andere Spezialisierungen des Klotzes.

Da der Klotz zwei Mittelschnitte und zugehörige Höhen besitzt, besteht zwischen diesen vier Größen eine Gleichung. Sie sagt nichts anderes aus, als daß das Profil, ein Parallelogramm, zweierlei Grundlinie nebst Höhe hat. Dies ergibt sich, wenn man durch einen Punkt der Schnittlinie beider Mittelschnitte, der sogenannten Schwerachse, den Profilschnitt führt. Man findet dabei, daß das Volum des Klotzes auch gleich dem Produkte aus Schwerachse und Profil ist, wie es der schöne Satz von Meier-Hirsch für alle schiefabgeschnittenen Prismen fordert.

Der Klotz ist übrigens nicht das allgemeinste vierseitige Prismatoid, dessen Volum durch (1) gegeben ist. Dieses hat folgende Eigenschaft: Legt man durch einen Punkt auf einer der Grundflächen zu jedem Paare gegenüberstehender Seitenkanten die Parallelebene, so schneiden diese die Grundfläche in derselben Geraden.

§ 4. Wegkörperformen.

Auf dem ebenen Gelände $ABTCDS$ (Fig. 7) von beliebigem Längs- und Quergefälle werde ein geradliniger Weg mit wagrechter Krone (Kronenbreite $EF = HG = w$) erbaut zwischen dem senkrechten Anfangsprofil $ABFE$ (Auftrag) und dem Endprofil $DCGH$ (Abtrag). Das Böschungsverhältnis sei sowohl zu beiden Seiten, wie auch für Auf- und Abtrag das nämliche und gleich β.[1]) Die Geländeebene $ABCD$ durchsetzt die Wegfläche $EFGH$ längs der Übergangslinie ST. Irgend ein Zwischenprofil, welches ST nicht trifft, zeigt nur Auftrag oder nur Abtrag; trifft es aber ST, so entsteht ein zwerches Viereck, in welchem gleichzeitig Auf- und Abtrag vorhanden ist. Durch Einschaltung von mehr Zwischenprofilen kann man Stationen abgrenzen, für welche die zugehörigen Wegkörper einen der folgenden vier Typen aufweisen, welche bezw. dargestellt sind in Fig. 8, 9, 10, 7:

I. Beide Grenzprofile sind gleichzeitig Auftrag oder Abtrag,

II. Ein Grenzprofil hat nur Auftrag (oder Abtrag), das andere ist gemischt,

III. Beide Grenzprofile sind gemischt aus Auftrag und Abtrag,

IV. Ein Grenzprofil hat nur Auftrag, das andere nur Abtrag.

Es mögen diese Typen in ihrer Reihenfolge einzeln betrachtet und ihr Volum berechnet werden. Der Abstand der Grenzprofile, die Stationslänge, sei durchgehends mit l bezeichnet.

1) Dies trifft in der Praxis nicht immer zu. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß die vorstehenden Annahmen auch die Gräben längs der Abtragsböschungen nicht berücksichtigen.

Wegkörper I.

Legt man in Fig. 8, welche einen Auftragkörper vom Typus I darstellt, durch C zur Böschungsebene $AEHD$ die Parallelebene CLM und erweitert beide Böschungsebenen bis zur Schnittkante JK, so kann der Wegkörper wie folgt zusammengesetzt werden:

$$\frac{DCGH}{ABFE} = \text{Klotz}\ \frac{DCOK}{AMLJ} - \text{Prisma}\ \frac{HGK}{EFJ} + \text{Pyram.}\ \frac{C}{MBL}.$$

Die rechts stehenden Prismatoide haben für die angeschriebenen Grundflächen alle dieselbe Höhe l. Bezeichnet man die absoluten Werte der Inhalte der vorgenannten Grundflächen des Wegkörpers bezw. mit $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_0$, des Prismas mit Δ, der Pyramide mit δ[1]), so ergibt sich für das Volum V des Wegkörpers:

$$V = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{O}_0 + \Delta - \delta) + (\mathfrak{O}_1 + \Delta)]\, l - \Delta l + \tfrac{1}{3}\delta l$$

oder:

(I) $$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1)\, l - \tfrac{1}{6}\delta l.$$

Man vernachlässigt also bei Anwendung der herkömmlichen Formel den Betrag $\frac{1}{6}\delta l$, d. h. *die Hälfte der obengenannten Pyramide.* Um $\mathfrak{O}_0$, $\mathfrak{O}_1$, V durch die Abmessungen der Profile auszudrücken, projiziere man die Punkte A, B, C, D in die betreffende Krone nach A', B', C', D' und bezeichne:

$$AA' = a, \quad BB' = b, \quad CC' = c, \quad DD' = d, \quad EF = HG = w,$$

so ist unter Benutzung des Böschungsverhältnisses β:

$$A'E = \beta a, \quad B'F = \beta b, \quad C'G = \beta c, \quad D'H = \beta d.$$

Durch Zerlegung des Profiles $ABFE$ in die Differenz des Trapezes $ABB'A'$ und des Dreieckspaares AEA', $BB'F$ findet man seinen Inhalt:

(10) $$\mathfrak{O}_0 = \tfrac{1}{2}(a+b)(\beta a + w + \beta b) - \tfrac{1}{2}\beta a a - \tfrac{1}{2}\beta b b = \tfrac{1}{2}w(a+b) + \beta ab.$$

Um $\mathfrak{O}_1$ zu bilden, hat man hierin a und b bezw. durch d und c zu ersetzen:

(11) $$\mathfrak{O}_1 = \tfrac{1}{2}w(d+c) + \beta dc.$$

Planimetrische Konstruktionen zur Berechnung von δ vermeidend betrachte man den Wegkörper als Prismatoid mit den Grundflächen $\mathfrak{O}_0$, $\mathfrak{O}_1$ und der Höhe l und bestimme seinen Inhalt nach der bekannten Simpsonschen Formel (§ 1, (S))

$$V = \tfrac{1}{6}\left(\mathfrak{O}_0 + \mathfrak{O}_1 + 4\mathfrak{O}_{\frac{1}{2}}\right) l,$$

1) Den Mittelschnitt der Pyramide, also den 4. Teil von δ nennt Koppe „Ergänzungsfigur".

in welcher $\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}}$ den Inhalt des Mittelschnittes bedeutet, der sich, wie man leicht sieht, aus $\mathfrak{Q}_0$ ergibt, wenn man darin a durch $n = \frac{1}{2}(a + d)$ und b durch $p = \frac{1}{2}(b + c)$ ersetzt, also:

$$\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} w (n + p) + \beta n p,$$

so ist:

$$\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1 - 2\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\beta (a - d)(b - c) \text{ oder } 4\mathfrak{Q}_{\frac{1}{2}} = 2(\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1) - \beta(a - d)(b - c),$$

mithin, wenn man diesen Wert in die Simpsonsche Formel bringt:

$$\text{(Ia)} \qquad V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1) l - \tfrac{1}{6}\beta (a - d)(b - c) l.$$

Durch Vergleichung dieses Ergebnisses[1]) mit (I) erkennt man, daß $\delta = \beta (a - d)(b - c)$ ist, was sich auch direkt bewahrheiten läßt.

Zwischen a, b, c, d, w, β besteht übrigens eine Gleichung, die man erhält, indem man das Quergefälle des Geländes in jedem der beiden Grenzprofile bildet und die beiden Werte gleichsetzt, nämlich:

$$(b - a) : [a\beta + w + b\beta] = (c - d) : [d\beta + w + c\beta]$$

oder:

$$\text{(12)} \qquad w (b - a - c + d) = 2\beta (ac - bd).$$

Wegkörper II.

Fig. 9 gibt das Bild eines *Auftrag*körpers vom Typus II.[2])

Die linkseitige Abtragböschungsebene DHS ist zur rechtseitigen Auftragböschungsebene $GCBF$ parallel. Erweitert man die erstere, so trennt sie vom Auftrage die Pyramide S, AKE ab, und es bleibt ein zwercher Klotz, Typus $\mathfrak{K}'$, übrig mit den Prismenkanten KE, BF, CG, DH, d. h. man hat folgende Zerlegung des Wegkörpers:

$$S\,{}^{ABFE}_{D\ \ CGH} = {}^{KBFE}_{DCGH} + {}^{S}_{AKE}.$$

1) E. von Dambrowski, Inhaltsberechnung bei Erdbauten, Teubner 1876, gibt diese Formel für den speziellen Fall, wo das Gelände kein Quergefälle besitzt. Auf die Zerlegung dieses Typs in Prisma und Keil weist neuerdings Herr Chr. Nielsen hin in den Unterrichtsblättern für Math. u. Nat. 1903, IX Nr. 6. Ferner erschienen nach Druck vorliegender Arbeit zwei Aufsätze, deren Verfasser sich mit Ausdehnung des Koppeschen Satzes auf Prismatoide mit windschiefen Seiten befassen und solche zu Erdmassenermittelung benützen, nämlich Herr Ch. A. Vogler, Zeitschr. f. Vermessungswesen, Bd. XXXIV, S. 169 und Herr Ingenieur Puller, Zentralbl. d Bauverwaltung, Jahrg. XXV, S. 207. Solche Körper behandelt Herr Lucke unter dem Namen Zentralkörper (Leitf. der Stereometrie. Teubner 1890).

2) Das Gegenstück hierzu, einen Wegkörper II mit überwiegendem Abtrag, würde in Fig. 7 ein Querprofil, welches ST schneidet, zusammen mit dem Endprofil $DCGH$ begrenzen.

Wird der Überschuß des Auftrages über den Abtrag für die Station mit V bezeichnet, der absolute Inhalt des Auftragprofiles $ABFE$ mit $\mathfrak{Q}_0$, des Dreiecks AKE mit δ, des zwerchen Trapezes $DCGH$, d. h. der Überschuß des Dreiecks TCG über THD, mit $\mathfrak{Q}_1$, ferner die Höhe der Pyramide mit x, so ist

$$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 - \delta) + \mathfrak{Q}_1]\, l + \tfrac{1}{3}\delta x$$

oder:

(II) $$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1)\, l + \delta\left(\tfrac{1}{2} l - \tfrac{1}{3} x\right).$$

Bei Anwendung der Erfahrungsformel (I) vernachlässigt man also den Unterschied zwischen der Hälfte eines Prismas von der Höhe l und der Pyramide von der Höhe x, beide über derselben Grundfläche δ.

Es soll die Formel (II) in den Abmessungen des Wegkörpers ausgedrückt werden. Wenn man wie oben die Punkte A, B, C, D, K in die Kronen projiziert und

$$AA' = a, \qquad BB' = b, \qquad CC' = c, \qquad DD' = d, \qquad KK' = k$$

setzt, so ist wieder (vergl. 10)

(10) $$\mathfrak{Q}_0 = \frac{w}{2}(a + b) + \beta a b.$$

Zieht man durch D, K in den Profilen die Horizontalen DD^*, KK^*, welche CC', CG, BB' in D^*, G^*, C^* schneiden, so ist

$$\mathfrak{Q}_1 = TCG - THD = DCG^* - DHGG^* = \tfrac{1}{2} w(c + d) - wd$$

oder

(13) $$\mathfrak{Q}_1 = \frac{w}{2}(c - d).$$

Der Wert von δ ergibt sich aus dem Werte von $\mathfrak{Q}_0$, wenn man $w = 0$ und k an Stelle von b schreibt, was man geometrisch durch Parallelverschiebung von BF in die Lage von KE erläutern kann. Also ist

(14) $$\delta = \beta a k.$$

Da $KB \perp\!\!\!\perp DC$, ist $KBK^* \cong DCD^*$, also $BK^* = CD^*$ oder $b - k = c + d$, also

$$k = b - c - d, \quad k + d = b - c.$$

Faßt man den Punkt S als Teilpunkt der Strecke EH ins Auge und denkt sich durch ihn die Stationslänge geführt, so findet man — und weiterhin mittels ähnlicher Dreiecke:

$$\frac{x}{l - x} = \frac{SE}{SH} = \frac{EK}{HD} = \frac{KK'}{DD'} = \frac{k}{d},$$

woraus

$$x = l \frac{k}{k + d}.$$

Hiermit erhält man schließlich

(IIa) $$V = \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1)l - \frac{1}{6}\beta l a \frac{(b-d-c)(b-c+2d)}{b-c}.$$

Wie bei Wegkörper I besteht auch hier zwischen a, b, c, d, w, β eine Gleichung, die *Quergefällrelation*, die man wie dort findet. Sie lautet hier:

(15) $$w(b-a-c-d) = 2\beta a(c+d).$$

Wegkörper III.

Der Wegkörper III (Fig. 10) ist ein zwercher Klotz, Typus $\mathfrak{K}''$, mit den Prismenkanten AE, BF, CG, DH. Zwei Gegenflächen, nämlich die Böschungsebenen, sind schlichte Trapeze; die beiden anderen, nämlich die Grenzprofile, sind zwerche Trapeze. Als Parallelogrammflächen treten die Wegfläche und die Geländefläche hervor.

Wir berechnen, wie bei (II), die für die Station erforderliche Masse, den Überschuß V des Auftrages über den Abtrag. Wie im § 2 gezeigt wurde, ist V nichts anderes als das Volum des zwerchen Klotzes. Bezeichnet man also die Inhalte der zwerchen Trapeze $ABFE$, $DCGH$ bezw. mit $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_1$ und nimmt hierbei den Auftrag positiv, den Abtrag also negativ, so ist:

(III) $$V = \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1)l.$$

Die Erfahrungsformel ist für den Wegkörper III in aller Strenge genau. Das Endprofil von II stimmt in der Form überein mit den Grenzprofilen von III, also ist bei analoger Bezeichnung (vergl. 13)

$$\mathfrak{Q}_0 = \frac{1}{2}w(b-a), \quad \mathfrak{Q}_1 = \frac{1}{2}w(c-d).$$

Um die Quergefällrelation zu bilden, ziehe man in den Grenzprofilen die Horizontalen AJ und DK. Die Ebene $AJKD$ wird dann von den Böschungsebenen in den parallelen Kanten AD, JK geschnitten, die Geländeebene in den parallelen Kanten AD, BC. Der Körper

$$\begin{matrix} ABJ \\ DCK \end{matrix}$$

ist also ein Prisma und die Höhen in den Grundflächen sind gleich, d. h.

(16) $$a + b = c + d.$$

Dies ist die *Quergefällrelation*; sie ist hier von w und β unabhängig. Man kann sie zur Vereinfachung der Volumformel benutzen und findet folgende gleichberechtigte Werte für V:

(IIIa) $$V = \frac{1}{2}w(c-a)l = \frac{1}{2}w(b-d)l.$$

Es ist hier leicht, diese Formel aufzustellen, ohne die Begriffe des § 2 zu benützen. Man denke sich nämlich den Wegkörper wie folgt hergestellt: zunächst werde auf das Gelände $ABCD$ das obenerwähnte Prisma ABJ, DCK aufgetragen, sodann von dem hierdurch umgeformten (unebenen) Gelände der schlichte Klotz

$$\begin{matrix} AEFJ \\ DHGK \end{matrix}$$

abgetragen. Der Unterschied zwischen Prisma und Klotz ist dann die erforderliche (anzufahrende) Masse, oben mit V bezeichnet. Die Grundfläche des Prismas hat den Inhalt $\frac{1}{2}w(a+b) = \frac{1}{2}w(c+d)$, die Grundflächen des Klotzes bezw. wa, wd; die Höhen beider Körper sind gleich l, folglich ist:

$$V = \tfrac{1}{2}w(a+b)l - \tfrac{1}{2}[wa + wd]l = \tfrac{1}{2}w(b-d)l.$$

Wegkörper IV.

Erweitert man in Fig. 7 die linkseitige Abtragböschungsebene DHS bis zum Schnitte EK_0 mit dem Anfangsprofil, bringt ebenso die zu ihr parallele Auftragböschungsebene BFT in GK_1 zum Schnitte mit dem Endprofil, so zerlegen diese Böschungsebenen den Wegkörper in einen zwerchen Klotz, Typus $\mathfrak{K}''$, mit den Prismenkanten K_0E, BF, K_1G, DH, außerdem in die Pyramiden S, AK_0E und T, K_1GC.

Sei $\mathfrak{Q}_0$ der absolute Inhalt des Anfangsprofiles $ABFE$, $\mathfrak{Q}_1$ des Endprofils $DHGC$, δ_0 und δ_1 bezw. der Pyramidenbasis AK_0E und K_1GC, sei ferner x_0 und x_1 bezw. die zugehörige Pyramidenhöhe, so sind $\mathfrak{Q}_0 - \delta_0$, $\mathfrak{Q}_1 - \delta_1$ die absoluten Inhalte des schlichten Parallelflächenpaares genannten Klotzes, das wir als Grundflächenpaar wählen. Nach § 3 ist das Volum des Klotzes dann gleich dem halben Produkt aus der Differenz der absoluten Inhalte dieser Grundflächen in die Höhe l, wobei als Minuend die Auftragsgrundfläche zu nehmen ist, wenn das Volum als Überschuß des Auftrages über den Abtrag berechnet werden soll. Für den ganzen Wegkörper soll dieser Überschuß wieder mit V bezeichnet werden, dann ist:

$$V = \tfrac{1}{2}[(\mathfrak{Q}_0 - \delta_0) - (\mathfrak{Q}_1 - \delta_1)]\,l + \tfrac{1}{3}\delta_0 x_0 - \tfrac{1}{3}\delta_1 x_1$$

oder

$$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 - \mathfrak{Q}_1)l + \tfrac{1}{2}(\delta_1 - \delta_0)l + \tfrac{1}{3}\delta_0 x_0 - \tfrac{1}{3}\delta_1 x_1. \tag{IV}$$

die genaue Massenformel, welche mit der Erfahrungsformel $\frac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 - \mathfrak{Q}_1)l$ zu vergleichen ist.

Projiziert man die Punkte A, B, C, D, K_0, K_1 bezw. nach $A', B', C', D', K_0', K_1'$ in die betreffende Krone und setzt:

$$AA' = a, \quad BB' = b, \quad CC' = c, \quad DD' = d, \quad K_0K_0' = k_0, \quad K_1K_1' = k_1,$$

Fig. 3.

E′ A O S′ J B D F

K₁ K′₁ G T F K′₀ K₀ D D′ H

9.

S A′ E K′ A K

II.

B. G. Teubner, Le

so ist (vergl. 10)

$$\mathfrak{Q}_0 = \tfrac{1}{2} w(a+b) + \beta ab, \quad \mathfrak{Q}_1 = \tfrac{1}{2} w(c+d) + \beta cd.$$

Weil die beiden Pyramiden spiegelähnlich sind, gilt die Proportion:

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{a}{c}.$$

Denkt man sich auch die linke Auftrag- und die rechte Abtragböschungsebene mit dem End- bezw. Anfangsprofil zum Schnitte gebracht, so entstehen zwei weitere Pyramiden, die unter sich spiegelähnlich sind, und für diese gilt ebenso:

$$\frac{l - x_0}{l - x_1} = \frac{d}{b},$$

ferner gilt für die spiegelähnlichen Pyramiden mit der gemeinsamen Spitze S, und für die mit der Spitze T:

$$\frac{x_0}{l - x_0} = \frac{k_0}{d}, \quad \frac{x_1}{l - x_1} = \frac{k_1}{b}.$$

Wie man erkennt, bleiben die vier Proportionen ungeändert, wenn gleichzeitig a mit c, b mit d, der Index 0 mit 1 vertauscht wird. Diese Vertauschung ist also auch auf jede Gleichung anwendbar, die aus den Proportionen abgeleitet werden kann. Man findet nun

$$\frac{x_0}{x_1 - x_0} = \frac{a}{c - a}, \quad \frac{l - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{d}{d - b}$$

und hieraus unter Benutzung von

(17) $$x_0 = l \cdot \frac{a(d-b)}{cd - ab}, \quad k_0 = a\frac{d-b}{c-a},$$

mithin ist:

(18) $$x_1 = l \cdot \frac{c(b-d)}{ab - cd}, \quad k_1 = c\frac{b-d}{a-c}.$$

Nun geht durch Parallelverschiebung der Geraden BF in die Lage von K_0E die Fläche $\mathfrak{Q}_0$ in δ_0, b in k_0 über, während w verschwindet; also ist

(19) $$\delta_0 = \beta a k_0 = \beta a^2 \frac{d-b}{c-a} \quad \text{und} \quad \delta_1 = \beta c^2 \frac{b-d}{a-c}.$$

So findet man:

$$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 - \mathfrak{Q}_1) l + \tfrac{1}{2}\beta \frac{b-d}{a-c}(c^2 - a^2) l - \tfrac{1}{3}\beta \frac{(d-b)^2(c^3 - a^3)}{(cd-ab)(c-a)} l$$

oder

$$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 - \mathfrak{Q}_1) l + \tfrac{1}{6}\beta l \frac{d-b}{cd-ab}[3(c+a)(cd-ab) - 2(d-b)(c^2+ca+a^2)]$$

und da der Ausdruck in [ ] für $c = a$ verschwindet, also den Faktor $c - a$ besitzen muß

(IVa) $$V = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}_0 - \mathfrak{Q}_1) l + \tfrac{1}{6}\beta l \frac{(d-b)(c-a)[ab + cd + 2ad + 2bc]}{cd - ab}.$$

Die Quergefällrelation lautet hierbei:

(20) $$w[(d-c) - (b-a)] = 2\beta(bc - ad).$$

Kleinere Mitteilungen.

Anfrage.

P. S., H. Wo findet man *Tafeln* des *Integrallogarithmus?* Ist Soldners Tafel, München 1809, brauchbar? In der Enzyklopädie der mathem. Wiss., Bd. II, S. 175, heißt es: „Tafeln sind von Bessel und Gauß berechnet worden." Wo stehen diese Tafeln? In Gauß' Werken, II, S. 438—443, finden sich nur einzelne Werte.

Bücherschau.

Schüßler, R., Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. 8⁰, VII u. 170 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Preis geb. M. 7.

Das seltene Erscheinen von Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, die von den ausgetretenen und schon etwas langweilig gewordenen Mongeschen Pfaden nach irgend einer Richtung abweichen, rechtfertigt wohl den Ausdruck, daß ich das vorliegende eigenartige Büchlein freudig begrüße. Sein Grundgedanke, sämtliche Konstruktionen im axonometrischen Bilde ohne Zurückgehen auf eine zweite orthogonale Projektion durchzuführen, sowie die Angabe von Wegen, auf denen man zu diesem Ziele gelangen kann, stammen freilich von C. Pelz. Dem Verfasser gebührt jedoch das Verdienst, die einfachen Lösungen, zu denen Pelz in seinen Abhandlungen gelangt ist, einmal so dargestellt zu haben, daß jeder ohne besondere Vorkenntnisse aus der darstellenden oder projektiven Geometrie sich mit ihnen bekannt machen kann, ferner ihre Anwendung auf die verschiedensten Aufgaben, insbesondere der Schattenkonstruktion, gezeigt zu haben. Daß der Verfasser mit Liebe und Sorgfalt an diesem Werkchen gearbeitet hat, ersieht man aus jeder Seite; es soll ja auch wohl, mehr als es der Schluß der Vorrede betont, einem Lieblingsgedanken zur Verwirklichung verhelfen, nämlich der orthogonalen Axonometrie wegen der Anschaulichkeit ihrer Bilder und Konstruktionen eine bevorzugtere Stellung im darstellend-geometrischen Unterricht zu erringen.

Was den Stoff anbetrifft, so behandelt der Verfasser nach Erklärung der Methoden zum Zeichnen axonometrischer Bilder die Darstellung der Grundgebilde, die Aufgaben über ihre Lagenbeziehungen und als Anwendung die Schattenbestimmung an ebenflächig begrenzten Körpern. Letztere sowohl als das S. 19 u. 20 erwähnte Konstruieren mit Punkten oder Linien, die außerhalb der Zeichenfläche liegen, ist der Beachtung zu empfehlen. Die „Aufgaben der Geometrie des Maßes", insbesondere die über das Senkrechtstehen von Geraden und Ebenen werden nach C. Pelz durchgeführt, wobei bekanntlich der Satz über die Höhen eines Dreiecks die Hauptrolle spielt. Bei manchen Lösungen dieser Aufgaben sehe ich keinen Vorzug gegenüber der Benutzung einer zweiten orthogonalen Projektion.

Besonders eingehende Behandlung erfahren der Kreis und die Kegelschnitte. Bei der Darstellung der ersteren kommt der Satz zu wiederholter Verwendung, daß das Bild einer zur Kreisebene senkrechten und mit dem Radius gleich langen Strecke der linearen Exzentrizität der Bildellipse gleich ist. Vielleicht hat in diesem und manchem anderen Abschnitt (z. B. Kugel und Halbkugel) die Liebe zur Sache den Verfasser verführt, für eine und dieselbe Aufgabe zu viele Lösungsarten anzugeben, was ich vom pädagogischen Standpunkte aus für bedenklich halte, obgleich den fertigen darstellenden Geometer die wirklich hübschen Konstruktionen sicherlich erfreuen werden. Auch auf manchen der ganz elementaren Beweise von Sätzen sei aufmerksam gemacht; der Beweis des Satzes jedoch, daß jede Zentralprojektion eines Kegelschnittes wieder ein solcher ist, scheint mir noch einer Ergänzung zu bedürfen.

Eine ähnlich liebevolle Behandlung erfahren die Zylinder- und Kegelflächen 2. Grades, ihre ebenen Schnitte und Durchdringungen, die Kugel und die Drehflächen (insbesondere die 2. O.), wobei wieder auf die Schattenkonstruktionen ein Hauptgewicht gelegt wird. Für sehr lehrreich halte ich die auf Tafel 28 gezeichneten und S. 156 u. 157 erläuterten Bilder einer Hohlkehle. Auf S. 153 (zu Fig. 186b) wird versehentlich erwähnt, eine Kurve besitze in einem Wendepunkt eine Unstetigkeit der Krümmung, die Eigenschattengrenze der durch die Kurve (als Meridian) erzeugten Drehfläche daher auf dem zugehörigen Parallelkreis eine Ecke, während sie doch in dem Punkte die Erzeugende des (längs des Parallelkreises) umschriebenen Kegels berührt.

Besonders lobend muß noch der schönen und korrekten Ausführung der 29 beigegebenen Tafeln gedacht werden, die der Verfasser selbst gezeichnet hat.

Betreffs der Bezeichnungsweise sei erwähnt, daß der Verfasser Punkte mit kleinen lateinischen, gerade Linien (aber auch Flächen) mit großen lateinischen, Ebenen mit kleinen griechischen Buchstaben (ε^h, ε^v Spuren von ε) und den Schatten eines Gebildes durch den seinem Buchstaben oben angefügten Zeiger s bezeichnet; die Raumgebilde unterscheidet er von ihren Bildern durch den unten angefügten Zeiger r. Er befindet sich damit in ziemlicher Übereinstimmung mit den von C. Pelz (vgl. Zur klinog. Darst. d. Rotationsflächen, Sitzgsb. Böhm. Ges. Prag 1895, Fußnote 2) gebrauchten Bezeichnungen.

Wien, im Juni 1905. E. Müller.

H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, **Geometrisches Zeichnen.** Neu bearbeitet von Professor J. Vonderlinn, dipl. und staatlich geprüftem Ingenieur in Breslau. Dritte (der Neubearbeitung I.) Auflage. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Sammlung Göschen, Leipzig 1903. Pr. 80 Pf.

Das klar geschriebene, praktisch angelegte und mit guten Figuren ausgestattete Buch gibt ohne Beweis die wichtigsten Konstruktionen für den Kreis, die Kegelschnitte, die bekannteren höheren und transzendenten Kurven, ferner behandelt es die einfachen Bogenformen, geometrische Orna-

mente, Maßstäbe und das Vergrößern und Verkleinern von Figuren. An Stelle der wenig eleganten Hyperbel-Konstruktion auf S. 66 könnte die weit einfachere angeführt werden, die sich aus der Asymptoten-Gleichung $xy = \text{const.}$ ergibt. Zu Seite 96 wäre zu bemerken, daß nach der Auffassung der Mathematiker die Konchoide in jedem Falle durch den Pol hindurchgeht, wenn auch dem isolierten Punkt eine praktische Bedeutung nicht zukommt.

München, März 1905. Karl Doehlemann.

Bemerkung zu der Kritik in Bd. 46, S. 495.

Solange ich noch selbst Erdmessungskommissär war, hielt ich es nicht für passend, auf die Kritik des Herrn Prof. Dr. Börsch über mein (erstes) „astronomisches Nivellement" durch Württemberg, Stuttgart 1901, zu erwidern; nachdem dies seit kurzem nicht mehr der Fall ist, möchte ich mir erlauben, mit einigen Worten auf die Sache zurückzukommen.

1. Herr Prof. Dr. Börsch sagt, die „relativen Lotabweichungen" (in der Richtung des Meridians) gegeneinander „dürften" „etwa mit einem mittleren Fehler von höchstens 0,7″ behaftet sein, der wohl auch noch für eine hinreichend genaue Konstruktion des Geoidprofils . . . genügen wird." Die gemessenen Polhöhen sind aber tatsächlich genauer als Herr Prof. Dr. Börsch angibt; der m. F. einer Polhöhe beträgt nicht $^1/_3$ bis $^1/_2$″, sondern $^1/_5$ bis $^1/_3$″, durchschnittlich sicher nicht über $^1/_4$″. Die Angabe des Herrn Kritikers wird in d. Z. Bd. 47, S. 508 berichtigt; es muß daselbst aber statt „etwa $^1/_4$ bis $^1/_3$ Sekunde" heißen „$^1/_5$ bis $^1/_3$ Sekunde." Dabei ist nicht zu vergessen, daß bei diesem m. F. die periodischen und zufälligen Teilungsfehler des Höhenkreises nicht zuvor eliminiert sind. Da Herr Prof. Dr. Börsch übrigens einen m. F. von im Max. 0,7″ in der (nichtellipsoidischen) relativen Lotkonvergenz zweier benachbarter Punkte noch zulassen will, der Fehler bei mir in der Tat aber wenig über die Hälfte beträgt, so ist auf die Genauigkeit der direkt gemessenen Polhöhen hier nicht weiter einzugehen. Ich meinerseits halte in einem „astronomischen Nivellement" Polhöhen mit $^1/_4$″ m. F. (in dem oben angegebenen Sinn) für ausreichend genau. Wenn mir ein größerer Höhenkreis oder ein Zenitfernrohr zur Verfügung gestanden hätte, hätte ich aber selbstverständlich mein kleines Instrument nicht verwendet, nicht um die Genauigkeit zu erhöhen, sondern um zu sparen an Arbeit und Kosten, obgleich diese geringer sind, als bei allen andern mir in dieser Beziehung bekannt gewordnen ähnlichen Arbeiten; mit 20 Punkten von $\pm$ 0,2″ m. Fehler in der Polhöhe auf einem bestimmten meridionalen Geoidprofil läßt sich mehr leisten, als mit 10 Punkten von $\pm$ 0,1″ m. F. Übrigens wird der Begriff der „hinreichenden Genauigkeit" in der Konstruktion eines Geoidprofils auch heute noch diskutabel sein. Auch auf dem zweiten von mir noch (1902 und 1903) ausgeführten württembergischen Geoid-Meridianprofil, auf etwa $8^1/_2{}^0$ E. Gr., habe ich in den direkten Polhöhen eine größere Genauigkeit als in dem ersten gar nicht angestrebt.

2. tadelt Herr Prof. Dr. Börsch, daß der „Endzweck der ganzen Arbeit" insofern nicht erreicht sei, als die Konstruktion des Groidprofils, obwohl

„sehr einfach“ zu erledigen, nicht ausgeführt sei. Ich hätte mich an die Konstruktion des Profils auch gewagt, wenn sie weniger einfach wäre; aber ich wollte alle vier Profile am Schluß der ganzen Arbeit zusammenstellen, wie ich wohl genügend deutlich mitgeteilt habe und wie auch Herr Prof. Dr. Börsch zitiert, und wobei dann die „wahre“ und die „korrigierte“ Geoidfläche getrennt und in Linien gleicher Erhebung über dem Referenzellipsoid dargestellt werden sollten.

3. Daß ich durch ungenaue Ausdrucksweise Herrn Prof. Dr. Börsch zu der Annahme Veranlassung gegeben habe, ich wollte entweder „ostwestliche“ Lotabweichungskomponenten oder ihren Einfluß auf die Azimutbestimmungen leugnen, bedaure ich. Ich hielt und halte es noch für zweckmäßig, statt mich auf die Bohnenbergersche einzige Azimutmessung zur Orientierung des die geodätischen geographischen Breiten liefernden Triangulierungsnetzes zu stützen, die Lage dieses Netzes dadurch zu bestimmen, daß auf einer nicht zu kleinen Anzahl von Punkten an verschiednen Stellen des Netzes (selbstverständlich nicht nur auf der Linie dieses ersten astronomischen Nivellements, sondern im ganzen Gebiet der Bohnenbergerschen Triangulierung) bei Gelegenheit der direkten Polhöhenmessungen auch direkte Azimutmessungen gemacht werden und daß diese Azimutmessungen mit den „geodätisch übertragnen“ (deren Unsicherheit ich nicht unterschätze) verglichen werden, um zu einem möglichst guten Wert des „Verdrehungswinkels“ β zu kommen. Vom „wirklichen“ Wert dieses Winkels β zu reden (S. 113) ist natürlich nicht statthaft; daß der (statt des Bohnenbergerschen) wirklich anzuwendende oder plausibelste gemeint war, brauche ich wohl nicht nachzutragen. Ich denke mir auf 12—15 schicklich gewählten Stationen unseres Netzes (— vorhanden sind davon bereits: Bussen, Solitude, Katzenbuckel; neuerdings Tübingen, Stuttgart —) Azimute weit entfernter und im Triangulierungsnetz ebenfalls festgelegter Zielpunkte direkt gemessen. Die Abweichungen a zwischen diesen direkt gemessenen Zahlen und den aus den Bohnenbergerschen Landesvermessungskoordinaten der Stand- und Zielpunkte zu berechenden Azimuten, setzen sich aus drei Teilen zusammen: 1. aus dem zu ermittelnden plausibelsten Wert von β (der, wenn auch nicht streng, doch sehr genähert als konstant in den a enthalten ist), der als Gesamtverdrehung des Bohnenbergerschen Koordinatensystems gegen den Meridian des Nullpunkts anzusehen ist; 2. aus den in verschiednen Teilen des Triangulierungsnetzes verschiednen Fehlern des Netzes in sich (gleichsam wechselnde Beträge β' der Verdrehung der einzelnen z. T. bekanntlich sehr schlecht verbundnen Netzstücke gegen einander); 3. aus den Beträgen $\eta \cdot \operatorname{tg} \varphi$, die mit den Lotabweichungskomponenten η senkrecht zum Meridian von Punkt zu Punkt wechseln.

Die mir im württembergischen Netz bis jetzt bekannten Abweichungen a zwischen direkt gemessnen und aus den linearen geodätischen Koordinaten berechneten Azimuten stimmen innerhalb ungefähr $7''$ überein; trotz der Fehler der alten Bohnenbergerschen Horizontalwinkel ein Zeichen dafür, daß auf dem Gebiet, auf dem bis jetzt direkte Azimutbestimmungen gemacht sind, große η nicht vorkommen (wie auch beträchtliche ξ nirgends vorhanden sind). Im ganzen glaube ich schon jetzt als zweckmäßigsten Wert von β die Zahl von etwa $12''$ angeben zu können, die sich aber selbstverständlich noch um mehrere $''$ ändern kann. Ob β um einige $''$ größer oder kleiner

angenommen wird, war für das erste astronomische Nivellement längs dem Meridian des Nullpunkts ganz gleichgültig; eine Veränderung in β um nur $5''$ ändert aber für die nordöstlichsten und südöstlichsten Teile Württembergs, die durch das Geoidprofil auf 10^0 E. Gr. erfaßt werden sollten, die geodätischen geographischen Breiten und damit die (vorläufigen) ξ um mehr als $0{,}1''$.

E. Hammer.

Neue Bücher.[1]

Geodäsie.

1. Doll, M. und Nestle, P., Lehrbuch der praktischen Geometrie. 2. erweiterte u. umgearb. Aufl. Leipzig u. Berlin, Teubner. M. 3.20; geb. M. 3.80.

Darstellende Geometrie.

2. Bernhard, Max, Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktionen u. der Perspektive. Als Leitfaden f. den Unterricht an technischen Lehranstalten, Oberrealschulen u. Realgymnasien, sowie zum Selbststudium hrsg. 2. verb. u. stark verm. Aufl. Stuttgart, Enderlen. geb. in Leinw.
3. Heydeman, W. J., Beginselen der beschrijvende meetkunde. Amsterdam, Ahrend & Zoon. geb. Fl. 5.60.

Logikrechnung.

4. Couturat, Louis, L'algèbre de la logique. (Scientia Nr. 24.) Paris, Gauthier-Villars. cart. Frs. 2.

Mechanik.

5. Alexander, T. and Thomson, A. W., 26 graduated exercises in Graphic Statics. London, Macmillan & Co. 10 s.
6. Appell, P. et Chappuis, J., Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de mathématiques A et B. Conformément aux programmes du 21 mai 1902. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 4.
7. Donadt, A., Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung f. technische Mittelschulen u. höhere Lehranstalten, insbes. zum Selbstunterricht m. Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. (5. Aufl. der Einleitung in die Mechanik v. H. B. Lübsen.) Leipzig, Brandstetter. M. 9; geb. M. 9.70.
8. Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. I. Bd. Einführung in die Mechanik. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. M. 10.
9. Neumann, Ernst Rich., Studien über die Methoden v. C. Neumann u. G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Gekrönte Preisschrift. (Preisschriften der fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig, mathem.-naturw. Sektion Nr. XV.) Leipzig, Teubner. M. 10.
10. Routh, Edward John, The advanced part of a Treatise on de Dynamics of a system of rigid bodies. Being part 2 of a Treatise on the whole subject. Whith numerous examples. 6th ed., revised and enlarged. London, Macmillan. 14 s.

Physik.

11. Baly, E. C. C., Spectroscopy. London, Longmans. 10 s. 6 d.
12. Bucherer, A. H., Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. M. 2.40.
13. Geitler, Josef Ritter von, Elektromagnetische Schwingungen u. Wellen. („Die Wissenschaft" Heft 6.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4.50; geb. M. 5.20.

---

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

14. Haber, F., Thermodynamik technischer Gasreaktionen. 7 Vorlesgn. München, Oldenbourg. geb. in Leinw. M. 10.
15. Hahn, Herm., Physikalische Freihandversuche. Unter Benutzung des Nachlasses v. Bernhard Schwalbe. I. Teil: Nützliche Winke. Maß u Messen. Mechanik der festen Körper. Berlin, Salle. M. 3.
16. Jäger, Gustav, Theoretische Physik, II, Licht u. Wärme. (Sammlung Göschen Nr. 77.) 3., verb. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.
17. — —, dasselbe, III, Elektrizität u. Magnetismus. (Sammlung Göschen Nr. 78.) 3., verb. Aufl. Ebenda. geb. in Leinw. M. —.80.
18. Kohlrausch, F., Lehrbuch der praktischen Physik. 10. verm. Aufl. des Leitfadens der praktischen Physik. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. in Leinw. M. 9.
19. Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen 3. umgearb. u. verm. Aufl. unter Mitwirkung zahlreicher Gelehrter u. mit Unterstützung der Königl. preußischen Akad. d. Wiss. hrsg. v. Richard Börnstein u. Wilhelm Meyerhoffer. Berlin, Springer. geb. M. 36.
20. Lorentz, H. A., Ergebnisse u. Probleme der Elektronentheorie. Vortrag. Berlin, Springer. M. 1.50.
21. Möller, M., Flut u. Witterung. Eine neue Theorie atmosphärischer Flut- u. Ebbebewegung, abgeleitet f. nördliche geographische Breiten u. deren Anwendung auf die Gestaltung der Witterung. Braunschweig, Limbach. M. 1.
22. Righi, Augusto, Il moto dei ioni nelle scariche elettriche. 2ª ediz. ampliata. Bologna. L. 3.
23. Thomson, J. J., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt v. Erich Marx. In 3 Lfgn. 1. Lfg. Leipzig, Teubner. M. 6.

Tafeln, Nomographie.

24. Láska, W., Wykłady Nomografii. Opracował i wydał Fr. Ulkowski. (Autogr.) Lwów 1904/05. Półrocze Letnie.
25. Wilda, Diagramm- und Flächenmesser. Vollständiger Ersatz f. das Planimeter zum schnellen und genauen Ausmessen beliebig begrenzter Flächen, Dampfdiagramme usw. Mit Gebrauchsanweisung. Hannover, Gebr. Jänecke. M. 2.

Verschiedenes.

26. Festschrift, Adolf Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstage 13. Juni 1905 von der Königl. technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren u. jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre. Leipzig, Teubner. M. 8.
27. Godfrey, C. and Bell, G. M., A note book of Experimental Mathematics. London, Arnold. 2 s.
28. Habenicht, Bodo, Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. Berlin, Salle. M. 1.60.
29. Jahnke, E., Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik u. mathematische Physik. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 5.60.
30. Krazer, A., Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Herausg. von dem Schriftführer des Kongresses. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 18.
31. Löschner, Hans, Über Sonnenuhren. Beiträge zu ihrer Geschichte u. Konstruktion nebst Aufstellung einer Fehlertheorie. Graz, Leuschner & Lubensky. M. 5.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Appel et Chappuis, Leçons de mécanique élémentaire, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 6

Bachmann, Paul, Zahlentheorie. 5. Teil. Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 17.

Bernhard, M., Darstellende Geometrie, s. N. B. 2.

Bucherer, A. H., Elemente der Vektor-Analysis, s. N. B. 12.

Contributions from the Jefferson Physical Laboratory of Harvard University for the year 1904. Vol. II. Cambridge, Mass.

Couturat, L'algèbre de la logique, s. N. B. 4.

Doll u. Nestle, Lehrbuch der praktischen Geometrie, 2. A., s. N. B. 1.

Donadt, A., Lehrbuch der Mechanik, s. N. B. 7.

Fenkner, Hugo; Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik, Chemie. Ausgabe A. Teil I. 5. verb. Aufl. Berlin, Salle. M. 2.20.

Föppl, A., Vorlesungen üb. technische Mechanik, I, 3. A., s. N. B. 8.

Geitler, von, Elektromagnetische Schwingungen und Wellen, s. N. B. 13.

Habenicht, B., Beiträge zur mathem. Begründung einer Morphologie der Blätter. Berlin, Salle. M. 1.60.

Hahn, H., Physikalische Freihandversuche, s. N. B. 15.

Hinton, C. Howard, The fourth dimension. London 1904, Swan Sonnenschein & Co.

Jäger, G., Theoretische Physik, II, III, s. N. B. 16, 17.

Jahnke, E., Vorlesungen über die Vektorenrechnung, s. N. B. 29.

Junker, Fr., Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 146.) 2., verb. Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Kohlrausch, F., Lehrbuch der praktischen Physik, 10. A., s. N. B. 18.

Krazer, A., Verhandlungen des 3. internationalen Mathematiker-Kongresses, s. N. B. 30.

Kübler, J., Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum u. die daraus hervorgehenden Weltgesetze. Leipzig 1904, Teubner. M. —.80.

Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen, 3. A., s. N. B. 19.

Lanner, Alois, Die wissenschaftlichen Grundlagen des ersten Rechenunterrichts. Wien u. Leipzig, Fromme. K. 1.20.

Láska, W., Wykłady Nomografii, s. N. B. 24.

Lindelöf, Ernst, Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.

Meyer, W. Franz, Differential- und Integralrechnung. II. Band: Integralrechnung. (Sammlung Schubert XI.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 10.

Schröder, Alfred, Zur Lösung des Schwerkraftproblems. Ein physikalischer Versuch. Als Manuskript gedruckt. Guscht (Neumark), Selbstverlag. M. —.50.

Schubert, H., Beispiel-Sammlung zur Arithmetik u. Algebra. (Sammlung Göschen Nr. 48.) 3., durchgesehene Aufl. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

Smith, David Eugene. A portfolio of portraits of eminent Mathematicians. Descartes, Pythagoras, Archimedes, Fermat, Leonardo of Pisa, Euclid, Cardan, Leibnitz, Napier, Vieta, Newton, Thales. Chicago, The Open Court Publishing Company.

Thomson-Marx, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen, s N. B. 23.

Wilda, Diagramm- und Flächenmesser, s. N. B. 25.

Wüllner-Festschrift, s. N. B. 26.

Zetzsche, K. Ed., Ebene und räumliche Geometrie. 4. Aufl. (Webers ill. Katechismen. Bd. 69.) Leipzig, Weber. geb. in Leinw. M. 4.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Experimentelle Elektrizitätslehre.

Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen u. Ergebnisse.

Dargestellt von

Dr. Hermann Starke,

Privatdozent an der Universität Berlin.

Mit 275 in den Text gedruckten Abbildungen. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. geb. *M.* 6.—

Das in Lehrbuchform gehaltene Werk ist für alle diejenigen bestimmt, welche sich, ohne größere mathematische Vorkenntnisse, doch eingehender mit der Elektrizitätslehre beschäftigen wollen. Es ist als eine Einführung in das Studium der theoretischen Elektrizitätslehre gedacht, vor allem aber für den Experimentalphysiker auch für den Gebrauch im Laboratorium bestimmt, indem unter anderem beispielsweise die Aufgaben, welche in dem neuerdings sehr erweiterten elektrischen Praktikum des physikalischen Instituts der Berliner Universität bearbeitet werden, besondere Berücksichtigung erfahren haben.

Nach einer ersten, einleitenden Besprechung der elektrostatischen Erscheinungen und der sie beherrschenden Gesetze an der Hand der Potentialtheorie und des Kraftlinienbildes wird die Faraday-Maxwellsche Anschauungsweise der Nahewirkung ein- und im ganzen Werke durchgeführt. Aus ihr heraus werden die allgemeinen Eigenschaften des elektrischen, magnetischen und des elektromagnetischen Feldes entwickelt, die Erscheinungen der Elektrolyse und ihre Erklärung durch die Ionentheorie, die elektrischen und magnetischen Meßmethoden mit den dazu gehörigen Instrumenten, die elektromagnetische Induktion, die langsamen und schnellen elektromagnetischen Wechselfelder Theorie und praktische Anwendung der Wechselströme im physikalischen Laboratorium und in der Technik sind eingehend behandelt, weil dieser für die Experimentalphysik durchaus wichtige Stoff in physikalischen Lehrbüchern bisher keinen Eingang gefunden hat. In verschiedenen Kapiteln ist auch den Bedürfnisse des Lehrers Rechnung getragen worden, indem praktische Winke für experimentelle Anordnungen bei Demonstrationsversuchen gegeben werden.

Mathematische Einführung in die Elektronentheorie.

Von **Dr. A. H. Bucherer,**

Privatdozent an der Universität Bonn.

Mit 14 Figuren im Text. [IV u. 148 S.] gr. 8. 1904. geb. *M.* 3.20.

Die wunderbaren Entdeckungen auf dem Gebiete der Radioaktivität und der Gasentladungen haben den Physiker mit ungeahnten Eigenschaften der Materie bekannt gemacht und ihn genötigt, seine Vorstellungen von dem Wesen der Materie und allgemein der physikalischen Erscheinungen einer weitgehenden Revision zu unterziehen. Bei der sich heute vollziehenden Umgestaltung rückt das Elektron mehr und mehr in den Vordergrund und wird allmählich zum Fundament des theoretischen Aufbaues der Physik. Der Forscher, welcher dieser eminent wichtigen Entwicklung folgen will, sei es nun, daß er theoretisch oder daß er experimentell auf dem Gebiete der Elektronenphänomene tätig ist, muß sich durchaus mit den mathematischen Grundlagen der Theorie vertraut machen. Ihm hierzu einen Leitfaden an die Hand zu geben, ist das Bestreben des Verfassers gewesen, und zwar hat er die einfachsten mathematischen Hilfsmittel zu diesem Zwecke verwandt. Das prinzipiell Wichtige auf dem Einzelgebiete der Elektronentheorie ist so eingehend behandelt, daß es zur Beherrschung der Theorie ausreichen dürfte.

Die Technische Mechanik.

Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten.

Von **P. Stephan,**

Regierungsbaumeister, Lehrer an der Kgl. Höheren Maschinenbauschule in Posen.

I. Teil: Mechanik starrer Körper.

Mit 255 Figuren im Text. [VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. *M.* 7.—

Das vorliegende Buch, dessen zweiter Teil die Festigkeitslehre und Mechanik der flüssigen Körper usw. behandeln wird, schließt sich dem Lehrplan für die preußischen höheren Maschinenbauschulen möglichst an und versucht, die technische Mechanik mit Hilfe elementarer Rechnungen in möglichst knapper Form darzustellen. Um die Tragweite und die Anwendung der einzelnen Sätze zu zeigen, wurde ihnen eine große Anzahl ausführlich durchgerechneter Beispiele beigegeben, die, soweit möglich, der Praxis entnommen und häufig so gewählt wurden, daß sich daran eine weitere Diskussion anschließen kann, wie es bei einigen Beispielen auch angedeutet ist.

Diese Beispiele und einige wenige kurze Teile, die in der Fachschule bei der ersten Durcharbeitung des Ganzen überschlagen werden dürften, machen das Buch auch als Übungsbuch und Repetitorium für Studierende technischer Hochschulen brauchbar; es enthält etwa das Minimum dessen, was ein Student im Vorexamen wissen muß, und annähernd das Maximum dessen, was in einer höheren Maschinenbauschule mit Erfolg durchgearbeitet werden kann.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.
HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

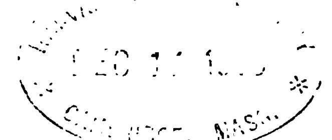
☛ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Berichtigung: Auf Seite 285, Zeile 9 von oben muß es heißen: α_λ β_λ γ_λ statt $\alpha\lambda$ $\beta\lambda$ $\gamma\lambda$, d. h. λ ist ein Index, kein Faktor.

☛ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

F. Bernstein, F. Biske, E. Czuber, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, A. Grünwald, G. Holtsmark, M. Lerch, R. Mehmke, K. Nitz, B. J. W. Reuser, C. Runge, R. Schimmack, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, Th. Weitbrecht, C. W. Wirtz, A. Wlassow, E. Wölffing.



Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrad.

Untersuchungen, ausgeführt mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen

von ANTON GRÜNWALD in Bubentsch bei Prag.

'Ought we not first to study carefully the nature of the freedom which the body possesses? Ought we not to make an inventory of every distinct movement of which the body is capable? Until this has been obtained I do not see how we can make any progress in the dynamical part of our business.'
Sir Robert Ball.[1])

Wir stellen uns die Aufgabe, in Kürze für jeden Freiheitsgrad eines starren Körpers Modelle einfacher Mechanismen anzugeben, welche, in geeigneter Weise angebracht, dazu dienen können, die oft höchst unübersichtlichen, die Bewegungsfreiheit des Körpers einschränkenden Bedingungen zu ersetzen.

An der Grenzfläche der zusammengekoppelten Teile dieser Mechanismen soll nur die Wirkung von Widerstandskräften, welche in die Flächennormale fallen, in beliebig hohem Maße beansprucht, dagegen von Reibung und dgl. gänzlich abgesehen werden. Bei jedem Modelle soll an das System der Achsen und zugehörigen Parameter [Steigungen, $(2\pi)^{-1}$fachen Ganghöhen[2])] einerseits jener Schraubungen erinnert werden, welche das mit den instantanen Bewegungsbedingungen verträgliche lineare Schraubengebiet R_k erfüllen, sowie auch an die Schraubungen

1) Bezüglich der Literatur verweisen wir auf den „Treatise on the theory of screws" von Sir Robert Ball, Cambridge 1900, und auf die zwei Abhandlungen des Verfassers in der Zeitschrift für Mathematik und Physik („Sir Robert S. Balls lineare Schraubengebiete" im 48. Bd., 1. Heft, 1902, S. 49—108 mit zwei Figurentafeln und „Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels" im 49. Bd., 2. Heft, 1903, S. 211—245 mit zwei Figurentafeln; Leipzig, B. G. Teubner.) Zur Einführung sei insbesondere die (in der Sammlung Schubert, Leipzig 1902 erschienene) „Liniengeometrie" Zindlers empfohlen. Von allgemeinen Gesichtspunkten aus: E. Study: „Geometrie der Dynamen", Leipzig 1903. Vgl. dort insbesondere S. 585 usw.

2) Der Parameter kann auch aufgefaßt werden als Entfernung jener Punkte von der Achse, deren Translationsstrahlen (Tangenten an die Bahnschraubenlinien dieser Punkte) mit der Achse die Winkel 45° einschließen.

des für die Bewegung unwirksamen linearen Reziprokalgebietes[1]) $P_{(6-k)}$, welchem die Widerstandsdynamen des Systems entnommen sind.

Es wird so für jeden Grad der Bewegungsfreiheit ein **vollständiges Inventar** (S. 270) aller Typen von instantanen Bewegungsmöglichkeiten zusammengestellt werden, wobei jeder Typus durch einen einfachen, genau beschriebenen **Bewegungsmechanismus** sich verwirklichen läßt. Für jeden Freiheitsgrad ordnen wir die Typen nach der Zahl der dem beweglichen Körper gestatteten von einander unabhängigen Translationen, da dieser Einteilungsgrund sich bei der praktischen Ausführung von Beweglichkeitsmodellen als der zweckmäßigste erweist. Vgl. die Tabelle S. 274.

Die von uns aufgezeichneten typischen Mechanismen gestatten es, einen Apparat — allerdings mit auswechselbaren Bestandteilen — aufzubauen, welcher alle (an einem starren Körper zulässigen und in einem bestimmten Augenblick die Bewegung bis auf jeden beliebigen Freiheitsgrad) beschränkenden Bedingungen zu ersetzen imstande ist.

So wenig es wohl gewöhnlich beachtet werden mag, bietet doch die tägliche Erfahrung und auch der menschliche Körper instruktive Beispiele von Beweglichkeiten — auch höherer Freiheitsgrade — dar, deren Verständnis wir fördern wollen[2]), indem wir in *elementarer* Weise in jenen neuen Abschnitt der Kinematik einführen, von welchem E. Study in seiner klassischen „Geometrie der Dynamen" bemerkt (S. 555), man sei in mancher Richtung über gewisse Beispiele und tastende Versuche, etwas Ordnung in die sich darbietenden Einzelheiten zu bringen, nicht hinausgekommen.

Freiheitsgrad I.

Jede Elementarbewegung eines starren Körpers kann durch eine Schraubenbewegung ersetzt werden, welche aus einer Drehung um eine

---

1) Reziprok heißen Schraubengebiete, welche zu einander polar sind bezüglich des (im linearen Schraubenraum R_{VI} enthaltenen) quadratischen Gebietes aller Geraden.

2) Wer denkt denn — um einen einfachen Fall zu wählen — z. B. daran, daß er bei einer Eisenbahnfahrt, indem er bei starr in beliebig schräger Richtung gehaltenem Unterarm die Faust bloß im Handwurzelgelenk dreht, in jedem Augenblick diese Faust nur *um Achsen* im festen Außenraum (und zwar unter Einhaltung von genau angebbaren Ganghöhen) *schraubt*, welche einen genau bestimmten Kegel zweiter Ordnung umhüllen und zu einer Fokalachse desselben senkrecht stehen? Wer denkt dabei daran, daß hierbei nur gewisse Dynamen unwirksam bleiben, deren Achsen denselben Kegel berühren und zur anderen Fokalachse senkrecht sind? [Es liegt der von uns unter 2) beim Freiheitsgrade III anzuführende Fall vor.]

Achse und einer zu dieser Drehung proportionalen Translation (Parallelverschiebung) in der Achsenrichtung sich zusammensetzt.[1])

Als typisches Modell für die ausschließliche Zulassung einer solchen Bewegung ist bekannt

1) eine **Schraubenmutter**, welche um eine Spindel von der Achse G und dem Parameter $\mathfrak{p}$ beweglich ist. Ebensogut könnte bei festgelegter Mutter die Spindel bewegt werden. Insbesondere ergibt sich

1′) für den Spezialfall $\mathfrak{p} = 0$ ein starrer Körper, welcher wie etwa ein *Rad* um eine zylindrische feste Achse G (unter Versicherung gegen Weitergleiten an derselben) einfach drehbar ist.

2) Entsprechend $\mathfrak{p} = \infty$ haben wir einen **Schieber**, d. h. einen Körper, der etwa wie eine Schublade mit Hilfe prismatischer Grenzflächen in entsprechenden festen Lagern gleitet (Gleitstück im Schubrahmen). Alle seine Punkte verschieben sich parallel um gleich lange Strecken.[2])

Geeignete Kombinationen mehrerer (höchstens 5) dieser einfachen Mechanismen werden es uns gestatten, jeden möglichen Fall von beschränkten Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers zu verwirklichen.

Der Begriff der Grassmannschen Schraube[3]), welche eindeutig darstellbar ist durch einen „Stab“ und ein zu ihm senkrechtes „Feld“ kann in der passendsten Weise, sowohl einer Schraubungsgeschwindigkeit oder „Windung“ L (Rotationsgeschwindigkeit um die Stabachse G mit der durch die Stablänge angegebenen Winkelgeschwindigkeit, verbunden mit einer Parallelverschiebung senkrecht zum Felde, d. h. parallel zu

---

1) M. Chasles, „Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit dans un corps solide libre dans l'espace“ Paris 1893, Comptes rendus, vol. XVI, pag. 1420—1432. Auch dessen schon 1830 in Férussacs Bulletin, vol. XIV, pag. 321—326 erschienene Note. L. Poinsot, „Théorie nouvelle de la rotation des corps“ in Liouvilles Journal vol. XVI, pag. 9—129, 289—336. H. Wiener, „Die Zusammensetzung zweier endlicher Schraubungen zu einer einzigen“ und „Zur Theorie der Umwendungen“ in den Leipziger Berichten 1890 S. 13 u. 71. E. Study, „Geometrie der Dynamen“ Leipzig, 1903.

2) Zu 1), 1′), 2) vgl. etwa m, m_0, m_∞ in der Fig. 1, wenn dort — entgegen unserer späteren Annahme — t festgehalten wird. Zu 2) auch die Bestandteile a (Schubrahmen) und b Gleitstück der Fig. 2. Wir schreiben 2 statt etwa 1″ für den Schieberfall, da wir nach der Zahl der bei der Beweglichkeit gestatteten Translationen einteilen wollen.

3) H. Grassmann „Schraubenrechnung und Nullsystem“ Halle 1899 und E. W. Hyde „The directional theory of screws“ in den Annals of mathematics, vol. IV, N. 5, pag. 137, 1888 Mass. U. S. A. Im „The directional calculus“ desselben Verfassers Boston, U. S. A. 1890 ist u. a. der Schraubenbegriff dargelegt. Er findet sich übrigens schon in der Ausdehnungslehre H. Grassmanns des Ä. 1862.

G und mit der durch den Feldinhalt dargestellten Geschwindigkeit) als auch einer Dyname Λ (Kraft auf einer Achse Γ, verbunden mit einem Drehmoment in dem zu Γ senkrechten Felde, wobei der Feldinhalt $\mathfrak{p}'$mal so groß ist als die Stablänge der Kraft) zugrunde gelegt werden.

Grassmanns „eingewandtes" Produkt der Schraube mit einem ebenen Blatte gibt den „Nullpunkt" der betreffenden Ebene bezüglich der durch die Schraube L dargestellten Schraubung R_{I} an. (Das Wort „Schraubung" bedeutet die Gesamtheit der durch eine Zahlgröße aus L ableitbaren Schrauben.) Das „äußere" Produkt einer Schraube mit einem Punkte p gibt das „Nullblatt" dieses Punktes, welches einen Teil der betreffenden Nullebene bildet und dessen Größe und Sinn bei der ersteren der beiden obigen Deutungen der Schraube die Translationsgeschwindigkeit von p auf dem durchgelegten zum Nullblatte (pL) senkrechten Stabe bestimmt, während es bei Annahme der letzteren Deutung der Schraube als Dyname Λ, das Moment $(p\Lambda)$ der Dyname bezüglich des beliebigen Punktes, p vorstellt.

Das Grassmansche „äußere" Produkt einer Windung L und einer Dyname Λ gibt die Arbeitsgeschwindigkeit der Dyname Λ bezüglich der Windung L an.[1]) Es zeigt durch sein Verschwinden, daß in diesem Falle L und Λ linearen Reziprokalgebieten angehören, was bezüglich des Winkels ϑ der Achsen G und Γ von L und Λ und der Parameter $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ dieser Schrauben die Beziehung

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = e \operatorname{tg} \vartheta$$

zur Folge hat, wenn man mit e den kürzesten Abstand von G und Γ bezeichnet.

Im obigen Falle 1) wird jede Windung L eindeutig dargestellt durch einen Stab l der Schraubenachse G und ein hierzu senkrechtes Feld f, dessen Inhalt $\mathfrak{p}$mal so groß ist als die Länge von l

$$L = l + f,$$

wobei das Vorzeichen des Parameters angibt, ob die Schraube „links" oder „rechts" gewunden ist. Im Falle 1') einer Drehungsachse ist insbesondere f und im Falle 2) eines Schiebers ist l zu Null geworden, während $\mathfrak{p}$ bei 1') den Wert 0, bei 2) den Wert ∞ annimmt.

Als Achse Γ einer Schraube Λ im linearen Reziprokalgebiete zu L, bezw. zu R_{I}, im „Schraubengewebe" P_{V}, kann jede Gerade des Raumes auftreten; der zugehörige Parameter $\mathfrak{p}'$ bestimmt sich aus der angegebenen Bedingung $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = e \operatorname{tg} \vartheta$, wobei auch das Vorzeichen von ϑ zu beachten ist. Die senkrechten Transversalen der Achse G der Schraubung R_{I} sind als Achse Γ im „Schraubengewebe" P_{V} mit einem beliebigen Parameter belegbar. Zu P_{V} gehört auch das Feldbüschel parallel zu G. Jedem konstanten Werte von $\mathfrak{p}'$ entspricht ein zur Zentralachse G gehöriger linearer Komplex von Achsen Γ.

---

1) Vergl. Zindlers oben angeführte Liniengeometrie S. 109.

Im Gegensatz zum Falle 1) erschöpft im Falle 1') sowohl als 2) die Schraube $L(=l$, bezw. $=f)$ samt den Schrauben ihres linearen Reziprokalgewebes das Gesamtschraubengebiet R_{VI} des Raumes nicht, sondern L (d. h. auch R_I) ist in P_V enthalten. Im Falle 2) ist jede zum Felde f parallele Achse Γ in P_V mit einem beliebigen Parameter versehbar; andere als zu f parallele Achsen Γ braucht man nicht anzuerkennen, es wäre denn, daß man ihnen den Parameter ∞ (neben der Stablänge 0) zuschriebe: Jedes Feld des Raumes gehört zu P_V.

Umgekehrt ist bei 1') und 2) $L(=l$, bezw. $=f)$ das — wie bemerkt in P_V enthaltene — Reziprokalgebiet von P_V; als Ergänzung von P_V zum vollständigen VI-stufigen Schraubengebiet des Raumes, als ein „*ergänzendes* Gebiet" von P_V ist dagegen im Falle 1') f und im Falle 2) l brauchbar. Diese verschiedenen Begriffe eines „reziproken" und eines „ergänzenden" Gebietes sind bei allen linearen Schraubensystemen um so sorgfältiger zu unterscheiden, als sie oft, — aber wie wir schon jetzt bemerken — nicht immer gleichen Umfang haben; bei 1) hatten sie z. B. gleichen Umfang, die durch L bestimmte Schraubung R_I und das Gewebe P_V waren zugleich Reziprokal- und Ergänzungsgebiete von einander.

Freiheitsgrad II.

Als typischen Mechanismus zur Verwirklichung aller Elementarbewegungen stellen wir im allgemeinen Falle

1.

wo Achsen verschiedener Richtungen im zugehörigen linearen Schraubenbüschel R_{II} auftreten, eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen (durch seine oft zulässige Benützung als Universalgelenk bekannten) Hookschen Schlüssels auf, nämlich den

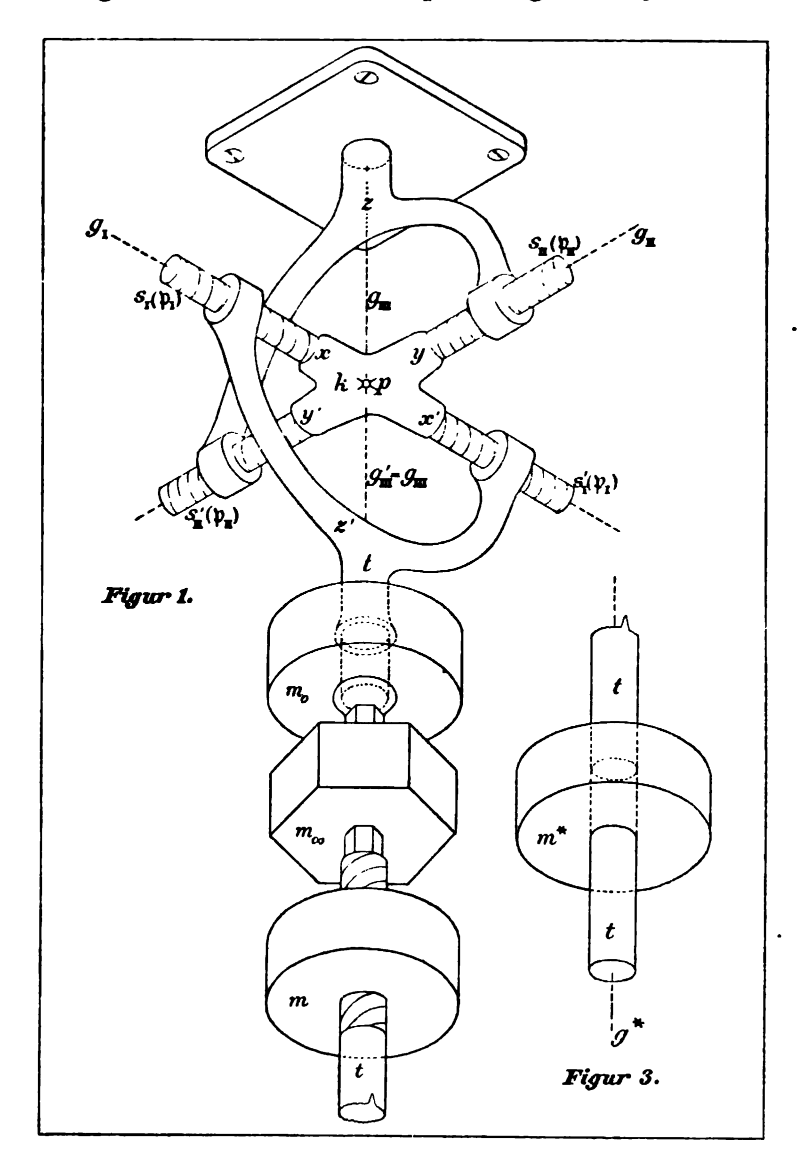
Schraubenzwilling (Figur 1).

Dieser besteht aus dem Kreuzkörper k und zwei Gabelkörpern mit den zylindrischen Schäften z und z'. Der Kreuzkörper trägt zwei Schrauben-Spindeln s_I (mit der Fortsetzung s_I') und s_{II} (s_{II}'), deren beliebig wählbare Ganghöhen das $(2\pi)^{-1}$fache der „Hauptparameter" $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ sind. Die im Arme xx' bezw. yy' des Kreuzkörpers zu denkenden Spindelachsen G_I (von $s_I s_I'$) G_{II} (von $s_{II} s_{II}'$) nehmen wir zueinander senkrecht[1]) und sich in p schneidend an.

Den Schraubenspindeln entsprechen Mutterlager in den beiden Gabeln, in welche sich der Kreuzkörper möglichst reibungslos ein-

1) Wenn wir noch weiter verallgemeinern und diese Forderung fallen lassen wollten, wobei $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ nicht mehr die Hauptparameter des Schraubenbüschels wären, so hätten wir wohl den Vorteil, durch geeignete Adjustierung des derart verallgemeinerten Instrumentes auch die später zu besprechenden zum Freiheitsgrade II gehörigen speziellen Mechanismen (Schraub-, bezw. Drehschieber und Muff) ersetzen zu können. Dieser Vorteil wäre zu teuer erkauft durch die geringe Übersichtlichkeit und schwierige Konstruktion der Mechanismen.

schrauben kann. Halten wir die eine Gabel z vollkommen *fest*, so hat die andere Gabel z' den Freiheitsgrad II; sie ist samt jedem mit ihrer Schaftstange z starr verbundenen Körper beweglich um jede Schraubung



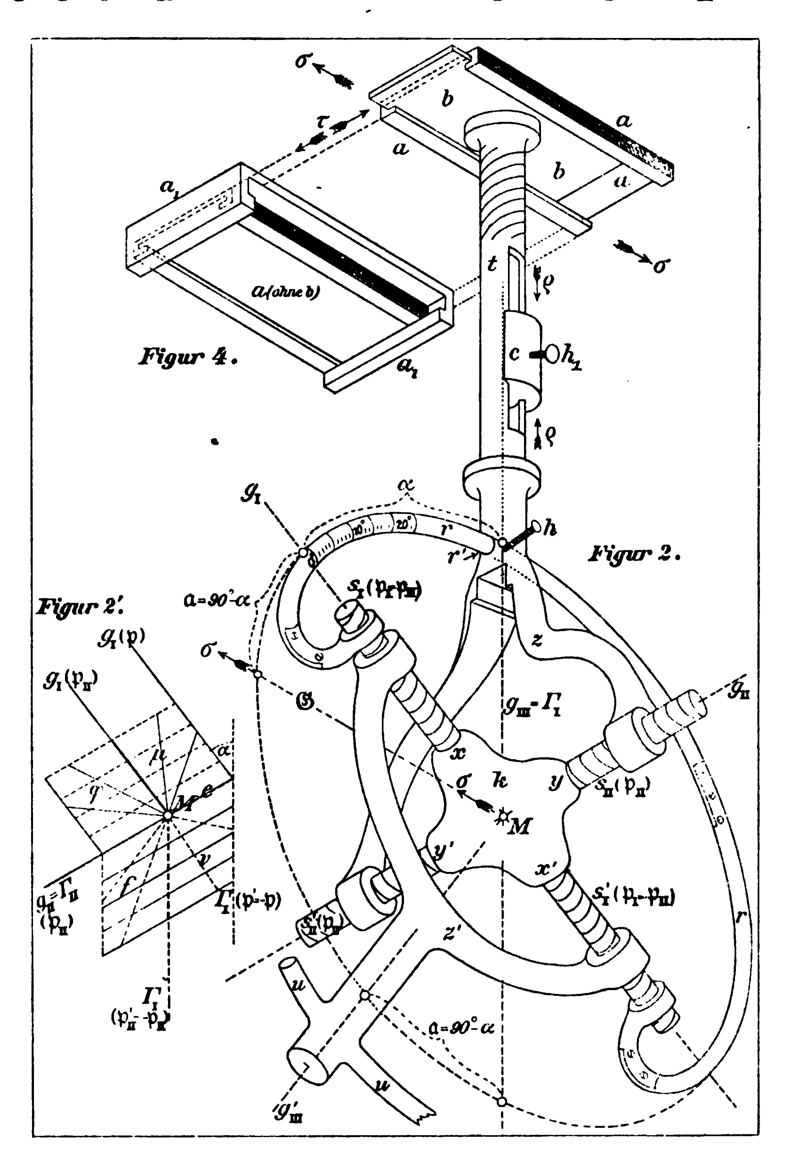
Figur 1.

Figur 3.

des durch die „Hauptschraubungen“ s_{II} (Achse G_I, Parameter $\mathfrak{p}_I$) und s_{II} (G_{II}, $\mathfrak{p}_{II}$) bestimmten linearen Schraubenbüschels R_{II}.

Sind die Parameter $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ der beiden Hauptschraubungen gleich, d. h. die Schraubenspindeln s_I und s_{II} entweder beide „rechts“

oder beide „links“ gewunden und von gleicher Ganghöhe, so nennen wir den Schraubenzwilling „gleichsteigend“. Wird insbesondere diese Steigung $\mathfrak{p}_{I} = \mathfrak{p}_{II} = 0$, so sind statt der Spindeln s_{I} und s_{II} und der



zugehörigen Mutterlager gewöhnliche Zapfen und Achsenlager angebracht zu denken, und wir haben es mit einem „gewöhnlichen“ Hookschen Schlüssel zu tun.

Wäre dagegen der eine Hauptparameter oder wären gar beide ∞,

so hätten wir uns die entsprechende Spindel durch ein Prisma mit Kanten parallel zur Spindelachse, verschiebbar in einem kongruenten Lager der Gabel, ersetzt zu denken und hätten einen Normalschraubschieber oder gar einen Doppelschieber vor uns, wie wir solche später in bequemeren Formen zu erwähnen haben werden.

Denken wir uns den Schraubenzwilling (Figur 1) mit einer Muskulatur[1]) umkleidet. Bei der Vorführung des Instrumentes helfen wir mit unserer eigenen Muskulatur aus, um einige der ∞^1 verschiedenen[2]) Instantanschraubungen wirklich auszuführen, welche bei fester Gabel z die bewegliche Gabel z' und jeden mit der letzteren starr verbundenen Körper aus der Anfangslage der Figur in eine benachbarte neue überführen. Die Achsen der so ausführbaren, zu unserem linearen Schraubenbüschel R_{II} gehörigen Schraubungen liegen auf einem *Zylindroide*[3]), welches G_I und G_{II}, die durch p gelegte x- und y-Achse, zu Haupterzeugenden hat und die (gegenseitige Entfernung der beiden symmetrisch zur xy-Ebene und auf der hierzu senkrechten z-Achse G_{III} gelegenen Zwickpunkte oder pinch-points der Fläche, die sog.) „Spannweite" $\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I$ besitzt.

Von dieser Fläche mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)z = (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)xy$$

sind viele Konstruktionen angegeben worden. Eine der einfachsten ist wohl die durch Bestimmung ihrer Erzeugenden als kürzeste Transversale der auf G_{III} fallenden z-Achse und einer beliebigen Geraden des Strahlenbüschels mit dem Zentrum $(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I, 0, 0)$ in der Ebene $y - z = 0$. Letzteres Strahlenbüschel kann man übrigens ersetzen durch ein jedes andere, dessen Zentrum in einem beliebigen Punkte p_1 einer beliebigen Zylindroidkante G_1 (nur nicht auch auf G_{III}) liegt und dessen Ebene

1) Vgl. S. 239 Anm. 2 und z. B. den verwickelteren, auf S. 267 als Beispiel eines besonderen Freiheitsgrades V herangezogenen Fall der Gelenkigkeit und und Muskulatur der ausgestreckten Hand bei festem Schulterblatt, um die Nützlichkeit dieser wohl anfangs befremdlichen Hilfsvorstellung zuzugeben. Es sei hier insbesondere auf die interessante Studie „Kinematik im Tierreiche" S. 721 in F. Reuleaux' Kinematik II. Bd. (Braunschweig 1900) hingewiesen.

2) Indem wir etwa eine und dieselbe kleine Schraubung von z' um s_I der der Reihe nach mit verschiedenen Schraubungen um s_{II} zusammensetzen.

3) Wir müssen auf Anm. 1, S. 229 verweisen. Ein schönes Beispiel dieser Regelfläche 3. Grades, deren bei schiefer Parallelstrahlung auf die Ebene $G_I G_{II}$ entworfenes Bild eine Steinersche dreispitzige Hypozykloide ist, ziert das Titelblatt des oben erwähnten Ballschen Werkes (1900). In diesem Bilde erscheinen die Zylindroidkanten als Tangenten der dreispitzigen Steinerschen Zykloide. Bezgl. des Namens „Zylindroid" vergl. ebenda Seite 20 Anm.

p_1 mit der zu G_1 (bezüglich der Hauptkanten G_I und G_{II}) symmetrischen Erzeugenden G_2 der Fläche verbindet.

Um die auf alle beliebigen Zylindroidkanten G als Schraubenachsen im Büschel R_{II} entfallenden Parameter (und damit die Ganghöhen der Schraubungen um G) zu übersehen, trage man von einem Punkte, z. B. vom Anfange p aus auf Parallelen zu den Zylindroidkanten, also nur in den Richtungen der Ebene $z = 0$ die zugehörigen Schraubenparameter ab. Man erhält als Ort der Endpunkte die Parameterkurve

$$(x^2 + y^2)^3 - (\mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2)^2 = 0,$$

deren verschiedene Konstruktionen (direkte Auffindungen der obigen Endpunkte) und Gestalten der Verfasser an anderer Stelle[1]) angegeben hat. Wegen der Symmetrie der Parameterkurve gehören jene zu einander windschiefen Zylindroidkanten zu gleichen Parametern, welche bezüglich der Haupterzeugenden $G_I G_{II}$ symmetrisch liegen. Speziell die beiden gegen G_I und G_{II} unter 45^0 geneigten und gegen einander senkrechten, zu den Zwickpunkten gehörigen Zylindroidkanten, die „Zwickkanten" oder wegen ihrer größten Entfernung $e = (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)$ „äußersten" Kanten sind im Schraubenbüschel R_{II} mit dem Parameter $\frac{1}{2}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II})$ zu belegen.

Wie jedes Achsensystem eines linearen Schraubengebietes, bleibt auch unser Zylindroid die Achsenfläche jenes — wieder linearen — Schraubenbüschels, dessen auf die einzelnen Achsen (Zylindroidkanten) entfallende Parameter sich von den früheren nur um einen algebraischen Summanden unterscheiden, wobei aus der früheren Parameterkurve eine ihrer Konchoiden wird.[2])

Sind insbesondere die beiden Hauptparameter entgegengesetzt gleich[3]),

$$\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} = 0,$$

so haben wir uns die beiden Schrauben s_I, s_{II} am Schraubenzwilling (Fig. 1) von gleicher Ganghöhe, aber die eine links, die andere rechts gewunden zu denken. Die zum Parameter 0 gehörigen auf dem Zylindroide bezüglich der Haupterzeugenden $G_I G_{II}$ symmetrisch gelegenen Kanten $G_1 G_2$ sind in diesem Falle zu einander senkrechte Windschiefe. Durch Drehungen um diese könnte man die Gabel z'

---

1) In der ersten seiner auf S. 229, Anm. 1 erwähnten Abhandlungen in der Zeitschrift f. M. u. Ph., S. 68. Hierzu die dortigen Figuren 2', 3', 4' speziell auch 6, identisch mit der Linie 1 der Figur 71, S. 293 in Zindlers Liniengeometrie.

2) Die Figur 7 in der obigen Abh. d. Verf. veranschaulicht die dergestalt bei einem Zylindroid möglichen Parameterverteilungen. Ebenso die Linien 2, 3, 4 der eben erwähnten Figur Zindlers.

3) Parameterkurve ($\mathfrak{P}^*$) Fig. 6 ebenda, Zindlers Linie 1 der Fig. 71.

ebensogut wie durch den Schraubenzwilling in jede durch den letzteren erreichbare Nachbarlage bringen. Praktisch verwirklicht ist dieser Spezialtypus der Beweglichkeit II durch jede Türklinke, welche nicht bloß um ihre eigene Achse G_1, sondern auch samt dem Türflügel um die Verbindungsachse G_2 der Türangeln drehbar ist. Die gleiche Beweglichkeit der Türklinke und die gleichen Nachbarlagen könnte man erreichen, wenn man diese Klinke mit der Gabel z' eines mit $\mathfrak{p}_{II} = -\mathfrak{p}_I = \frac{e}{2}$ (e der kürzeste Abstand der Achsen $G_1 G_2$) als Hauptparameter versehenen Schraubenzwillings starr verbinden, die Achsen $G_I G_{II}$ des Kreuzkörpers in die gehörige Lage als Symmetrieachsen von G_1 und G_2 bringen, und die Gabel z vollkommen befestigen würde.

Ist dagegen einer der beiden Hauptparameter, etwa $\mathfrak{p}_I$, gleich Null[1]), so ist die eine Spindel s_I (s'_I) am Kreuzkörper durch einfache Zapfen, und sind entsprechend die Mutterwindungen in der Gabel z durch einfache Achsenlager, zu ersetzen. Ist der Wert von $\mathfrak{p}_{II}$ hierbei so geändert gedacht, d. h. die Spindel s_{II} und ihr Mutterlager derart gewunden, daß die algebraische Differenz der Hauptparameter dieselbe bleibt wie früher, so ist wohl die alte Parameterkurve in eine ihrer Konchoiden[2]) bezüglich des Anfanges p übergegangen, das als Achsenfläche zu denkende Zylindroid aber unverändert geblieben. Das zu R_{II} gehörige lineare Reziprokalgebiet, das „Schraubengebüsch" P_{IV} hat nun mit R_{II} ($\mathfrak{p}_I = 0$, $\mathfrak{p}_{II} \gtrless 0$) die den Stäben auf G_I (d. h. den Winkelgeschwindigkeiten bei einfacher Drehung um G_I) entsprechende ausgeartete Schraubung R_I gemein, umfaßt also zusammen mit R_{II} nicht mehr wie im allgemeinen Falle das gesamte Schraubengebiet R_{VI} des Raumes, sondern nur ein Schraubengewebe P_V, dasselbe, welches P_{IV} mit der Hauptschraubung der Spindel s_{II} (Achse G_{II}, Parameter $\mathfrak{p}_{II}$) verbindet. Die Reziprokalgebiete R_{II} und P_{IV} sind nicht mehr im allgemeinen Falle Ergänzungsgebiete zu einander bezüglich des Schraubenraumes.

Beim gleichsteigenden Schraubenzwilling (vgl. S. 235) ist die Regelschar G des zu R_{II} gehörigen Zylindroides gemäß

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} (\gtrless 0)$$

zum Büschel der Strahlen G mit dem Anfange p als Zentrum und in der Ebene $G_I G_{II}$ ($z = 0$) ausgeartet. Gemäß

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$$

wird die Parmeterkurve ein Kreis, alle zu den Büschelstrahlen G als

1) Hierzu die Parameterkurve Fig. 3' der eben erwähnten Abhandlung des Verf. u. Zindlers Linie 3 in Fig. 71.

2) Vgl. S. 237 Anm. 2.

Achsen gehörigen und durch den gleichsteigenden Zwilling ausführbaren reellen Schraubenbewegungen haben denselben Parameter $\mathfrak{p}$.

Die häufigste Form, entsprechend

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{I} = \mathfrak{p}_{II} = 0,$$

ist der gewöhnliche Hooksche Schlüssel, der bei fester Gabel z der anderen z' eine einfache Drehung um jede zum Büschel $G_I G_{II}$ gehörige Achse zu erteilen geeignet ist.[1]) Sein lineares Schraubengebiet R_{II} ist zum Stabbüschel G geworden, also im reziproken Schraubengebüsch P_{IV} vollständig enthalten.

Genau wie dieser Schlüssel dient am menschlichen Körper bei *festem* Unterarmknochen das Handwurzelgelenk, welches dann alle Drehungen der Mittelhand (metacarpus) und damit eines in der Faust gehaltenen Gegenstandes um die durch das ideale Gelenkszentrum gehenden und zur Richtung des Unterarmes senkrechten Achsen — und in diesem Augenblicke um keine anderen — zuläßt.[2])

Ein anderes Beispiel: Bewegen wir die absichtlich *samt* Handwurzel (carpus) *starr* gehaltene Faust durch Drehung (Pronation oder Supination) um die ideale Achse G_I des Unterarmes bei gleichzeitiger Inanspruchnahme der Drehmöglichkeit um die Achse G_{II} des Ellenbogengelenkes! Ein gewöhnlicher Hookscher Schlüssel mit nach G_I und G_{II} gebrachten Kreuzarmen xx' und yy' würde bei starr mit dem Oberarmknochen verbundener Gabel z der mit z' (dem zweiten, in der Verlängerung des Oberarmes befindlichen Gabelschafte) starr verbunden gedachten Faust genau dieselbe Beweglichkeit sichern, d. h. genau dieselben Nachbarlagen erreichbar machen.

Die zu einem beliebigen Parameter $\mathfrak{p}'$ gehörigen Achsen Γ des

---

1) In der technischen Praxis wird der gewöhnliche Hooksche Schlüssel nur bei der sog. Cardanischen Aufhängung (z. B. eines Kompasses oder einer Uhr) mit fester, sonst stets mit einer um ihre Achse G_{III} einfach drehbaren Gabel z verwendet, welche diese Drehung auf die Schaftstange der Gabel z' zu übertragen hat (Fig. 1), auch wenn die Schaftachsen beider Gabeln einen Winkel ω mit einander einschließen. Diese Brauchbarkeit als Universalgelenk wird indessen für viele Zwecke dadurch beeinträchtigt, daß das Verhältnis der Drehgeschwindigkeiten beider Gabelstangen periodisch zwischen 1 und $\cos \omega$ schwankt; auch darf ω dem Werte 90° nicht zu nahe kommen. Vgl. F. Reuleaux, Theoretische Kinematik I. Bd. Braunschweig 1875. S. 386 und 612.

2) Nehmen wir die Drehbarkeit des Unterarmes (Pronation oder Supination) um seine ideale Achse z hinzu, so sind wir genau wie bei der eben (Anm. 1) geschilderten technischen Anwendung des Hookschen Schlüssels als Universalgelenk imstande bei festem Oberarm und ohne Beanspruchung des Ellbogengelenkes eine in der Hand auch schief gegen z gehaltenen Stange z' um ihre eigene Achse zu drehen. Häufig ist z' die Achse eines Hahnes, den wir drehen.

Reziprokalgebüsches P_{IV}, d. h. die Achsen jener *Stäbe*, welche als Kräfte gedeutet verbunden mit einem Drehmomente (Felde) um diese Achse, das $\mathfrak{p}'$mal so groß ist als die (durch die Stablänge gegebene Größe der) Kraft selbst, erfüllen für jeden konstanten Wert von $\mathfrak{p}'$ die *lineare Kongruenz* der Transversalen jener beiden Zylindroidkanten $G_1(\mathfrak{p})$ und $G_2(\mathfrak{p})$, welche zum Parameter $\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}'$ gehören und demgemäß bezüglich der Haupterzeugenden G_I und G_{II} symmetrisch liegen. Zu reellem Parameter können hierbei auch imaginäre Leitstrahlen $G_1 G_2$ der Kongruenz und deshalb doch wieder reelle Kongruenzstrahlen gehören.[1]) Diese Γ treffen das Zylindroid außer im Punkte $\mathfrak{p}_1$ auf G_1 und $\mathfrak{p}_2$ auf G_2 noch in einem reellen dritten Punkte p_0[2]), dort aber senkrecht zur durchgehenden Flächenkante.

Die Achsen Γ *aller bei unserem Schraubenzwilling unwirksamen Dynamen* schneiden *eine* Kante der zugehörigen Zylindroidfläche senkrecht.

Alle Γ erfüllen für alle möglichen Werte von obigem $\mathfrak{p}'$ den *quadratischen Komplex* der senkrechten Transversalen der Zylindroidkanten. (Im Falle $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$ des gleichsteigenden oder eines gewöhnlichen Hookschen Schlüssels treten hierbei an Stelle dieser Kanten Strahlen des Büschels $G_I G_{II}$.)

Durch jeden Punkt allgemeiner Lage geht ein Kegel 2. Ordnung von Achsen Γ des P_{IV}, dessen elliptische Basis auf dem Zylindroid des R_{II} durch jenen Rotationszylinder ausgeschnitten wird, welcher die z-Achse G_{III}, die Doppelkante des Zylindroids, und die durch p zu ihr gelegte Parallele zu diametral gegenüberliegenden Kanten hat (und welcher beim gleichsteigenden Zwilling und speziell beim gewöhnlichen Hookschen Schlüssel ein Orthogonalkegel ist). Der Kegel zerfällt, wenn sein Scheitel unendlich fern oder auf dem Zylindroide liegt (p_1) und zwar im letzteren Falle außer in das ebene Büschel der Normalen zur Kante G_1 des Punktes p_1 noch in dasjenige, dessen Ebene der Punkt p_1 mit der zu G_1 bezüglich G_I und G_{II} symmetrischen Kante G_2 verbindet. Das letztere Büschel wurde in der S. 236 erwähnten Zylindroidkonstruktion benutzt.

Der zu jeder Achse Γ in P_{IV} gehörige *Parameter* $\mathfrak{p}'$ kann stets in reeller Weise aus des Reziprokalrelation

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = e \operatorname{cotg} \vartheta$$

(e sei die kürzeste Entfernung von Γ und G_{III}, und ϑ der Winkel dieser Geraden) gegen jene Schraube des R_{II} (mit dem Parameter $\mathfrak{p}$) berechnet werden, deren Achse parallel zu der Projektion von Γ auf die Hauptebene $G_I G_{II}$ ist.

---

1) In Zindlers „Liniengeometrie“ ist eine solche *reelle* lineare Strahlenkongruenz mit imaginären, windschiefen Leitstrahlen in einer sehr übersichtlichen Figur (47 S. 175) dargestellt. Sie sind affin zu den Kongruenzen der Anm. 1 der nächsten Seite.

2) Vgl. die Transversalkonstruktion der Zylindroidkanten (S. 236) mit Hilfe eines Strahlenbüschels, dessen Zentrum ein beliebiger Flächenpunkt p_1 ist.

Zur z-Achse G_{III} selbst gehört im Gebüsche P_{IV} jeder beliebige Parameter $\mathfrak{p}'$; auch das Feld senkrecht zu dieser „Hauptachse des Gebüsches" gehört zu P_{IV}, es ist das einzige Feld im Gebüsche. $G_I = \Gamma_I$ und $G_{II} = \Gamma_{II}$ sollen „Nebenachsen" des P_{IV} heißen, sie gehören in P_{IV} zu den „Grundparametern" $\mathfrak{p}'_I = -\mathfrak{p}_I$, bezw. $\mathfrak{p}'_{II} = -\mathfrak{p}_{II}$.

Im Falle $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$ eines gleichsteigenden Zwillings (und des gewöhnlichen Hookschen Schlüssels) gehört zum Spezialwerte $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}_I = -\mathfrak{p}_{II}$ ($= 0$ beim Hookschen Schlüssel) eine *ausgeartete* Kongruenz von Achsen Γ, bestehend sowohl aus den Strahlen des Bündels mit dem Anfange p als Zentrum als auch aus allen Strahlen der Hauptebene $G_I G_{II}$. Allen übrigen Parameterwerten $\mathfrak{p}'$ entsprechen in diesem Falle zirkuläre lineare Kongruenzen[1]), welche durch *Rotation* der die G_{III} als Scheitelgerade enthaltenden Regelschar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides [mit der anderen Scheitelgeraden G_I und der Verteilungskonstante[2]) $(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_I)$] *um* G_{III} erzeugbar sind.

Die *bisherigen* durch unseren Schraubenzwilling und seine Abarten darstellbaren Fälle haben in R_{II} Achsen G *verschiedener* Richtungen und das Gemeinsame, daß im reziproken Gebüsche P_{IV} eine und nur eine Gerade Γ^*, nämlich gerade die zur z-Achse gewählte G_{III}, mit beliebigem Parameter versehen werden kann; wir nannten sie Hauptachse des Gebüsches; in dem nun noch für den Freiheitsgrad II zu erörternden Falle 2. bezw. 2'. werden alle Strahlen eines Parallelbüschels, im Falle 2''. sogar alle senkrechten Transversalen einer Geraden, im Falle 3. wiederum alle Strahlen eines Parallelbündels diese auszeichnende Eigenschaft teilen.

2.

Jene Beweglichkeit vom Freiheitsgrade II, bei welcher ein starrer Körper nicht um Achsen verschiedener Richtungen, sondern nur um die Parallelstrahlen einer Ebene schraubbar wird, können wir in typischer Weise durch die (schiefe) Schubschraube oder den (schiefen)

Schraubschieber (Figur 2)

erreichen. Dieser stellt nichts anderes als eine Schraubenmutter vor, deren Spindel in einer (zu ihrer Achse G_I) schiefen Richtung verschoben werden kann. Eine bequeme Form desselben erhalten wir aus dem Schraubenzwilling dadurch, daß wir von der in der Figur 1 gezeichneten Anfangslage ausgehend, die Gabel z' um G_{II} herum um

---

1) Kongruenzen, deren imaginäre windschiefe Leitstrahlen durch die Kreispunkte der Hauptebene $z = 0$ gehen.

2) Die Verteilungskonstante bedeutet die kürzeste Entfernung der unter 45^0 gegen die Zentralebene geneigten Paraboloidkante von der in dieser Schar enthaltenen Scheitelgeraden.

einen Winkel $\mathfrak{a}$ drehen, so daß die neue Lage von G_{I} mit G_{III} und der Ebene $\nu = G_{II} G_{III}$ den Winkel $\alpha = 90^{0} - \mathfrak{a}$ einschließt.[1]) Hierauf machen wir die Spindel s_{II} dadurch unwirksam, daß wir den Kreuzkörper k mit der Gabel z starr verbinden. Statt zu diesem Zwecke beide Körper etwa bei s_{II} (s'_{II}) zusammenzulöten, benutzen wir einen an s_{I} und s'_{I} anschraubbaren Halbring r, welcher in einer passenden Ausnehmung r' an dem Schafte der Gabel z, worin er sonst gleiten könnte, mit Hilfe der Stellschraube h für beliebige Werte von α festgestellt werden kann.

Damit dies auch für $\alpha = 0$ möglich sei, ist einerseits zwischen den Gabelzinken beim Schafte z der nötige Raum gelassen worden und sind andererseits die verlängerten Enden von r in der Nähe der Anschraubstellen etwas verbogen. Um die Starrheit des Systems kz verläßlich zu wahren, wird der Querschnitt des Ringes r nicht nur größer als dies in der Figur der Übersichtlichkeit wegen geschah, sondern auch nicht wie dort kreisförmig, eher etwa in Form eines Rechteckes zu wählen sein, dessen längere Seiten zu G_{II} senkrecht stehen; auf der zu G_{II} senkrechten Grenzfläche des Halbringes ist dann auch leicht eine Gradeinteilung zur Einstellung für verschiedene α anzubringen.

Zum Ersatz für die so verlorene Schraubbarkeit um s_{II} bringen wir z in starre Verbindung mit dem Gleitstücke b, welches im festen zugehörigen Rahmen a beweglich ist, also dem System die zum Felde der Ebene $G_{II} G_{III}$ senkrechte Translation σ (Parallelverschiebbarkeit) sichert.

Ist hierbei speziell der Parameter $\mathfrak{p}_{I}$ von s_{I} (s'_{I}) Null, d. h. die Gabel z' um die Achse G_{I} von s_{I} (s'_{II}) einfach drehbar, was etwa durch die zylindrische Abglättung der Kontaktstellen der Spindel s_{I} (s'_{I}) und der Gabel z' nebst Anbringung von zylindrischen Wülsten als Hindernis gegen eine Seitenverschiebung der Gabel zu erreichen ist, so nennen wir unsere Vorrichtung *Drehschieber*. Wenn wir den Schraubschieber für $\alpha = 0$ einstellen, d. h. so, daß die Schraubenachse G_{I} nach G_{III} fällt, also zur gestatteten Translation senkrecht wird, können wir ihn als *aufrechte Schubschraube*, bezw. aufrechtes Schubrad ($\mathfrak{p}_{I} \gtrless 0$, bezw. $\mathfrak{p}_{I} = 0$) bezeichnen.

Indem wir die zulässige Schraubung und die durch ein zu σ senkrechtes Feld f dargestellte Schiebung in verschiedenen Verhältnissen zusammensetzen, erhalten wir alle Schraubungen des zugehörigen für die Beweglichkeit charakteristischen linearen Schraubenbündels R_{II}. Die Achsen G desselben sind die zu G_{I} parallelen Strahlen der Ebene $\mu = G_{I} G_{II}$, d. h. durch Komponierung der gestatteten Grundbewegungen

---

1) Wir nehmen hier $\alpha \gtrless 0^{0}$; $\alpha = 0^{0}$ soll sogleich unter 2'., $\alpha = 90^{0}$ unter 2'' erörtert werden.

schrauben wir stets — bei festem Schubrahmen a — die Gabel z' und jeden mit ihr starr verbundenen Körper um eine Achse G des obigen Parallelbüschels und zwar schrauben wir um diese Achse mit einer Ganghöhe $\mathfrak{h} = 2\pi\mathfrak{p}$, welche wie der Parameter $\mathfrak{p}$ selbst nach der einen Seite von G_I zu-, nach der anderen abnimmt, proportional der Entfernung e von G und G_I; denn es gilt

$$\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I = e \operatorname{tg} \alpha,$$

das „Parametergefälle" $\frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I}{e}$ ist gleich der Tangente des Einstellwinkels α.

Da $\alpha \gtrless 0$[1]), gibt es im Büschel auf der einen Seite von G_I in der Entfernung $e = (-)\, \mathfrak{p}_I \operatorname{cotg} \alpha$ (entsprechend $\mathfrak{p} = 0$) *einen* Strahl G_0, um welchen als Achse die Beweglichkeit unseres Schraubschiebers der Gabel z' eine einfache Drehung gestattet.

Die gleichen Bewegungen eines Körpers wie durch den *Schraub*schieber, kann man also ebenfalls durch einen für dasselbe α eingestellten *Dreh*schieber erhalten, welcher bei gleicher Schubrichtung (σ) mit seiner Drehungsachse G_I nach G_0 gebracht wird: Beide Vorrichtungen in dieser Parallelstellung bieten dem starren Körper die gleichen Nachbarlagen, die gleiche Beweglichkeit, nur sind die beiden unteren Gabeln beider an anderen Stellen des beweglichen Körpers festgemacht.

Das *Reziprokalgebüsch* P_{IV} hat zu Achsen Γ alle (zum Felde f der Ebene $\nu = G_{II} G_{III}$ parallelen, also) zu σ senkrechten Geraden, jede behaftet mit einem Parameter $\mathfrak{p}'$, welcher entgegengesetzt gleich ist dem Parameter $\mathfrak{p}$ der von ihr getroffenen Geraden G des obigen als Achsenort zu R_{II} gehörigen Parallelbüschels $G_I G_0$ in der Ebene $\mu = G_I G_{II}$. Von allen Geraden der Ebene μ, oder auch nur parallel zu ihr, zählen nur die (senkrechten gemeinsamen Transversalen aller Strahlen des Parallelbüschels, nämlich die) in μ gelegenen Parallelen Γ^* zu G_{II} als Achsen Γ der an z' unwirksamen Dynamen, jede belegbar mit jedem beliebigen Parameter. Zu P_{IV} gehört auch das Büschel der zu G_I parallelen Felder φ; diese stellen die bezüglich z' unwirksamen Drehmomente vor. Jedem konstanten Werte von $\mathfrak{p}'$ entsprechen in P_{IV} als zugehörige Achsen Γ die zu f parallelen Transversalen jener Achse G im obigen Parallelbüschel, welche im Gebiete R_{II} zum Parameter $\mathfrak{p} = -\mathfrak{p}'$ gehört. Unwirksam sind hiernach von den einfachen Kräften $(\mathfrak{p}' = 0)$ nur jene zu f parallelen — d. h. zu σ senkrechten — Kräfte Γ_0, welche G_0 schneiden.

---

1) Vergl. S. 242 Anm. 1.

Ein hierher passendes Beispiel ist die Drehung der Pappendeckelblätter eines Bilderbuches, welches ein Kind im Eisenbahnwagen auf einem schrägen Pulte liegen hat und umblättert. Setzt man die Translation σ des Wagens mit der Drehbewegung eines Blattes um die im Buchrücken gelegene Achse G_0 in verschiedenen Verhältnissen zusammen, so kann man in einem bestimmten Augenblick dem Pappendeckel dieselbe Beweglichkeit sichern, d. h. dieselben Nachbarlagen zugänglich machen, wenn man sich den Wagen und das Pult wegdenkt und das Blatt starr mit der Gabel z' eines durch σ und $G_I = G_0$ völlig orientierten Drehschiebers verbindet, dessen Rahmen a man feststellt.

2'.

Insbesondere bei dem für $\alpha = 0$, also „aufrecht" eingestellten Schraubschieber (aufrechte Schubschraube) gelangt G_I nach G_{III}, und es gehört im Gebiete R_{II} zu allen Achsen G des Parallelbüschels (von G_I in $\mathfrak{E} = \mu = \nu = G_I G_{II} = G_{II} G_{III}$) derselbe Parameter; das Feld f liegt jetzt in der Ebene $\mu = \nu = \mathfrak{E}$ und ist hiernach R_{II} und P_{IV} gemeinsam, weshalb beide Gebiete jetzt im Gegensatze zum allgemeinen Falle 2. in einem Gewebe R_V enthalten sind.

Als Achsen Γ von Dynamen des Reziprokalgebüsches P_{IV}, welche bezüglich der Gabel z' unwirksam sind, treten alle[1]) zu $\mathfrak{E}$ parallelen Geraden auf. Ist e der Abstand einer solchen Geraden von $\mathfrak{E}$ und ϑ ihr Winkel mit G_I, so gilt

$$\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}_I = e \operatorname{tg} \vartheta,$$

woraus sich für jede solche Achse der Parameter $\mathfrak{p}'$ ergibt.

Zu einem bestimmten Werte dieses Parameters $\mathfrak{p}'$ gehören als Achsen Γ die Strahlen einer besonders ausgearteten linearen Kongruenz mit in unendlicher *Ferne* (an f) *zusammengerückten* Leitlinien:

Ihre Strahlen erhalten wir durch Parallelverschiebung in der Richtung G_{II} (oder einer anderen Richtung von $\mathfrak{E}$) aus den Kanten einer gleichseitig-parabolischen Regelschar, nämlich der zu $\mathfrak{E}$ parallelen auf einem (jeden) Paraboloide mit G_{II} (oder einer anderen in $\mathfrak{E}$ zu G_{II} parallelen Γ^*) und einer diese schneidenden Geraden $\mathfrak{G}$ — von der zu $\mathfrak{E}$ senkrechten Richtung σ — als Scheitelgeraden und mit der Verteilungskonstante[2])

$$\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}_I.$$

Die zu $\mathfrak{p}' = 0$ gehörige unter diesen Kongruenzen gibt uns die sämtlichen in endlicher Entfernung befindlichen *einfachen* Kräfte an, welche auf die Gabel z' ebensowenig wirken können als die $\mathfrak{p}' = \infty$ entsprechenden Felder φ (Drehmomente) der zu G_I parallelen Ebenen.

---

1) Außer den nicht in $\mathfrak{E}$ gelegenen Parallelen zu G_{II}, welche wir als zum Parameter ∞ gehörig nicht als eigentliche Achsen ansehen, während die derart in $\mathfrak{E}$ liegenden Γ^* zu *beliebigem* Parameter gehören.

2) Vergl. S. 241 Anm. 2.

Insbesondere zum Parameter $\mathfrak{p}_I' = -\mathfrak{p}_I$ gehören alle Geraden der Ebene $\mathfrak{E}$ und alle im Raume zu G_I gelegten Parallelen, wobei wieder wie bei 2. die in der Ebene $\mathfrak{E}$ (μ bei 2.) zu G_{II} gelegten Parallelen Γ^* mit beliebigem Parameter belegbar sind.

Für $\mathfrak{p}_I \gtrless 0$ paßt hierher als bequemste Form der

aufrechten Schubschraube

die aus der Figur 1 entnommene Schraubenmutter m, angebracht (etwa wie beim oberen Teile der Fig. 2) an dem mit Windungen versehenen Teile der mit b starr verbundenen Zylinderstange t, wenn b im Schubrahmen a als Gleitstück beweglich und die Richtung der Stangenachse (t) zur Gleitrichtung σ senkrecht steht. m hat gegen a die verlangte Beweglichkeit.

Aufrechtes Schubrad m_0.

Für $\mathfrak{p}_I = 0$ könnten wir den als Rad um t (an dem glatten Zylinderteil Fig. 2) drehbaren Muff m_0 aus der Figur 1 verwenden, wenn wir die Verschiebungen in der Richtung ϱ der Achse von t verhinderten. Letzteres tun wir etwa einmal durch einen Wulst und nach der anderen Seite hin durch einen in der Richtung ϱ durch eine Nut an t geführten Gleitkörper c. Letztere Anordnung hat für uns u. a. den Vorteil, daß wir m_0 später als Muff m^* am Stift t verwenden und in den Figuren 2 und 4 mehrfach schieben können, falls wir c emporheben und dort etwa durch die Stellschraube h fixieren.

Als zu $\mathfrak{p}_I = 0$ hierher passende Beispiele haben wir: Eine um die Angelachse G_0 drehbare Tür in einem in der Richtung σ verschiebbaren Eisenbahnwagen, da G_0 zu σ senkrecht steht, oder ein Riegel mit wagrechter Prismenführung, angebracht am Flügel eines Haustores.

2″.

Muff am Stift.

Der Fall $\alpha = 90^\circ$ beim Schraubschieber macht die Gabel z' der Figur 2 um die durch M in der Richtung σ gelegte Achse $\mathfrak{G}$ — unter Hinzunahme der Translation — mit beliebigem Parameter schraubbar ($\mathfrak{G} = G^*$), also drehbar (gemäß $\mathfrak{p} = 0$ und dem Stabe l auf G^*) *und* parallel verschiebbar (entsprechend $\mathfrak{p} = \infty$ und dem Felde f senkrecht zu G^*). Diese Beweglichkeit ist sicherlich bequemer veranschaulicht durch einen hohlzylindrischen Muff m^* (Fig. 3), einen Körper mit zylindrischer Ausbohrung[1]), der um einen angepaßten zylindrischen Stift t sich bewegen kann wie ein Ring am Finger. Ebensogut kann man natürlich den Muff fest und den Stift beweglich denken.

---

1) Dieser Körper kann etwa der in Fig. 1 als Drehrad verwendeten hohlzylindrischen Scheibe m_0 kongruent sein.

Andere Achsen G als G^* kommen beim hierhergehörigen Schraubenbüschel R_{II} nicht vor.

Die Achsen Γ des Reziprokalgebüsches P_{IV} reduzieren sich auf die zu beliebigem Parameter gehörigen senkrechten Transversalen Γ^* der Achse G^* von m und t. Das Feldbüschel parallel G^* gehört auch zu P_{IV}. R_{II} und P_{IV} ergänzen sich zum Schraubengebiete des Raumes.

3.

Endlich kann jede der beiden ein Schraubenbüschel R_{II} bestimmenden Grundschrauben ein Feld sein und es wird R_{II} zum Feldbüschel, wo man von gar keinen eigentlichen Schraubenachsen G zu sprechen hat. Zu P_{IV} gehören als Achsen Γ alle mit beliebigem Parameter belegbaren zur Achse des Feldbüschels R_{II} *parallelen Geraden*, sowie alle Felder: R_{II} ist in P_{IV} enthalten. Als Beispiel diene ein Riegel mit Prismenführung an einer Schublade oder ein Schubfenster im beweglichen Eisenbahnwagen. Unser typischer Repräsentant soll der

Doppelschieber

sein, den wir erhalten, wenn wir den Rahmen a, in welchem ein Gleitstück b in der Richtung σ verschiebbar ist (Fig. 4, dort ohne b), selbst als — etwa in der zu σ senkrechten Richtung τ bewegliches — Gleitstück in einem festen Rahmen a_1 verwenden. Jedem an b befestigten Körper Z kann man nun bequem eine jede aus den Translationen σ (b in a) und τ (b samt a in a_1) zusammengesetzte, zur Doppelrahmen-Normalen ρ senkrechte Schiebung erteilen und nur eine solche.

Hiermit sind alle möglichen Fälle einer Beweglichkeit II erschöpft, wir gehen über zum

Freiheitsgrad III.

1.

Sollen Achsen G *aller* Richtungen in dem für die Beweglichkeit charakteristischen „Schraubenbündel" R_{III} vorkommen, so verwenden wir als typischen Repräsentanten den

Schraubendrilling

(Fig. 1, m an z', k, z), welchen wir aus einer zu beliebigem Parameter gehörigen Schraubenmutter m dadurch erhalten, daß wir sie an der Schaftstange t der Gabel z' des Schraubenzwillings (an der Stelle, wo t mit einem gemäß $\mathfrak{p}_{III}$ ansteigenden Gewinde versehen ist) möglichst reibungslos beweglich machen; m und jeder damit verbundene Körper erfreut sich nun der gewünschten Freiheit III, indem er um die sich in p senkrecht schneidenden (Hauptachsen oder) Achsen der Haupt-

schrauben $G_I(\mathfrak{p}_I)$, $G_{II}(p_{II})$, $G_{III}(p_{III})$ beweglich wird. Setzen wir diese zulässigen Hauptschraubungen in verschiedenen Verhältnissen zusammen, so erhalten wir Schrauben um Achsen G aller Richtungen.

Zu jeder Richtung gehört nur eine Achse G. Diese geht im Falle *verschiedener* Hauptparameter $\mathfrak{p}_i$ $(i = I, II, III)$ allerdings nicht mehr wie die Hauptachsen G_i, die Achsen unseres Koordinatensystems, durch den Ursprung p; wir werden die Lagen aller G alsbald besprechen, können uns aber auf den durch p zu den G gelegten Parallelen sogleich den in R_{III} jeweilig auf die zugehörige G entfallenden Parameter $\mathfrak{p}$ vom Anfange p aus abtragen und erhalten so die Parameterfläche[1])

$$(\mathfrak{P}) \ldots (x^2 + y^2 + z^2)^3 - (\mathfrak{p}_I x^2 + \mathfrak{p}_{II} y^2 + \mathfrak{p}_{III} z^2)^2 = 0$$

als Ort aller Endpunkte.

Zum mittleren der nach ihrer algebraischen Größe geordnet gedachten Hauptparameter $\mathfrak{p}_{II}$ gehört nicht G_{II} allein, sondern ein Büschelpaar mit G_{II} (der y-Achse) als gemeinsamem Strahle; die Zentren M und N dieser reellen sog. „Basisbüschel" liegen auf G_{II} im Abstande

$$e_{II} = \pm \sqrt{-(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_{III})(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)}$$

vom Anfange p und ihre Ebenen μ, bezw. ν

$$(\mathfrak{p}_{III} - \mathfrak{p}_{II})x^2 - (\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)z^2 = 0$$

gehen durch G_{II} symmetrisch zu den Koordinatenebenen.

Als Achsenort gehören hierher die Kongruenzen Waelschs[2]) $K(G)$, die „linke" Kongruenz, erfüllt von den Achsen G des R_{III}, um welche z' geschraubt werden kann, und die „rechte" Kongruenz $K(\Gamma)$ der unwirksamen Dynamen im Reziprokalgebiete P_{III}. Beide sind zueinander bezüglich der Koordinatenebenen symmetrisch. Wenn wir feststellen, daß bei der Spiegelung einer Schraube $G(\mathfrak{p})$ an einer Ebene nicht bloß die Achse in ihr Spiegelbild übergeht, sondern auch

---

1) Fig. II in der Abhandlung des Verfassers in der Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 49, Heft 2 gibt ein *Bild* dieser Fläche. Ebenda S. 218 wird die Konchoidenschar der $(\mathfrak{P})$ bezüglich des Mittelpunktes p besprochen, welche zu jenen linearen Schraubenbündeln R_{III} gehören, die sich aus dem unseren durch Hinzufügung gleicher algebraischer Summanden zu den Parametern der Schrauben mit den alten Achsen G ergeben. Bezüglich der direkten Konstruktion der auf $(\mathfrak{P})$ fallenden Endpunkte auf den durch M gelegten Parallelen vergleiche S. 105 im 48. Band dieser Zeitschrift, 1. Heft. Wir gebrauchen das Wort „Parameterfläche" in ganz anderem Sinne als Study.

2) E. Waelsch „Über eine Strahlenkongruenz beim Hyperboloide", Wiener Sitzungsberichte 1887, 95. Band, S. 781.

der Parameter $\mathfrak{p}$ den entgegengesetzten Wert annimmt, so können wir sagen:

Die Reziprokalbündel R_{III} und P_{III} sind bezüglich der Hauptebenen symmetrisch. Beide haben im allgemeinen, durch *Verschiedenheit* der Hauptparameter gekennzeichneten Falle nur die Achsen $G_i = \Gamma_i$ $(i = \text{I, II, III})$ der Hauptschrauben gemein, wobei die zugehörigen Hauptparameter $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i'$ der Reziprokalbündel durch die Gleichungen $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_i'$ verbunden sind. R_{III} und P_{III} sind daher ergänzende Gebiete voneinander bezüglich des Schraubenraumes und sind es nur dann nicht, wenn einer dieser Hauptparameter Null wird, da sie im letzteren Falle die dann zum Stabe ausgeartete Hauptschraube gemein haben; im letzteren Falle liegen R_{III} und P_{III} in einem „Gewebe" R_V.

Die zum Hauptparameter $\mathfrak{p}_{II}'$ im P_{III} gehörigen reellen Basisbüschel, die beiden „rechten" $M(\nu)$ und $N(\mu)$, haben im Vergleiche mit zu jenen des R_{III}, den beiden „linken" $M(\mu)$ und $N(\nu)$ vertauschte Zentren *oder* Ebenen.

Die *einfachste Konstruktion* der Geraden $\frac{G}{\Gamma}$ der Kongruenz $\left\{\begin{matrix} K(G) \\ K(\Gamma) \end{matrix}\right\}$, welche als *Achsen im Schraubenbündel* $\left\{\begin{matrix} R_{III} \\ P_{III} \end{matrix}\right\}$, d. h. als zu bestimmten Parametern gehörige Achsen von $\left\{\begin{matrix} \text{Schraubungen} \\ \text{Dynamen} \end{matrix}\right\}$ auftreten, welche $\left\{\begin{matrix} \text{durch die Beweglichkeit} \\ \text{auf die Bewegung} \end{matrix}\right\}$ des mit der Gabel z' starr verbundenen Körpers $\left\{\begin{matrix} \text{gestattet} \\ \text{unwirksam} \end{matrix}\right\}$ sind, ist die Konstruktion als kürzeste Transversale zweier beliebiger Strahlen der verschiedenen, zum mittleren Hauptparameter $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p}_{II} \\ \mathfrak{p}_{II}' \end{matrix} = -\mathfrak{p}_{II}\right\}$ gehörigen $\left\{\begin{matrix} \text{„rechten"} \\ \text{„linken"} \end{matrix}\right\}$ Basisbüschel $\left\{\begin{matrix} M(\nu) \text{ und } N(\mu) \\ M(\mu) \text{ und } N(\nu) \end{matrix}\right\}$.

Die zu einem bestimmten Parameter $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}' \end{matrix}\right\}$ in $\frac{R_{III}}{P_{III}}$ gehörigen Achsen $\left\{\begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix}\right\}$ erfüllen hierbei die $\left\{\begin{matrix} \text{linke} \\ \text{rechte} \end{matrix}\right\}$ Regelschar des — bei Geltung der Gleichung $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = 0$ mit dem Träger der zu $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p}' \\ \mathfrak{p} \end{matrix}\right\}$ gehörigen Reziprokalachsen identischen — *Hyperboloides* $F(\mathfrak{p})$

$$F(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)x^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})y^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{III})z^2 + (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II})(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{III}) = 0,$$

welches für alle zwischen den extremen Hauptparametern $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{III}$ gelegenen Werte von $\mathfrak{p}$ reell ist. Einige der Gestalten dieser zu *verschiedenen* Werten von $\mathfrak{p}$ gehörigen, sog. „gleichbündigen" Hyperboloide hat der Verfasser nebst dem Bilde der von ihnen eingehüllten *Hydeschen Brennfläche* an anderer Stelle gegeben.[1]) Letztere Fläche wird

---

1) In der zweiten auf S. 229, Anm. 1 erwähnten Abhandlung des Verf. im 49. Bd. dieser Zeitschrift, 2. Heft. Die dortigen Figuren IV bis X sind Gestalten gleich-

von allen G und Γ doppelt berührt und außerdem noch doppelt durchsetzt.

Die „Gleichbündigkeit" zweier Hyperboloide ist hierbei rein geometrisch am einfachsten dadurch gekennzeichnet, daß beide Flächen 2. Ordnung ihre *Kreisschnittsebenen* (μ, ν) und das zu diesen Kreisschnittsebenen senkrechte *Fokalachsen*-Quadrupel (die Lote zu μ und ν durch M und N) gemein haben.

Statt des oben zur Transversalenkonstruktion der $\left\{\begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix}\right\}$ benutzten Büschelpaares $(\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{II},$ analog $\mathfrak{p}'_{II} = -\mathfrak{p}_{II})$ könnte man dort auch die $\left\{\begin{matrix} \text{rechte} \\ \text{linke} \end{matrix}\right\}$ Schar eines beliebigen der gleichbündigen Hyperboloide benutzen.

Durch jeden Raumpunkt gehen drei Achsen G und Γ, deren Parameter zu den drei Hyperboloiden $F(\mathfrak{p})$ gehört, welche den Punkt enthalten, entsprechend den drei Werten der obigen in $\mathfrak{p}$ kubischen Gleichung. Alle drei sind reell für die Punkte innerhalb und nur eine ist reell für Punkte außerhalb der Brennfläche: Diese drei $\left\{\begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix}\right\}$ können konstruiert werden als gemeinsame Kanten jener beiden Orthogonalkegel, welche von den Loten aus dem Raumpunkte auf die Strahlen der beiden Büschel $\left\{\begin{matrix} M(\nu) \text{ und } N(\mu) \\ M(\mu) \text{ und } N(\nu) \end{matrix}\right\}$ erfüllt werden.

Ein einfaches Beispiel hierher gehöriger Beweglichkeit bietet die Faust eines in einem drehbaren Ringelspielwagen Sitzenden, wenn er dieselbe bei schräg gehaltenem starren Unterarm nur um eine beliebige der (zur Unterarmachse senkrechten) Achsen des Handwurzelgelenkes dreht. Sei $MN = G_{II}$ die durch das Handwurzelzentrum M gehende, zur Unterarmachse senkrechte Transversale der Ringelspielachse G und N ihr Schnittpunkt mit der letzteren. M und N sind die Zentren der Basisbüschel in den Ebenen μ (Ebene der Achsen des Handwurzelgelenkes) und ν (Ebene MG); G_I und G_{II} sind die Geraden, welche senkrecht zu $MN = G_{II}$ durch den Mittelpunkt p der Strecke MN (Länge $2e_{II}$) in den Richtungen der Halbierenden des Winkels α von μ und ν gezogen werden. Weist man G_{II} den Parameter $\mathfrak{p}_{II} = 0$, G_I und G_{III} aber die Parameter $\mathfrak{p}_I = -e_{II} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$, bezw. $\mathfrak{p}_{III} = e_{II} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (nach den Gleichungen S. 247) zu und orientiert einen Schraubendrilling gemäß den so angegebenen Hauptschrauben $G_i(\mathfrak{p}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, so könnte man nach starrer Verbindung der Schraubenmutter m

bündiger Hyperboloide, welche die Hydesche Fläche Fig. XI einhüllen. Von der letzteren Fläche hat E. W. Hyde: „On a surface of the sixth order which is touched by the axes of all screws reciprocal to three given screws" in den Annals of Mathematics, II. ser., vol. 2, N 4, Juli 1901, Mass. U. S. A. die ausführliche Diskussion und die Zeichnungen der drei Hauptschnitte gegeben. E. Study schmückt das Titelblatt seiner „*Theorie der Dynamen*" (Leipzig 1903) mit dem Bilde dieser Fläche. („Brennfläche einer aplanaren Kettenkongruenz" zu S. 489 etc.) Vergl. Anm. 1 S. 250.

mit dem festen Erdboden, der Faust durch Verbindung mit der Gabel s' dieselbe Beweglichkeit sichern, welche sie vordem bloß infolge der Funktionsfähigkeit der Handwurzelgelenke und der Ringelspielachse besaß.

Durch die Orientierung und vollzogene Hauptparameterbestimmung des Drillings ist die Frage nach der Lage aller Schraubenachsen G und Dynamenachsen Γ, sowie nach deren Parametern mit beantwortet und damit erst dem Bedürfnis nach Übersicht sämtlicher gestatteter Bewegungen genügt.

Ist einer der drei Hauptparameter Null, so wird die entsprechende zum Stabe ausgeartete Hauptschraube den Reziprokalgebieten R_{III} und P_{III} gemeinsam; beide Schraubenbüudel sind dann in einem Gewebe R_V enthalten. Die um die Achse G_{III} von Z in der Figur 1 drehbare Scheibe m_0 zeigt gegen die feste Gabel s diese Beweglichkeit.

Wird $\mathfrak{p}_{II} = \frac{1}{2}(\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{III})$ angenommen, so werden die Ebenen μ, ν der Basisbüschel zueinander senkrecht und stellen neue Symmetrieebenen der sich als Brennfläche ergebenden Hydeschen Sternballfläche dar, deren zweiter Hauptschnitt eine Astrois ist.[1])

Sind speziell zwei der Hauptparameter $\mathfrak{p}_i$ einander gleich, etwa

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} \; (\gtrless \mathfrak{p}_{III}),$$

so wird der Schraubendrilling „gleichsteigend" bezüglich G_I und G_{II}, welche sich in ihrem Büschel von den anderen Paaren Senkrechter gar nicht mehr auszeichnen; die gleichbündigen $F(\mathfrak{p})$ werden Umdrehungsflächen, erzeugbar durch Rotation der Kanten des zu $G_I(\mathfrak{p}_I)$ und $G_{III}(\mathfrak{p}_{III})$ gehörigen Zylindroids um seine Haupterzeugende G_{III}. Hierbei umhüllen sie die Hydesche Rotationsfläche.[2]) Die Parameterfläche entsteht dann durch Rotation aus einer Parameterkurve. Vergl. S. 237, Anm. 1.

Ist hierbei insbesondere $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = 0$, d. h. der Drilling ein gewöhnlicher, aber um G_{III} schraubbarer Hookscher Schlüssel, so hat R_{III} mit P_{III} das die Drehungen des Schlüssels darstellende Stabbüschel R_{II} gemein, und beide sind zusammen in jenem Schraubengebüsche enthalten, welches R_{II} mit den Schraubungen beliebigen Parameters um G_{III} verbindet.

Ist endlich

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \mathfrak{p}_{III},$$

so ist der Drilling „vollkommen" gleichsteigend, alle Achsen $\begin{Bmatrix} G \\ \Gamma \end{Bmatrix}$ der $\begin{Bmatrix} R_{III} \\ P_{III} \end{Bmatrix}$ sind mit dem gleichen Parameter $\begin{Bmatrix} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I \\ \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'_I = -\mathfrak{p}_I \end{Bmatrix}$ belegte Gerade

1) Vergl. in der Abhandlung des Verfassers im 49. Bd. dieser Zeitschr., 2. Heft die Fig. XIV zu diesem Sonderfalle. Dort ist S. 236 auch im allgemeinen Falle beliebiger $\mathfrak{p}_i$ eine kinematische Konstruktion der drei Hydeschen Hauptschnitte (Fig. XIII) gefunden worden.

2) Deren Meridianschnitt ebenda Fig. XV Kinematische Konstruktion S. 245.

des Strahlenbündels durch den Anfang p. Andere Achsen oder reelle Achsen anderen Parameters kommen überhaupt nicht vor. Wird hierbei insbesondere dieser Parameter Null, so haben wir es mit der in der Praxis gewöhnlichen Verwendung des Hookschen Schlüssels zu tun, bei welcher die Schaftstange der Gabel z um ihre eigene Achse frei drehbar ist[1]); die andere Gabel z' kann jede Drehung um jede Achse G durch den Mittelpunkt p des Kreuzkörpers k ausführen. Der so[2]) beweglich gemachte Hooksche Schlüssel ist geeignet, ein Kugelgelenk zu ersetzen, wie z. B. das zwischen Schulterblatt und Oberarmknochen befindliche Schultergelenk der Hand oder das Hüftgelenk des Fußes. Auch bei festem Oberarm und unbenutztem Ellbogengelenk ist das Handwurzelgelenk imstande, im Vereine mit der (Pronation oder Supination genannten) Drehung des Unterarmes um die eigene ideale Achse, der Faust und jedem darin gehaltenen Gegenstande dieselbe Beweglichkeit, nämlich die Drehbarkeit um jede durch das Zentrum p gehende Achse zu sichern.

Wir gehen nun über zu jenen Fällen, wo *nicht* mehr Achsen *aller Richtungen* im Schraubenbündel vorkommen.

$(1' =)\ 2^{\dagger}$.

Flacher Schraubendrilling (m_∞ an z', k, z in der Figur 1).

Wird bei $\mathfrak{p}_1 \gtrless \mathfrak{p}_{II}$ der dritte Hauptparameter $\mathfrak{p}_{III} = \infty$[3]), so ist der zur Verwirklichung verwendete Drilling dadurch abzuändern, daß statt der Schraubenmutter m ein hohlprismatischer Körper m_∞ um den prismatischen Teil der Stange t gelegt und in der Richtung G_{III} geführt wird (Fig. 3). Das Prisma m_∞ hat gegen die feste Gabel z die hier verlangte Beweglichkeit; wir nennen den so spezialisierten Drilling einen flachen.

---

1) So daß sie eine ihr etwa erteilte Zwangsdrehung um die Eigenachse innerhalb gewisser Grenzen und allerdings ohne deren gewöhnlich angenommene Gleichförmigkeit auch auf die schief gestellte Gabelstange z' übertragen könnte.

2) Ohne Zwangsdrehung der Stange z'! Vergl. Anm. 1.

3) Durch die Zuteilung dieses Spezialfalles zu 1. würden wir uns einer Inkonsequenz in Hinsicht auf unseren sonst stets festgehaltenen Einteilungsgrund dadurch schuldig machen, daß wir 1′ nicht schon zu 2 nehmen. Wir finden es aber durch Rücksichtnahme auf die *Einfachheit* der Beschreibung gerechtfertigt, diesen Fall als $2^{\dagger}$ (und lieber nicht 1′) gleich hier zu behandeln. Die Parameter $\mathfrak{p}_I$ und $\mathfrak{p}_{II}$ werden wir nun in den folgenden Fällen 2 (Hauptfall, speziell 2′ oder 2″) und auch stets in der zugehörigen Figur 2 als gleich voraussetzen dürfen. Hiervon hätten wir sonst abgehen müssen, um diesen Fall $2^{\dagger}$ noch später bei 2 unterbringen zu können. Vergl. S. 257 die Schlußbemerkung zu 2″.

Die Parameterfläche reduziert sich auf die Parameterkurve des zum Drilling k gehörigen linearen Schraubenbündels $R_{II}[G_I(\mathfrak{p}_I), G_{II}(\mathfrak{p}_{II})]$, da es Achsen anderer Richtung als senkrecht zu G_{III} nicht gibt.

Es kommen nur jene Achsen G im Schraubenbündel R_{III} vor, welche in den Ebenen $z =$ const. (Grenzlage der gleichbündigen Hyperboloide $F\mathfrak{p}$) liegen, und zu einer der beiden in eine solche Ebene fallenden Kanten des Zylindroids von R_{II} parallel sind.[1]) Sie gehören zum gleichen Parameter wie die parallelen Zylindroidkanten in R_{II}. Die Γ gehen aus den G durch Spiegelung an der Ebene $z = 0$ hervor und verhalten sich analog zum Spiegelbilde des obigen Zylindroides, wobei man zugleich mit der Spiegelung zum negativen Parameter überzugehen hat, so daß jedes der beiden in eine Ebene $z =$ const. fallenden Parallelbüschel Γ zu einem der dorthin fallenden Parallelbüschel G normal steht und den entgegengesetzten Parameter von dem der Achsen G des anderen Parallelbüschels hat. Beide Parallelbüschelpaare sind nur reell, wenn die Ebene $z =$ const. zwischen den beiden Grenzebenen

$$z = \pm \tfrac{1}{2}(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)$$

liegt, wo die Büschel beider hineinfallender Paare von G (und normal hiezu von Γ) in eine der zu $G_I G_{II}$ symmetralen Richtungen zusammenrücken.

Das **Feld** $f = \varphi$ der Parallelebenen $z =$ const. ist R_{III} und P_{III} gemeinsam, so daß beide in einem Gewebe R_V liegen.

Die beiden Grenzebenen stellen die Überbleibsel der reellen Teile der Hydeschen Brennfläche vor. Als die eine Symmetrieebene der letzteren haben wir $z = 0$ anzusehen, während von den beiden anderen nur die parallele Lage zu $G_I G_{III}$, bezw. $G_{II} G_{III}$ feststellbar ist.

Wird einer der beiden Hauptparameter, etwa $\mathfrak{p}_I$, $= 0$, so haben R_{III} und P_{III} das Büschel der zu G_I in der Ebene $z = 0$ $(G_I G_{II})$ parallelen Stäbe noch außer dem Felde dieser Ebene gemein, R_{III} und P_{III} liegen in einem Gebüsche R_{IV}.

Als Beispiel gehört hierher ein hohlprismatischer Ring verschiebbar an einer prismatischen Türklinke, wobei auch Klinke und Türflügel um ihre Achsen $G_1 G_2$ drehbar sind. Die Hauptachsen $G_I G_{II}$ sind hierbei durch beliebige Parallelverschiebung der Symmetralen von $G_1 G_2$ in der eigenen Ebene, welche von G_I und G_{II} um $\frac{e}{2}$ abstehen möge, zu erhalten und es ist (vgl. S. 238) $\mathfrak{p}_{II} = -\mathfrak{p}_I = \frac{e}{2}$.

1) Diese Zylindroidkanten schließen mit G_I den durch $\sin 2\vartheta = \frac{2z}{\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I}$ bestimmten Winkel ϑ ein und den zwei sich ergebenden ϑ-Werten entsprechend findet man den zugehörigen Parameter aus der Gleichung $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I \cos^2\vartheta + \mathfrak{p}_{II} \sin^2\vartheta$.

Würden wir $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} \gtrless 0$, den bei m_∞ in Prismenführung verschiebbaren Drilling gleichsteigend annehmen, so würde der planare Drilling zum Planschrauber (S. 257), es fielen beide Grenzebenen in $z = 0$ zusammen, und wir erhielten den später noch unter Typus 2″ (S. 256) zu erwähnenden Spezialfall von Schraubbarkeit um alle Achsen gleicher Ganghöhe (Pr. $\mathfrak{p}_I$) in einer Ebene $(z) = 0$. Wir können deshalb für unseren Typus 1′ den Fall *verschiedener endlicher* Hauptparameter ($\mathfrak{p}_I \gtrless \mathfrak{p}_{II}$) reservieren, denn auch der Fall des Unendlichwerdens von $\mathfrak{p}_I$ (oder gar auch noch von $\mathfrak{p}_{II}$) findet später ohnedies beim normalen Schraubdoppelschieber (S. 258, Fall 3′) und Schieberdrilling (S. 259, Fall 4) Berücksichtigung. Vgl. die Schlußbemerkung bei 2″ S. 257.

In den nun folgenden Fällen ist eine Parameterfläche (S. 247, Anm. 1) überhaupt nicht mehr zu gebrauchen.

2.

Kommen in dem für die Beweglichkeit charakteristischen Schraubenbündel R_{III} nur Schraubenachsen G der verschiedenen zu einem ebenen Felde φ parallelen Richtungen vor, wobei aber nicht mehr wie bei 1′ (S. 251) das zu R_{III} gehörige Feld f (Direktionsfeld der Achsen Γ des reziproken Bündels P_{III}) mit dem zu P_{III} gehörigen Feld φ identisch werden soll, so verwenden wir als typisches Modell zur Verwirklichung dieser Bewegungen den (schiefen)

Schraubzwillings-Schieber.

Dieser liegt schon in unserem Schraubschieber (Figur 2 und S. 241) vor, falls wir — durch Entfernung der Stellschraube h und des Halbrings r — die Spindel $s_{II}(s'_{II})$ befreien und so dem Kreuzkörper k die früher vorhanden gewesene Beweglichkeit gegen die Gabel z zurückgeben, den Parameter $\mathfrak{p}_{II}$ von s_{II} als dem von s_I gleich:

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$$

annehmen und den so als *gleichsteigend* vorausgesetzten Schraubenzwilling (z' an k an zb in a) in der gemäß α[1]) adjustiert gezeichneten Lage belassen denken. Durch ein etwa am Fortsatze u von z' angebrachtes Gewicht oder durch sonstige z. B. elastische Unterstützung können wir zur Bequemlichkeit z' in dieser Lage ein stabiles Gleichgewicht verschaffen. z' hat gegen den festen Rahmen a die verlangte Beweglichkeit.

Vor allem bemerken wir nun im R_{III} die zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{II}$ gehörigen Schraubenachsen des Büschels $G_I G_{II}$ durch den Mittelpunkt M des Kreuzkörpers k in der Ebene μ der Spindelachsen $G_I G_{II}$ desselben; ebenso die Achsen der aus s_{II} ($\mathfrak{p}_{II}$) und dem (zur Translation σ des

1) In der Figur 2 ist der Winkel α (vergl. S. 242) beliebig fest; die Fälle $\alpha = 90^0$ und $\alpha = 0^0$ sollen später unter 2′ bezw. 2″ erörtert werden.

Schiebers b senkrechten) Felde f der Ebene $\nu = G_{II} G_{III}$ abzuleitenden Schrauben des Parallelbüschels zu G_{II} in ν (Figur 2′, dort sind die G voll, die Γ gestrichelt).

In R_{III} gehören zu $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{II}$ die Strahlen der „linken Basisbüschel" $M(\mu)$ und $N(\nu)$, wenn mit N der unendlich ferne Punkt von G_{II} und mit μ die Ebene $G_I G_{II}$ bezeichnet wird. Hieraus folgt, daß im Reziprokalgebiet P_{III} zum Parameter $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}_{II}$ die Strahlen der „rechten Basisbüschel" $M(\nu)$ und $N(\mu)$ gehören, welche im Gegensatz zu den vorigen in der Figur 2′ durch gestrichelte Linien angedeutet sind. Das linke Büschelpaar geht ins rechte über bei einer Spiegelung an einer der beiden Symmetrieebenen von μ und ν; hierbei spiegelt sich $G_I(\mathfrak{p}_{II})$ nach $\Gamma_I(-\mathfrak{p}_{II})$ ab.

Hieraus ergibt sich die Konstruktion aller Achsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ im $\begin{cases} R_{III} \\ P_{III} \end{cases}$ als zum Felde $\begin{cases} \varphi \\ f \end{cases}$ der Ebene $\begin{cases} \mu \\ \nu \end{cases}$ parallele Gerade, welche die Strahlen des Büschels $\begin{cases} M(\nu) \\ M(\mu) \end{cases}$ senkrecht schneiden, und es folgt:

Die in unserem Falle ausgeartete Kongruenz $\begin{cases} K(G) \\ K(\Gamma) \end{cases}$ von Achsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ des Schraubenbündels besteht aus den zur Tangentialebene $\begin{cases} \mu \\ \nu \end{cases}$ parallelen *Tangenten des Kegels* 2. Ordnung $\mathfrak{K}_d$, welcher die Lote durch M zu μ und ν zu Fokalachsen hat.[1]) Mit anderen Worten:

Alle $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ *berühren den festen Kegel* $\mathfrak{K}_d$ und sind *senkrecht zu den Fokalachsen* desselben.

---

1) Fokalachsen sind Gerade, durch welche zwei (imag.) Tangentialebenen des Kegels gehen, welche auch den unendlich fernen (absoluten) Kugelkreis berühren. Oder: Gerade mit durchlegbaren durchwegs zu einander senkrechten Paaren konjugierter Ebenen. In den derzeit vorliegenden Darstellungen außer in E. Studys „Geometrie der Dynamen" scheint dieser Kegel $\mathfrak{K}_d$ (Reyes Kathegorie d der Spezialkegel 2. O. *mit zwei zu den Fokalachsen senkrechten Tangentialebenen* $\mu\,\nu$) als Brennfläche der ausgearteten Kongruenz $\begin{cases} K(G) \\ K(\Gamma) \end{cases}$ von Achsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ nicht Beachtung gefunden zu haben. Dies ist umso auffallender, als er offenbar als Rudiment der kegelförmigen Partie der Hydeschen Brennfläche (vgl. S. 248) in der Umgebung der reellen Knotenpunkte M und N anzusehen ist, wenn nämlich der Mittelpunkt p der gleichbündigen Hyperboloide auf G_{II} in die Ferne rückt, wobei G_I und G_{III} dies ebenfalls in den Symmetrieebenen von μ und ν tun. (Die auf $G_I G_{II}$ bei diesen Grenzübergang entfallenden Hauptparameter haben wir uns von $\mathfrak{p}_{II}$ nach verschiedenen Seiten um derartige stets wachsende Differenzen abweichend zu denken, daß der Quotient dieser Differenzen gleich $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ bleibt, wenn α den Winkel von μ und ν bedeutet.)

Ordnet man die Achsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ nach den ihnen im Schraubenbündel zukommenden Parametern, so ergibt sich:

Zu jedem Parameterwerte $\begin{Bmatrix} \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}' = -\mathfrak{p} \end{Bmatrix}$ gehört ein hyperbolisches Paraboloid $F(\mathfrak{p})$, dessen $\begin{Bmatrix} \text{linke} \\ \text{rechte} \end{Bmatrix}$ Regelschar von den Schraubenachsen $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ dieses Parameters $\mathfrak{p}$ erfüllt ist. Jedes dieser Paraboloide ist dem Kegel $\mathfrak{K}_d$ längs einer Hyperbel $\mathfrak{C}$[1]) umschrieben und besitzt Scheitelgerade $G_{\mathrm{I}}(\mathfrak{p})$ und $\Gamma_{\mathrm{I}}(\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p})$, welche aus den Berührungskanten G_{I} und Γ_{I} des $\mathfrak{K}_d$ mit μ und ν durch Parallelverschiebung um

$$e = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{II}}) \operatorname{cotg} \alpha$$

hervorgehen.

Eines dieser „gleichbündigen" Paraboloide gehört zum Werte $\mathfrak{p} = 0$, die Erzeugenden der $\begin{Bmatrix} \text{linken} \\ \text{rechten} \end{Bmatrix}$ Schar desselben sind $\begin{Bmatrix} \text{jene Achsen, um welche die Gabel } z' \text{ des Schraubenzwillings-Schiebers } (\alpha) \text{ einfach drehbar ist.} \\ \text{die Träger der einfachen Kräfte, welche nicht imstande sind, auf die Gabel } z' \text{ zu wirken.} \end{Bmatrix}$ Fällt der Nullwert des Parameters auf $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}}$, so treten an Stelle dieser $\begin{Bmatrix} \text{linken} \\ \text{rechten} \end{Bmatrix}$ Schar die beiden $\begin{Bmatrix} \text{linken} \\ \text{rechten} \end{Bmatrix}$ Basisbüschel; der diesen gemeinsame Stab auf G_{II} ist dann auch den Bündeln R_{III} und P_{III} gemein, weshalb sich die letzteren nicht mehr zum Schraubengebiet des Raumes ergänzen, sondern in einem Gewebe R_{V} liegen.

Außer dem Felde $\begin{cases} f \\ \varphi \end{cases}$ der Ebene $\begin{cases} \nu \\ \mu \end{cases}$ ist kein anderes mehr in $\begin{cases} R_{\mathrm{III}} \\ P_{\mathrm{III}} \end{cases}$ enthalten, d. h. keine andere als die zu f senkrechte Translation σ ist der Gabel z' gestattet, und jedes Drehmoment wirkt auf die Gabel z' außer dem einzigen Momente φ in der Ebene μ der Spindelachsen des Kreuzkörpers.

Ein einfaches hierher gehöriges Beispiel wurde S. 230 Anm. 2 erwähnt.

2'.

Stellen wir insbesondere den Schraubzwillings-Schieber (Figur 2) für $\alpha = 90^0$ ein, d. h. bringen wir G_{I} in die zu σ parallele Lage $\mathfrak{G}$,

---

1) Zwei solche „gleichbündige" Paraboloide $F(\mathfrak{p})$ durchdringen sich in einer Hyperbel $\mathfrak{C}$, deren Ebene zur Hauptachse G_{II} senkrecht steht und welche die Spuren von μ und ν zu Asymptoten hat. Diese treten an die Stelle der bezüglich μ und ν konzyklischen sphärischen Kurven 4. Ordnung $\mathfrak{C}$, in welchen sich beim vorigen Falle zwei gleichbündige Hyperboloide $F(\mathfrak{p})$ durchsetzten.

so wird das Feld $\begin{cases} f \\ \varphi \end{cases}$ der Ebene $\begin{cases} \nu \\ \mu \end{cases}$ senkrecht zu $\begin{cases} G_I \\ G_{III} = \Gamma_I \end{cases}$, es entfällt also auf diese Achse im Bündel $\begin{cases} R_{III} \\ P_{III} \end{cases}$ jeder beliebige Parameter.

Wir können mit dem so erhaltenen Instrumente, dem

normalen Schraubzwillings-Schieber ($\alpha = 90^0$),

jene Fälle der Beweglichkeit III herstellen, bei welchen *alle Achsen* $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ des $\begin{cases} R_{III} \\ P_{III} \end{cases}$ dieselbe kürzeste Transversale $\begin{cases} \Gamma_I \\ G_I \end{cases}$ haben. Der obige Kegel $\mathfrak{K}_d$ ist in dieses Paar Senkrechter $G_I \Gamma_I$ ausgeartet. Alle gleichbündigen Paraboloide $F(\mathfrak{p})$ werden für alle Werte $\mathfrak{p}$ gleichseitig mit G_I und Γ_I als gemeinsamen Scheitelgeraden und der Verteilungskonstante (vgl. S. 241 Anm. 2) $\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{II}$.

Der Nullfall von $\mathfrak{p}_{II}$ hat die gleichen Folgen wie oben bei 2; er gehört zum gewöhnlichen, an b befestigten Hookschen Schlüssel, dessen Gabelstangenachsen gemäß $\alpha = 90^0$ auf dieselbe Gerade G_{III} fallen.

Auf $\begin{cases} G_I \\ \Gamma_I \end{cases}$ entfällt im $\begin{cases} R_{III} \\ P_{III} \end{cases}$ jeder beliebige Parameter, sie ist die einzige Gerade von dieser Eigenschaft $\begin{pmatrix} G_I = G^* \\ \Gamma_I = \Gamma^* \end{pmatrix}$ im Bündel.

Die gleiche Beweglichkeit hat bei vollkommen festgestellter Gabel z auch die Gabel z' eines modifizierten Hookschen Schlüssels, dessen *eine* Spindel $s_I(s'_I)$ am Kreuzkörper k durch einen zylindrischen Stift ersetzt wurde, welcher in den hohlzylindrischen Gleitlagern von z' innerhalb eines gewissen Spielraumes drehbar *und* verschiebbar ist. Die Stiftachse spielt dieselbe Rolle wie soeben $G_I = G^*$ ($\mathfrak{p}$ beliebig) und die andere Spindelachse an k jene von $G_{II}(\mathfrak{p}_{II})$.

Ebenso ist es etwa mit einem Ring, den man bei fester Mittelhand am untersten Fingerglied drehen und verschieben kann ($G_I = G^*$), während der Finger selbst sich um die durch die Fingerwurzeln gehende Achse $G_{II}(\mathfrak{p}_{II} = 0)$ bewegt.

Zu $\mathfrak{p}_{II} = 0$ gehört hier auch die Beweglichkeit der *Klinke einer Tür*, welche in ihren Angeln noch um ein gewisses Stück gehoben werden kann. $G_I = G^*$ Angelachse, G_{II} parallel zur Klinkenachse durch den zur letzteren nächsten Punkt von G_I.

2″.

Stellen wir andererseits den Schraubzwillings-Schieber — bei wie oben ($\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$) gleichsteigenden Schraubspindeln des Kreuzkörpers — *gemäß* $\alpha = 0$ ein, also derart, daß (Figur 2) G_I in die Lage $G_{III} = G_I$ kommt, die Translationsrichtung σ zur Ebene $\mathfrak{E}$ der Spindelachsen am Kreuzkörper k *senkrecht* wird, so werden *alle Geraden* $\begin{cases} G \\ \Gamma \end{cases}$ der Ebene $\mathfrak{E}$ Achsen des Schraubenbündes $\begin{cases} R_{III} \\ P_{III} \end{cases}$, belegt mit dem gleichen Parameter $\begin{cases} \mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} \\ \mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}_I = -\mathfrak{p}_{II} \end{cases}$.

Andere Achsen oder Achsen anderen Parameters kommen nicht vor. Den für $\alpha = 0$ eingestellten Schraubzwillings-Schieber nennen wir deshalb einen mit Bezug auf $\mathfrak{E}$ als Hauptebene und $\mathfrak{p}_I$ als Parameter orientierten

Planschrauber.

Eine andere Form desselben stellt auch die längs der Stange t an z' verschiebbare Scheibe m_∞ am gleichsteigend gedachten Zwilling der Figur 1 vor.

Das Feld von $\mathfrak{E}$ wird den Reziprokalbündeln R_{III} und P_{III} gemeinsam, so daß beide in einem Gewebe enthalten sind, ja sogar im Nullfalle des Parameters geometrisch identisch werden. Letzterer Fall trifft zu bei den Handwurzelbewegungen der Faust im Eisenbahnwagen, wenn wir den Unterarm starr in der Richtung der Fahrt ausgestreckt halten.

Der Fall 2″ ist ebensogut als ein besonderer Fall von 1′ als von 2 (nicht aber von 2′) anzusehen; vgl. S. 251. Wollte man den allgemeinen Fall 1′ ($\mathfrak{p}_I \gtrless \mathfrak{p}_{II}$) auch hier unterbringen, so hätte dies keine Schwierigkeit; es dürften aber die Spindeln $s_I s_{II}$ am Kreuzkörper der Figur 2 nicht gleichsteigend angenommen werden, was wir jedoch bei 2 (2′, 2″) durchweg taten und woran wir festhalten wollen. Vgl. S. 251 Anm. 3.

3.

Kommen nur Achsen einer Richtung im Bündel R_{III} vor und liegen diese nicht in einer Ebene[1]), so erfüllen alle G ein *Parallelstrahlenbündel* und der Parameter jeder G kann durch lineare Interpolation aus den Parametern dreier nicht in einer Ebene gelegenen Strahlen des Bündels erhalten werden. Zur Verwirklichung benützen wir den schiefen (zu α gehörigen)

Schraub-Doppelschieber.

Diesen erhalten wir in der Figur 2, wenn wir einerseits mit Hilfe des Halbringes r und der Stellschraube h wie beim Schraubschieber (S. 241) den Kreuzkörper k *starr* mit der Gabel z verbinden[2]), andrerseits aber die Beweglichkeit dadurch erweitern, daß wir den Schubrahmen a des Gleitstückes b selbst wieder als Gleitstück in der Richtung τ im festen Rahmen a_1 der Figur 4 verwenden.

Ebenso wie G_I im Schraubenbündel R_{III} zu dem Parameter $\mathfrak{p}_I$ gehört, ist die mit der Gabelstange G_{III} zusammenfallende Achse Γ_I

1) Letzterer Fall soll unter 3″ betrachtet werden.

2) Hierbei kann wieder wie beim einfachen Schraubschieber mit Hilfe der Gradeinteilung am Halbringe r der Winkel α von G_I mit $\Gamma_I = G_{III}$ beliebig festgestellt werden; die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ kommen sogleich unter 3′ und 3″ zur Besprechung.

im Reziprokalbündel P_{III} mit dem entgegengesetzten Parameter $\mathfrak{p}_I' = -\mathfrak{p}_I$ zu belegen. Zum $\left\{\begin{matrix} R_{III} \\ P_{III} \end{matrix}\right.$ gehören alle zu $\left\{\begin{matrix} \Gamma_I \\ G_I \end{matrix}\right.$ parallelen Felder; beiden Bündeln R_{III} und P_{III} ist also stets das zu G_{II} senkrechte Feld $\mathfrak{f}$ der Ebene $\mathfrak{E} = G_I \Gamma_I$ gemein, R_{III} und P_{III} liegen in einem Gewebe R_V. Wegen dieses Feldes $\mathfrak{f}$ gehört zum Parameter $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p}_I \\ \mathfrak{p}_I' = -\mathfrak{p}_I \end{matrix}\right\}$ im Bündel $\left\{\begin{matrix} R_{III} \\ P_{III} \end{matrix}\right.$ nicht $\left\{\begin{matrix} G_I \\ \Gamma \end{matrix}\right.$ allein, sondern *alle* zu $\left\{\begin{matrix} G_I \\ \Gamma_I \end{matrix}\right.$ *parallelen* Geraden $\left\{\begin{matrix} G(\mathfrak{p}_I) \\ \Gamma(\mathfrak{p}_I') \end{matrix}\right\}$ der Ebene $\mathfrak{E}$. Alle übrigen Achsen Γ in P_{III} sind parallel zu Γ_I, wie die G des R_{III} zu G_I, gehören aber zu anderem Parameter:

Alle zum beliebigen konstanten Parameter $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}' = -\mathfrak{p} \end{matrix}\right\}$ gehörigen Achsen $\left\{\begin{matrix} G, \text{ um welche bei festem Rahmen } a_1 \text{ die Gabel } z' \text{ geschraubt werden kann,} \\ \Gamma, \text{ welche bezüglich der Gabel } z' \text{ unwirksame Dynamen vorstellen,} \end{matrix}\right\}$ sind parallel zu $\left\{\begin{matrix} G_I \\ \Gamma_I \end{matrix}\right.$ und *liegen in einer* zu $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathfrak{p}_I)$ *parallelen Ebene* $\mathfrak{E}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{p}')$, welche aus $\mathfrak{E}$ durch Parallelverschiebung in der Richtung G_{II} um das Stück

$$e = (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I) \operatorname{cotg} \alpha$$

hervorgeht.

Auf eine dieser Ebenen $\mathfrak{E}_0$ entfällt der Nullwert des Parameters $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' = 0$, ihr Parallelbüschel $\left\{\begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix}\right.$ enthält die bezüglich z' $\left\{\begin{matrix} \text{gestatteten Drehungsachsen.} \\ \text{unwirksamen einfachen Kräfte.} \end{matrix}\right\}$

3'.

Bei der Einstellung des Schraub-Doppelschiebers für $\alpha = 0$, in welchem Falle er

normaler Schraub-Doppelschieber

genannt werden kann, weil die erlaubten Schiebungen zur Schraubenachse normal stehen, fällt G_I mit Γ_I zusammen: *Alle* Achsen $\left\{\begin{matrix} G \\ \Gamma \end{matrix}\right.$ des Bündels sind zu dieser Richtung parallel überall im Raum verteilt und mit *demselben* zum Kreuzkörper k der Figur 2 gehörigen Parameter $\left\{\begin{matrix} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I \\ \mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}_I \end{matrix}\right\}$ zu belegen. Wir können auch die Mutter m aus der Figur 1 an den mit Gewinden versehenen Teil von t in der Figur 2 bringen, dann hat m[an $t(tb)$ in a in a_1] die verlangte Beweglichkeit. Die Reziprokalbüschel R_{III} und P_{III} haben das ganze Feldbüschel parallel zur Richtung der Achsen gemein und liegen im Gebüsche P_{IV}, welches R_{III} (oder P_{III}) mit dem zur Achsenrichtung senkrechten Felde verbindet.

Speziell für den Nullwert von $\mathfrak{p}_I$ beim normalen *Dreh-Doppel-*

schieber werden beide Bündel identisch mit dem Stabbündel der Achsenrichtung. Für diesen Fall könnten wir auch in der Figur 2 den Stellkörper c derart herabstellen (Stellschraube h_1), daß der aus Figur 1 an den glatten Teil der Stange t in der Figur 2 unter c gebracht zu denkende Drehkörper m_0 nicht mehr in der Stangenrichtung verschiebbar wird: m_0 [an (tb) in a in a_1].

Hierher gehört auch die Beweglichkeit eines schweren Körpers mit ebener Basisfläche, welche auf einer horizontalen Eisfläche ruht, von welcher der Körper nicht abgehoben werden soll; statt zu letzterem Zwecke die Schwerewirkung zu beanspruchen, würde man diesen Körper besser zwischen zwei planparallele Eisflächen legen.

3″.

Die Einstellung des Schraub-Doppelschiebers für $\alpha = 90^0$ ($G_{\rm I}$ nach $\mathfrak{G}$) würde die Gabel z' schraubbar mit beliebigem Parameter — also dreh- und schiebbar — machen um jede zu $G_{\rm I}$ parallele Achse G^* der Ebene $\mathfrak{E} = G_{\rm I} G_{\rm III}$, ganz gleichgültig, welches der Parameterwert $\mathfrak{p}_{\rm I}$ bei $s_{\rm I}(s'_{\rm I})$ an der Achse $G_{\rm I}$ sein mag. Deshalb könnte man sich (gemäß $\mathfrak{p}_{\rm I} = 0$) bei $s_{\rm I}(s'_{\rm I})$ auch eine gewöhnliche zylindrische Drehachse mit ihren Zapfen in z' eingelagert denken. Andere Achsen G als diese G^* gibt es nicht.

Die Achsen Γ der unwirksamen Dynamen gehören ebenfalls zu beliebigen Parametern ($\Gamma = \Gamma^*$) und liegen in $\mathfrak{E}$ zu den G senkrecht. Andere Achsen Γ von unwirksamen Dynamen als diese Γ^* gibt es ebenfalls nicht. Das Feld $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{E}$ ist $R_{\rm III}$ und $P_{\rm III}$ gemeinsam, weshalb beide in einem Gewebe $R_{\rm V}$ enthalten sind.

Hierher gehört z. B. Beweglichkeit eines Muffes m^* (Figur 3), dessen Stift t (etwa die Stange der Gabel z bei der Figur 2) in normaler Stellung mit dem Gleitstücke b verbunden wird, wenn b in seinem *fest* gedachten Rahmen a in der Richtung σ gleitet. Die Achsen G des $R_{\rm III}$ werden die Parallelen zur Achse G^* des Stiftes in der durch G^* senkrecht zu σ gelegten Ebene:

Das typische, diese Bewegung möglich machende Instrument könnte man hiernach als

Muffschieber

bezeichnen. m^*, aus Figur 3 an $t(tb)$ in Figur 2 gebracht, wobei k, r, z' weggedacht werden können, gibt wohl die einfachste Form desselben.

4.

Endlich können einem Körper alle Translationen, aber keine Drehungen gestattet sein. Dies ist durch den

Schieberdrilling

verwirklicht, welchen man erhält, indem man den zweiten Rahmen a_1 des Doppelschiebers $a b a_1$ (Figur 4) selbst noch in einer etwa zu den dortigen Richtungen $\sigma\tau$ senkrechten dritten Richtung ϱ beweglich macht; z. B. dadurch, daß man a_1 horizontal an einem gewöhnlichen Aufzug befestigt oder sich einen dritten Rahmen a_2 konstruiert, in dessen prismatischer Höhlung mit zu ϱ parallelen Flächen a_1 samt a und b gleiten kann. Auch der in der Figur 2 an t zu anderen Zwecken angebrachte und durch prismatische Nutflächen in der Richtung ϱ verschiebbare Körper c hat [in $(z b)$ in a in a_1] gegen a_1 diese Beweglichkeit. Reziprok sind nur alle Drehmomente, R_{III} ist hier ebenso wie P_{III} identisch mit dem Bündel aller Felder des Raumes.

Freiheitsgrad IV.

Hier können wir die vorkommenden Fälle am bequemsten nach jenen beim Freiheitsgrade II ordnen. Die Achsen G und Γ tauschen nun ihre Rollen, ebenso die Zeichen R und P der Reziprokalgebiete und die Zeichen $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}'$; d. h. es ist der bei IV im R_{IV} auftretende Komplex von Achsen G, die mit gewissen Parametern $\mathfrak{p}$ belegt sind, geometrisch identisch mit dem oben bei II als Ort der unwirksamen zu $\mathfrak{p}'$ gehörigen Dynamenachsen Γ im P_{IV}.

Zur Übersicht aller Achsenlagen könnten wir uns darauf beschränken, die Hauptelemente des reziproken Schraubenbündels P_{II} anzugeben, da wir dann unseren obigen Ausführungen gemäß nicht bloß mit der Lage aller Achsen Γ der unwirksamen Dynamen des P_{II} und deren Parametern, sondern auch mit der Lage aller Achsen G (der bei der Beweglichkeit erlaubten Schraubungen im Schraubengebüsche R_{IV} und deren Ganghöhen vertraut sind. Wir wollen indessen stets der Vollständigkeit wegen in Kürze auch auf die Lage aller gestatteten Schraubenachsen und deren Parameter hinweisen, damit bei jedem Mechanismus kein besonderes Nachsuchen nötig sei.

1.

Zur Verwirklichung des allgemeinsten Falles hierher gehöriger Beweglichkeit benützen wir den

Muff am Zwilling

(Figur 1 m^* an $(t z')$ an k an z), d. h. einen Körper m^*, welcher ähnlich wie vordem in der Figur 3, nun in der Figur 1 um die Achse G'_{III} (Verlängerung von G_{III}) der zylindrischen Schaftstange t der Gabel z' dreh- und schiebbar ist; hierbei setzen wir wieder die Gabel z als fest voraus.

Die Spindelachsen $G_I = \Gamma_I$ und $G_{II} = \Gamma_{II}$ am Zwilling sind die sogenannten „Nebenachsen" (vgl. S. 241) unseres für die Beweglichkeit charakteristischen Gebüsches R_{IV}, belegt mit den bezüglichen durch die Spindelwindungen gegebenen Parametern $\mathfrak{p}_I$ bezw. $\mathfrak{p}_{II}$.

Die Achsen Γ des reziproken Schraubenbündels P_{II} gehen aus denen des oben (bei II_1 S. 236) beschriebenen auch hier zu k gehörigen Zylindroides durch Spiegelung an der Hauptebene $G_I G_{II}$ hervor, wobei alle Parameter den entgegengesetzten Wert annehmen. Insbesondere erhalten wir durch Spiegelung der zum Parameter Null gehörigen beiden Zylindroidkanten $\Gamma_0 \Gamma_0'$ jenes einzige Geradenpaar, dessen Kräfte auf einen mit dem Muffe m starr verbundenen Körper gar keine Wirkung ausüben können.

Der „Muff m* am Zwilling" (Figur 1) ist schraubbar um jede Gerade G des quadratischen Komplexes der senkrechten Transversalen der Kanten Γ des durch Spiegelung erhaltenen Zylindroides.

Zu einem bestimmten Parameter $\mathfrak{p}$ gehören die Transversalen der beiden zu $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}$ gehörigen Kanten des Spiegelzylindroides.[1]) Speziell für $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} = 0$ erhalten wir:

Dem Muff am Zwilling sind die *Drehungen* um die Transversalen G_0 der beiden Geraden $\Gamma_0 \Gamma_0'$ gestattet, sonst keine.

Dieses Paar von Windschiefen $\Gamma_0 \Gamma_0'$ kann auch imaginär werden; für $\mathfrak{p}_I = 0$ (oder $\mathfrak{p}_{II} = 0$) ist es an der Hauptachse G_I (bezw. G_{II}) des Zylindroides zusammengerückt, und die erlaubten Drehungsachsen G_0 berühren in diesem Falle das Zylindroid[2]) längs dieser Hauptkante.

Hierher, und zwar speziell zu $\mathfrak{p}_I + \mathfrak{p}_{II} = 0$, $(\mathfrak{p}_I \gtrless 0)$, gehört das Beispiel eines gewöhnlichen hohlzylindrischen Ringes, der am passenden zylindrischen Türklinkengriff sich drehen und verschieben kann, während auch die Klinke selbst und die Tür um ihre betreffenden Achsen drehbar sind. Die Nebenachsen in R_{IV} sind hierbei aus den beiden Symmetralen der windschiefen Tür- und Klinken-Achse durch Parallelverschiebung in der eigenen Ebene [so weit, bis ihr Schnittpunkt auf die (verlängerte) Achse des zylindrischen Griffes gelangt] zu erhalten.

Ist der benützte Zwilling gleichsteigend:

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II},$$

so sind auf diesen Körper ausschließlich die zum Parameter $\mathfrak{p}_I' = -\mathfrak{p}_I$ gehörigen Schraubungen um die Achsen Γ des Büschels $\Gamma_I \Gamma_{II}$ un-

1) Diese Transversalen schneiden von selbst eine dritte Zylindroidkante senkrecht. Vgl. S. 236 u. 240.

2) D. h. auch dessen gleichseitiges Tangentialparaboloid mit der Verteilungskonstanten (vgl. S. 241 Anm. 2) $(\mathfrak{p}_{II} - \mathfrak{p}_I)$ und der betreffenden Hauptkante nebst G_{III} als Scheitelgerade.

wirksam; einfache Kräfte dieser Eigenschaft gibt es gar nicht, außer es sei gerade

$$\mathfrak{p}_{I} = \mathfrak{p}_{II} = 0,$$

d. h. der Schraubenzwilling ein gewöhnlicher Hookscher Schlüssel. Auf den an diesem wie oben angebrachten Muff m^* können natürlich die Kräfte des Büschels $\Gamma_I \Gamma_{II}$ — und diese allein — nicht wirken.

Im Falle $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$ wird der aus der Figur 3 um die Stange t der Gabel z' (in der Figur 1) geschoben zu denkende Muff m^* mit diesem Parameter schraubbar, — also im Falle $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = 0$ drehbar — um jede Achse G, welche entweder durch den Schnittpunkt p der Spindelachsen des Kreuzkörpers geht (Strahlenbündel p) oder in der Ebene $\mathfrak{E}$ dieser Spindelachsen liegt. Zu den anderen Parameterwerten $\mathfrak{p}$ gehören zirkuläre lineare Kongruenzen von gestatteten Achsen G (vgl. S. 241 Anm. 1). Diese Kongruenzen sind enthalten im quadratischen Komplexe der senkrechten Transversalen der Strahlen des Büschels $\Gamma_I \Gamma_{II}$. Durch jeden Raumpunkt geht ein Orthogonalkegel dieses Komplexes.

Für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = 0$ gehört hierher die Beweglichkeit der *Faust* bei festem Oberarm unter Benützung des Ellbogengelenkes, der Drehung (Pronation oder Supination) des Unterarmes um die ideale Eigenachse, sowie unter Inanspruchnahme der Achsen des Handwurzelgelenkes. Der Faust sind alle instantanen Drehungen um Achsen erlaubt, welche entweder durch das Zentrum p des Handwurzelgelenkes gehen oder in jener Ebene $\mathfrak{E}$ liegen, welche p mit der Achse des Ellbogengelenkes verbindet.

Während bei dieser allgemeinsten Beweglichkeit IV die Muffachse (G'_{III}) die einzige Gerade vorstellt, um welche Drehungen und Schraubungen des (mit m verbundenen) Körpers möglich sind, erfüllen die mit dieser Eigenschaft begabten Geraden G^* in den folgenden Fällen

2. (spez. z') ein Parallelbüschel,

2''. die Gesamtheit aller senkrechten Transversalen einer Geraden, ein sogenanntes „Normalnetz",

3. ein Parallelstrahlenbündel.

Bei 2 und speziell 2', 2'' werden *alle* Schraubenachsen G zu einem ebenen *Felde* φ *parallel*, bei 3 sogar (zu allen Feldern eines Büschels parallel also) alle *gleichgerichtet* sein; es wird im Gegensatze zum eben geschilderten Falle 1 auch Drehmomente geben, welche bezüglich des starren Körpers mit der Beweglichkeit IV unwirksam sein werden.

2.

Zur Verwirklichung der übrigen Fälle des Freiheitsgrades IV können wir den schiefen

Kreuz-Doppelschieber

benützen, den wir aus dem in der Figur 2 dargestellten, an b befestigten Schraubschieber erhalten, indem wir ihn nicht nur (wie bei III_3 S. 257)

durch Hineinschieben des Rahmens a in den anderen, festen Rahmen a_1 (der Figur 4) wie dort zum Schraub-Doppelschieber machen, sondern auch noch unter sonstiger Beibehaltung der gezeichneten Lage den Halbring r entfernen, so daß jetzt die *beiden* gleichsteigenden Schrauben des Kreuzkörpers wirkungsfähig werden. (Letzteres wie beim Schraubzwillings-Schieber III_2 S. 253).

Es sei bei der in der Figur 2 gezeichneten Lage der Winkel α des Apparates beliebig[1]) angenommen und es sei ferner zur Bequemlichkeit das Gleichgewicht der Gabel z' in dieser Stellung (α), wo wir die Beweglichkeit illustrieren wollen, stabil gemacht. Letzteres kann etwa durch ein am Stangenfortsatze u der Gabel z' in verschiedenen Stellungen fest anschraubbares Gegengewicht oder durch anderweitige, etwa elastische Unterstützung erreicht werden.

Zum Reziprokalgebüsch P_{II} der unwirksamen Dynamen gehört offenbar die mit dem Parameter $\mathfrak{p}_I' = -\mathfrak{p}_I$ belegte Achse $\Gamma_I = G_{III}$ und das Feld (Drehmoment) φ der Ebene $\mu = G_I G_{II}$ des Kreuzkörpers k, also auch *jede zu* Γ_I *parallele Achse* Γ *der Ebene* $\nu = \Gamma_I G_{II}$. Sei e der Normalabstand dieser Γ von Γ_I, so entfällt auf sie im P_{II} der gemäß

$$\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_I' = -e \operatorname{tg} \alpha$$

zu bestimmende *Parameter* $\mathfrak{p}'$. Auf *einen* Strahl Γ_0[2]) des Parallelbüschels der Γ der Ebene ν entfällt der Nullwert des Parameters; Γ_0 ist die einzige Gerade, auf welcher Kräfte angenommen werden dürfen, welche — ebenso wie unter den Drehmomenten das einzige der Ebene $\mu = G_I G_{II}$ — nicht auf z' wirksam sind.

Γ_0 wäre mit Γ_I zusammengefallen, wenn wir einen gewöhnlichen Hookschen Schlüssel (mit gewöhnlichem Achsenlager an den Gabeln, $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = 0$) in der in Figur 2 gezeichneten, demselben Winkel entsprechenden Lage bei starrer Verbindung seiner oberen Gabel mit b verwendet hätten. Dies wäre hier nicht einmal eine Beschränkung der Allgemeinheit, da man den so adjustierten Apparat nur um $e = \mathfrak{p}_I' \operatorname{cotg} \alpha$ in der Richtung G_{II} verschoben denken muß, um seine untere Gabel genau gleichbeweglich zu machen wie jene (z') des für allgemeines $\mathfrak{p}_I$ konstruierten Apparates. Anders ist es im folgenden Falle 2', wo ($\mathfrak{p}_I \gtrless 0$) keine Dyname anderen Parameters als $\mathfrak{p}_I'$ in P_{II} vorkommt; hier wird der Hooksche Schlüssel nicht verwendbar, außer wenn $\mathfrak{p}_I = 0$ ist, wo ein ganzes Parallelbüschel unwirksamer Kräfte auftritt.

Die Gabel z' des Kreuzdoppelschiebers ist *schraubbar* um *jede*[3]) zur Ebene $\mu = G_I G_{II}$ parallele Achse G und zwar mit einem Para-

1) Erst in den folgenden Fällen 2' des aufrechten Kreuz-Doppelschiebers und 2'' des (dort bequemer benützbaren) Doppelstiftes soll $\alpha = 0^\circ$ bezw. 90° genommen werden.

2) Γ_0 ist bestimmt durch $e = \mathfrak{p}_I' \operatorname{cotg} \alpha = -\mathfrak{p}_I \operatorname{cotg} \alpha$ gemäß $\mathfrak{p} = 0$.

3) Man beachte die sogleich folgende kleine Einschränkung!

meter, welcher entgegengesetzt gleich ist jenem der von G getroffenen Γ des Parallelbüschels zu Γ_{I} in ν, um die zu G_{II} parallelen Geraden G^* in ν mit beliebigem Parameter; um die nicht in ν gelegenen Parallelen zu G_{II} dagegen überhaupt nicht.

Letzteres schließt eine Einschränkung der obigen Behauptung ein; sie wäre es nicht, wenn wir sagen wollten: der Parameter wäre hier ∞, von solchen Geraden als eigentlichen Achsen zu sprechen, lehnen wir aber ab.

Die Achsen G der gestatteten Schraubungen eines *bestimmten* Parameters $\mathfrak{p}$ erfüllen hiernach in obigem ausgearteten linearen Komplexe die lineare Kongruenz der zu μ parallelen Transversalen jener Γ, welche zu $\mathfrak{p}' = -\mathfrak{p}$ gehört. Γ_0 z. B. gehört zu $\mathfrak{p}' = 0$:

Der Gabel $\mathfrak{z}'$ sind alle *Drehungen* um die zu μ parallelen Transversalen von Γ_0 gestattet, sonst keine.

2'.

Der aufrechte Kreuzdoppelschieber ($\alpha = 0$).

Wir stellen den Kreuzdoppelschieber für $\alpha = 0$ ein. Unwirksam bezüglich $\mathfrak{z}'$ sind jetzt bei festem Rahmen a_1 (Fig. 2 und 4) nur alle Dynamen von dem einzigen Parameter $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}' = -\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$[1]), deren Achsen parallel zu $\Gamma_{\mathrm{I}} = G_{\mathrm{I}} = G_{\mathrm{III}}$ in der Ebene $\Gamma_{\mathrm{I}} G_{\mathrm{II}} = \mu = \nu = \mathfrak{E}$ liegen, und das Drehmoment (Feld) $f = \varphi$ dieser Ebene. Unwirksame einfache Kräfte gibt es nicht.

Nur falls gerade $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = 0$, sind alle obigen unwirksamen Dynamen selbst zu einfachen Kräften des Parallelbüschels der Γ geworden. P_{II} ist dann in R_{IV} enthalten, während sich beim schiefen Kreuzschieber R_{II} und P_{II} ergänzten. Da in diesem Falle der Kreuzkörper eines gewöhnlichen Hookschen Schlüssels verwendet wird, könnten wir den Kreuzschieber für $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = 0$ auch aufrechten (Hookschen) Schlüsselschieber nennen.

Das für die Beweglichkeit charakteristische Schraubengebüsch R_{IV} besagt, daß folgende Bewegungen zulässig sind: die Gabel $\mathfrak{z}'$ und jeder mit ihr starr verbundene Körper wird bei festem Rahmen a_1 parallel verschiebbar in allen zu Γ_{I} senkrechten Richtungen und *schraubbar* um *jede zur Ebene $\mathfrak{E}$ parallele Gerade G* — mit der einzigen Einschränkung bezüglich der zu G_{II} parallelen Geraden, welche nicht als Achsen zählen können (weil ihr Parameter ∞), wenn sie nicht in $\mathfrak{E}$ liegen; dafür aber, wenn sie in $\mathfrak{E}$ liegen (sie bilden das Büschel der G^*) eines jeden beliebigen Parameters fähig sind.

---

1) Es ist im Auge zu behalten, daß $\mathfrak{p}_{\mathrm{II}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$, die Spindeln am Kreuzkörper k der Figur 2 gleichsteigend sind!

Die Achsen G ordnen sich nach dem ihnen zukommenden Parameter $\mathfrak{p}$ in lineare parabolische Kongruenzen, deren Leitlinien längs der durch das Feld f dargestellten unendlich fernen Geraden von $\mathfrak{E}$ zusammengerückt sind. Die Strahlen einer solchen zu einem bestimmten $\mathfrak{p}$ gehörigen Kongruenz sind durch Parallelverschiebung in einer zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Richtung aus der zu $\mathfrak{E}$ parallelen Schar jenes gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides erhältlich, welches G_{II} nebst der etwa durch M zu $\mathfrak{E}$ gelegten Senkrechten $\mathfrak{G}$ zu Scheitelgeraden hat und die Verteilungskonstante[1]) $(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}_I)$ besitzt.

Die hierbei zu $\mathfrak{p} = 0$ gehörige Kongruenz enthält die Achsen aller der Gabel z' erlaubten Drehungen.

Speziell zum Parameter $\mathfrak{p}_I$ gehören als Strahlen einer ganz besonders ausgearteten Kongruenz *alle* zu Γ_I $(\doteq G_I = G_{III})$ parallelen Achsen des Raumes und *alle* in der Ebene $\mathfrak{E}$ gelegenen Geraden; bezüglich der zu G_{II} parallelen G^* unter den letzteren wurde schon bemerkt, daß sie eines jeden beliebigen Parameters fähig sind.

Wegen des gemeinsamen Feldes f liegen R_{IV} und P_{II} in einem Gewebe R_V, ja im Nullfalle von $\mathfrak{p}_I$ — wo der gleichsteigende Zwilling des Instrumentes im gewöhnlichen Hookschen Schlüssel ist und als erlaubte Drehachsen alle zu Γ_I parallelen Strahlen im Raume, sowie alle Geraden von $\mathfrak{E}$ auftreten — ist P_{II} in R_{IV} enthalten.

Dieselbe Beweglichkeit wie der beschriebene aufrechte Kreuzschieber hätte auch in der Figur 1 der prismatische Körper m_∞ gegen z, falls die Spindel s_{II} (s'_{II}) an G_{II} durch einen in Zylinderlagern der Gabel z dreh- *und* gleitbaren Stift t ersetzt würde.

Auch würde m_∞ in der Figur 1 so beweglich, falls z ohne Eintauschung der Spindel gegen den Stift nicht festgemacht, sondern mit der Schaftstange der Gabel z in der Richtung ϱ an den Rahmen a der Figur 4 starr angebracht würde, wenn a im festen Rahmen a_1 gleiten kann.

Würde man dagegen die Spindel s_{II} (s'_{II}) der Figur 1 bei fest belassener Gabel z durch eine prismatische, in den Ausnehmungen von z bloß in der Eigenrichtung verschiebbare Stange ersetzen $(\mathfrak{p}_{II} = \infty)$, so hätte der aus der Figur 3 um die Stange t der Gabel z' geschoben gedachte Muff m^* gegen die feste Gabel z genau dieselbe hierher gehörige Beweglichkeit. $(G_I G_{III}' = \mathfrak{E}$, der Parameter $\mathfrak{p}_I$ gehört zu allen Geraden G dieser Ebene und zu den Parallelen zu G_I im Raume; die Parallelen zu $G'_{III} = G_{III}$ in $\mathfrak{E}$ spielen die Rolle obiger G^*, um welche mit beliebigem Parameter geschraubt werden kann).

1) Vergl. S. 241 Anm. 2!

2″.

Der Doppelstift.

Er wird aus dem Zwilling der Figur 1 erhalten, indem *beide* Spindeln am Kreuzkörper gegen zylindrische in den Gabelarmlagern dreh- und innerhalb eines gewissen Spielraumes verschiebbare Stifte ausgewechselt werden. Bei fester Gabel z erfreut sich z' der Freiheit, welche nur dadurch beschränkt ist, daß die erlaubten Schraubungen (im R_{IV}) reziprok sein sollen gegen die Schraubungen um $G_{III} = \Gamma_I$.

Auf Γ_I gelegene Kräfte sind also ebenso unwirksam auf z' wie das hierzu senkrechte Drehmoment.

Schraubbar ist z' mit *beliebigem* Parameter nur um jede senkrechte Transversale G^* von Γ_I, sonst um keine. Von Translationen sind nur die zu G_{III} senkrechten gestattet.

Die gleiche Beweglichkeit hat in der Figur 2 (und 4) die Gabel z' gegen a_1, falls der Kreuzdoppelschieber für $\alpha = 90^0$ eingestellt wird.

Andere Beispiele: Machen wir bei fester Gabel z die Stange t an der anderen Gabel z' bei einem gewöhnlichen Hookschen Schlüssel gleichzeitig zur Anfangsstange eines ebensolchen Hookschen Schlüssels unter Parallelstellung beider Kreuzkörperebenen, so hat die neue Gabel z'' am letzteren genau die gleiche Beweglichkeit gegen z, wie z' gegen z beim obigen Doppelstifte. Wir wollen diese Verbindung zweier Hookscher Schlüssel besonders in der Anfangslage, wo die Schaftstangen der Gabeln z z' z'' die Gerade $G_{III} = \Gamma_I$ zur gemeinsamen Zylinderachse haben, ein

Hooksches Schlüsselpaar

nennen. Ebenso beweglich wäre bei festem Schulterblatt die Faust an der ausgestreckten Hand bei Inanspruchnahme der Drehbarkeit um die Achsen des Handwurzelgelenkes und des Kugelgelenkes beim Schulterblatte, falls man beim letzteren 1. jede Drehung des Oberarmes um die Achse von der Richtung der ausgestreckten Hand ebenso ausschließen könnte, als 2. die Drehung des Unterarmes (Pronation oder Supination) um dieselbe Achse. Die Drehbarkeit im Ellbogengelenk *könnte* ebenfalls als überzählig ausgeschlossen werden, aber dies *müßte nicht* geschehen, da die instantanen Drehungen um dieselbe im System ohnehin durch Verbindung anders gestalteter Drehungen ersetzt werden können.

3.

Der Muffdoppelschieber.

Wir erhalten ihn, indem wir den Stift t der Figur 3 bei Belassung der Richtung ϱ seiner Achse G^* starr mit dem in a befindlich zu

denkenden Gleitstücke b verbinden (Fig. 2), wobei a noch im festen Rahmen a_1 der Figur 4 verschiebbar ist. Der um t angebrachte Muff m^* erfreut sich dann der Beweglichkeit beliebigen Parameters um alle zur Achse des Stiftes t parallelen Achsen G^* des Raumes. *Unwirksam sind nur die Drehmomente* der zu G_{I} parallelen Ebenen, während die übrigen Momente ebenso wie alle übrigen Dynamen und Kräfte Wirkung haben.

Auch die zu anderem Zwecke in der Figur 2 bei c angebrachte Stellschraube h_1 hat gegen a_1 (Fig. 4) die Beweglichkeit eines Muffdoppelschiebers, wenn a in a_1 geschoben ist. (h_1 in c an (tb) in a in a_1.)

Freiheitsgrad V.

Um diese durch ein Schraubengewebe R_{V} gekennzeichnete Beweglichkeit zu verwirklichen, beachten wir, daß R_{V} reziprok sein muß zu einer festen Schraubung P_{I}.

1.

Wir benutzen die

Schraubenmutter m am Doppelstift

der Figur 1 bei fester Gabel s (vergl. den Fall 2″ bei IV, S. 266; wo beide Spindeln am Zwilling der Figur 1, s_{I} (s_{I}') und s_{II} (s_{II}') durch Stifte ersetzt zu denken sind). Wirklich ist bezüglich der — an t mit dem Parameter $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ ansteigenden — Mutter m in der dargestellten Lage nur die Dyname P_{I} um die Achse $G_{\mathrm{III}}' = G_{\mathrm{III}} = \Gamma_{\mathrm{I}}$ mit dem Parameter $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}' = -\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}$ reziprok, d. h. auf m wirkt eine an Γ_{I} angebrachte Kraft nur dann nicht, wenn sie *untrennbar verbunden* ist mit einem $\mathfrak{p}_{\mathrm{I}}'$ mal größeren Drehmomente um diese Achse Γ_{I}.

Statt des Doppelstiftes könnte man um dieselben Instantanschraubungen zu erzielen, auch ein Hooksches Schlüsselpaar (vergl. S. 266) verwenden, wenn die erste Gabel s fest und m um die Endstange s'' der zweiten Gabel schraubbar ist.[1])

m ist schraubbar um *jede*[2]) *Gerade* G des Raumes und zwar mit dem aus der Reziprokalrelation

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{p}_{\mathrm{I}}' = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} = e \operatorname{tg} \vartheta$$

(e die kürzeste Entfernung von G und Γ_{I}, ϑ der Winkel dieser Ge-

---

1) Die so durchgeführte Herstellung der Beweglichkeit V ist — als das einzige Beispiel einer Verwirklichung von Beweglichkeit bei einem höheren Freiheitsgrade — schon angegeben worden in der bekannten Physik von Thomson und Tait.

2) Man beachte die sogleich folgende kleine Einschränkung!

raden) berechneten Parameter $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathrm{I}} + e \operatorname{tg} \vartheta$. Die Orte der Achsen G gleichen Parameters $\mathfrak{p} = \text{const.}$ sind hiernach lineare Komplexe mit Γ_{I} als Zentralachse. Insbesondere um die senkrechten *Transversalen* von Γ_{I} ist s' schraubbar mit *jedem* Parameter; die übrigen windschiefen Senkrechten zu Γ_{I} lassen wir nicht als Achsen gelten, weil sie zum Parameter ∞ gehören würden; von den instantanen Translationen sind nur die zu Γ_{I} senkrechten erlaubt.

1′.

Rad m_0 am Doppelstifte.

Wird $\mathfrak{p}'_{\mathrm{I}} = \mathfrak{p} = 0$, so verwenden wir ebenso beim Doppelstift der Figur 1 (ersetzbar durch ein Hookssches Schlüsselpaar) statt m den radartig um t beweglichen Drehkörper m_0.

Die reziproke Dyname P_{I} ist zur einfachen Kraft auf Γ ausgeartet, diese allein wirkt nicht auf m_0.

Beweglich ist m_0 um *jede* Gerade des Raumes mit dem Parameter $\mathfrak{p} = e \operatorname{tg} \vartheta$, hierbei wieder um die senkrechte Transversale G^* von Γ_{I} mit beliebigem Parameter, um die windschiefen Senkrechten zu Γ_{I} dagegen nicht mit endlichem Parameter. Erlaubt sind dieselben zu Γ_{I} senkrechten, instantanen Translationen wie oben.

Ein schönes hierher gehöriges Beispiel bietet am menschlichen Körper die Faust m_0 an der ausgestreckten Hand, wenn das Schulterblatt festgehalten wird. Das Ellbogengelenk und die Unterarmdrehung um die ideale Eigenachse (Pronation oder Supination) ist hierbei gar nicht notwendig, da ihre Wirkungen schon ohnedies durch die Gelenkigkeit des Handwurzel- und des Kugelgelenkes am Schulterblatt erreicht werden. Die Achsen des Handwurzelgelenkes und die zu ihnen parallelen durch den Mittelpunkt p des Kugelgelenks am Schulterblatte wirken wie die Gelenke am gewöhnlichen Hookschen Schlüsselpaar, die Drehbarkeit im Schultergelenke um die Achse der ausgestreckten Hand tritt an Stelle der Drehbarkeit der Radscheibe m_0 beim (Doppelstifte in Figur 1 oder beim vertretenden) Schlüsselpaare.

Die als hier nicht notwendig bezeichneten Gelenke wirken nur akzessorisch, d. h. sie *können* mit herangezogen werden, um eine bestimmte Nachbarlage der Faust zu erreichen; geschieht dies aber, so ist durch die Nachbarlage der Faust nicht wie sonst die Anteilnahme aller wirkenden Gelenke genau bestimmt, sondern diese Anteile kann man in der mannigfaltigsten Weise zusammenstellen, um dieselbe Nachbarlage zu erreichen.[1])

---

1) Das Schulterblatt mußten wir feststellen. Wäre es in der Armrichtung parallel verschiebbar, was (am besten bei der etwas seitlichen, sog. „Fechter-

Hierher gehört auch das Beispiel eines gewöhnlichen hohlzylindrischen Ringes, der am passenden zylindrischen Türklinkengriff sich drehen und verschieben kann, während die Klinke selbst und die Tür um ihre betreffenden Achsen drehbar sind, *wenn* hierbei die Tür *auch noch* an ihren Angeln innerhalb eines gewissen Spielraumes gehoben werden kann. Die Rolle von Γ_I spielt hierbei die kürzeste Transversale der Angelachse und der Achse des zylindrischen Griffes.

2.

Prisma (m_∞) am Doppelstifte.

Ist dagegen $\mathfrak{p}_I' = \mathfrak{p}_I = \infty$, so benutzen wir beim Doppelstifte oder dem vertretenden gewöhnlichen Hookschen Schlüsselpaare an der Stange der letzten beweglichen Gabel den prismatischen Körper m_∞ zur Verwirklichung der Bewegung.

Die einzige unwirksame Dyname ist jetzt zum *Drehmomente* um die gemeinsame Achse Γ_I der Gabelstangen ausgeartet, eigentliche Achsen unwirksamer Dynamen gibt es nicht mehr.

Beweglich ist m_∞ und zwar mit beliebigem Parameter um alle zu Γ_I senkrechten (im allgemeinen auch windschiefen) Geraden G^* des Raumes, dagegen nicht um Achsen anderer Richtungen. Gestattet sind ferner *alle* Translationen.

Ein am Doppelstifte (Fig. 1) statt der betrachteten m, m_0, m_∞ um t beweglicher Muff m^* (Fig. 3) würde z. B. schon einen zum

Freiheitsgrad VI

gehörigen, also vollkommen beweglichen

Muff am Doppelstifte

darstellen. Er wäre, genau als ob der übrige Apparat nicht vorhanden wäre, um jede Achse des Raumes mit jedem Parameter schraubbar und in jeder beliebigen Richtung parallel verschiebbar.

Jede Dyname (Kraft, Drehmoment) würde dagegen auf ihn von Einfluß sein.

Wir stellen nun noch die sämtlichen typischen Vorrichtungen zur Verwirklichung aller möglichen Beweglichkeit jedes beliebigen Freiheitsgrades zusammen. Links und rechts in der gleichen Zeile haben hierbei — links das für die Beweglichkeit charakteristische und rechts das am Körper unwirksame — Schraubengebiet *geometrisch die gleiche Gestalt.*

---

stellung" des Rumpfes und des übrigen Körpers) durch die Muskulatur des Schulterblattes geschieht, so würde schon dadurch allein und ohne weitere Rumpfbewegung die Faust vollkommen, d. h. in allen Schraubungen des Raumes beweglich werden, es wäre ihr keine einzige Nachbarlage mehr unzugänglich.

Freiheitsgrad

0.	VI.
Vollkommen befestigter Körper.	*Vollkommen beweglicher Körper.*

Freiheitsgrad

I. (Seite 230.)	V. (Seite 267.)
1. **Schraubenmutter,** an der Spindel geführt, $\mathfrak{p}$ der Parameter. (Fig. 1 *m* an festgedachter Stange.)	1. **Schraubenmutter am Doppelstifte** (*m* in Fig. 1 mit dem Parameter $\mathfrak{p}_I$ steigend an *z'* an *k* an *z*, wenn die Spindeln bei *k* durch gleitende Stifte ersetzt sind).
Speziell 1'. *Rad*, an der Nebenachse drehbar ($\mathfrak{p} = 0$) und (Fig. 1 m_0 an festgedachter Stange *t*).	Speziell 1'. *Rad am Doppelstifte* ($\mathfrak{p}_I = 0$) (m_0 in Fig. 1 an *z'* an *k* an *z*, wenn statt der Spindeln an *k* Stifte da sind).
2. **Schieber,** im Gleitstück, im Schubrahmen (Seite 231) Fig. 2 und 4. *b* in *a* oder *a* in a_1) oder mittels anderer Prismenführung verschiebbar ($\mathfrak{p} = \infty$; in der Fig. 1: m_∞ an festgedachter Stange *t*).	2. **Prisma am Doppelstifte** ($\mathfrak{p}_I = \infty$) (Seite 269) (m_∞ in Fig. 1 an *z'* an *k* an *z*, wenn statt der Spindeln an *k* Stifte da sind).

Freiheitsgrad

II.	IV.
1. **Schraubenzwilling** (Seite 233). (Fig. 1. *z'* an *k* an *z*, $\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II}$ als Hauptparameter).	1. **Muff am Zwilling** (Seite 260) (*m** aus der Fig. 3 an die verlängerte Stange *t* in Fig. 1 geschoben).
2. **Schiefer Schraubschieber** (Schiefe Schubschraube; S. 241). (Fig. 2. *z'* an (kzb)[1]) in *a*, Einstellwinkel $\alpha \gtrless 0 \left\{ \begin{matrix} \alpha = 0^\circ \text{ führt zu } 2' \\ \alpha = 90^\circ \text{ „ „ } 2'' \end{matrix} \right\}$)	2. **Schiefer Kreuzdoppelschieber** (Seite 262) (Fig. 2. *r* entfernt; *z'* an *k* an (zb) in *a* in a_1 Einstellwinkel $\left\{ \begin{matrix} \alpha = 0^\circ \text{ führt zu } 2' \\ \alpha = 90^\circ \text{ „ „ } 2'' \end{matrix} \right\}$).

1) Derart in Klammer gesetzte Zeichen sollen andeuten, daß die betreffenden Bestandteile starr verbunden worden sind, z. B. ist hier *k* mit *z* mittels *r* und *h*, und *z* und *b* aus einem Stück.

Speziell:
2'. *Aufrechte Schubschraube* ($\alpha=0$, S. 244). (Auch m, aus der Fig. 1 an den mit Windungen versehenen Teil der Stange t in der Figur 2 gebracht, hat gegen a diese Beweglichkeit. m an (tb) in a.) Parameter 0: Aufrechtes Schubrad.
2''. *Muff am Stift* (S. 245). Aus 2 für $\alpha = 90^0$. (Fig. 3. m^* an t dreh- und schiebbar.)

3. **Doppelschieber** (Seite 246). (Fig. 2 und 4. b in a in a_1.)

Speziell:
2'. *Aufrechter Kreuzdoppelschieber* ($\alpha = 0$, S. 264). Wenn der Parameter am Kreuzkörper 0: Aufrechter (Hookscher) Schlüsselschieber.
2''. *Doppelstift* (S. 266). Aus 2 für $\alpha = 90^0$. (Fig. 1. z' an k an z, wenn statt der Spindeln an k' Stifte sind, welche in den Gabellagern auch gleiten können.)

3. **Muffdoppelschieber** (Seite 266). (Muff m^* aus Fig. 3 an den glattzylindrischen Teil der Stange t (tb) in Fig. 2 unter c gebracht, wobei kz' usw. entfernt gedacht werden können: m^* an (tb) in a in a_1.)

Freiheitsgrad III.

1. **Schraubendrilling** (Seite 246). (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II} \mathfrak{p}_{III}$). (Fig. 1. m an z' an k an z.)

Speziell:

2†. *Flacher Drilling*[1] (Seite 251). (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$, $\mathfrak{p}_{II}$; $\mathfrak{p}_{III} = \infty$.) (Fig. 1 m_∞ an z' an k an z.)

2. **Schiefer Schraubzwillingsschieber** (Seite 253). (Fig. 2. r entfernt. z' an k an (zb) in a. Einstellwinkel α $\begin{cases}\alpha = 90^0 \text{ führt zu } 2' \\ \alpha = 0^0 \quad " \quad " \; 2''\end{cases}$).

1) Vergl. S. 251, Anm. 3. Er ist ein dadurch verallgemeinerter Planschrauber (S. 256, 2''), daß die Parameter $\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II}$ an $G_I G_{II}$ im Falle 2'' (Fig. 2, $\alpha = 0$) ungleich zugelassen werden.

Speziell:

2'. *Normaler Schraubzwillingsschieber* ($\alpha = 90^0$, Seite 255).

2''. *Planschrauber* ($\alpha = 0^0$, Seite 256).
(Auch als flacher Drilling (1') für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$ anzusehen. Fig. 1: m_∞ an z' an k an z, falls $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II}$.)

3. **Schiefer Schraubdoppelschieber** (Seite 257). (Fig. 2. Einstellwinkel α durch r und h fixiert. $\left\{\begin{matrix}\alpha = 0 \text{ führt zu } 3' \\ \alpha = 90^0 \;\;\text{„}\;\;\;\text{„}\;\; 3''\end{matrix}\right\}$. z' an (k, z, b) in a in a_1).

3'. *Normaler Schraubdoppelschieber* (Seite 258). ($\alpha = 0$, alle Parameter $\mathfrak{p}$ gleich. Auch m, aus der Figur 1 an den mit Gewinden versehenen Teil der Stange t in Figur 2 gebracht, ist gegen a_1 (Fig. 4) derart beweglich: m an (tb) in a in a_1.)

Normaler Drehdoppelschieber (Seite 258). ($\alpha = 0$, alle Parameter $\mathfrak{p}$ = *Null.* m_0 (aus Fig. 1) drehbar um t (Fig. 2, c an m_0 herabgestellt), falls tb in a_1 geschoben (Fig. 4), ist gegen a_1 derart beweglich: m an (tb) in a in a_1.)

3''. *Muffschieber* (Seite 259). (Für $\alpha = 90^0$ aus dem Schraubdoppelschieber 3; bezw. auch m^*, aus der Figur 3 an $t\,(tb)$ in Figur 2 gebracht; dort c emporgestellt, um Spielraum zu schaffen: m^* an (tb) in a in a_1).

4. **Schieberdrilling** (Seite 259). (Fig. 2. c bei unbenutzter Stellschraube h_1 in (tb) in a in a_1.)

Im Wesen haben wir also bei den Freiheitsgraden I und V nur *zwei* Typen (1, 2), bei II und IV *drei* (1, 2, 3), beim Freiheitsgrade III dagegen *vier* Typen (1, 2, 3, 4) von Mechanismen *nötig* gehabt, aufgestellt nach der Zahl der beim beweglichen Körper auftretenden unabhängigen Translationen.

Es hätte keine Schwierigkeit, diese zur Herstellung aller typischen instantanen Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers dienenden Mechanismen in einem Apparate zu vereinigen, indem einfach die Spindeln am Kreuzkörper k (Fig. 1 u. 2) nebst den ausgebohrten Teilen der betreffenden Gabelzinken auswechselbar gestaltet und die Körper m aus der Figur 1 auch an die Schaftstange der Gabel z' in Fig. 2 anbringlich gemacht würden.

Wir haben nur der besseren Übersicht wegen die Illustration der Haupttypen mit Hilfe der *zwei* Grundformen des Apparates (Figuren 1 und 2) vorgezogen.

Andere Möglichkeiten von Elementarbewegungen, die einem starren Körper in einem bestimmten Augenblick gestattet wären, außer den durch unsere typischen Mechanismen herstellbaren, gibt es nicht. Die

notwendigen[1]) *Typen* stellen wir nun noch in einer Tabelle zusammen, wobei wir die — [oben durch Striche (2′, 2″, 3′...) rechts oben bei der Typuszahl $\mathfrak{n}$ (1, 2, 3 ...) angedeuteten] — Spezialtypen fortlassen, da dieselben nichts anderes leisten, als die dann noch übrigbleibenden Typen auch, wenn wir sie nämlich besonders — für *Spezialwerte* z. B. 0^0, 90^0 von α — einstellen oder die Hauptparameterwerte $\mathfrak{p}_i$ (i = I, II, III) bei Belastung der Endlichkeit derselben speziell *abändern*. Hierbei wollen wir bei jeder Typuszahl $\mathfrak{n}$ (in arabischer Ziffer) des Freiheitsgrades $\mathfrak{f}$ (in römischer Ziffer) beifügen:

Die Zahl $\mathfrak{t}$ der bei der betreffenden Beweglichkeit gestatteten voneinander unabhängigen Translationen,

die Zahl $\mathfrak{d}$ der bei der betreffenden Beweglichkeit unwirksamen voneinander unabhängigen Drehmomente,

die Zahl $\mathfrak{r}$ der bei der betreffenden Beweglichkeit voneinander unabhängigen Achsenrichtungen von Bewegungsschrauben,

die Zahl $\mathfrak{l}$ der bei der betreffenden Beweglichkeit voneinander unabhängigen Achsenrichtungen unwirksamer eigentlicher Dynamen.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}^*$ eine Hilfszahl (positiv, ganz), welche $= \mathfrak{f} - 3$, *oder* aber, wenn sie nämlich negativ würde, statt dessen 0 ist, und mit $\mathfrak{v}^*$ eine Hilfszahl (positiv, ganz), welche $= 3 - \mathfrak{f}$, *oder* aber, wenn sie nämlich negativ würde, statt dessen 0 ist, so haben wir folgende Beziehungen in der Tabelle:

$$\left|\begin{array}{ll} \mathfrak{t} = -1 & + \mathfrak{n} + \mathfrak{f}^* \\ \mathfrak{d} = -1 & + \mathfrak{n} + \mathfrak{v}^* \\ \mathfrak{r} = & 1 + \mathfrak{f} - \mathfrak{n} - \mathfrak{f}^* \\ \mathfrak{l} = & 7 - \mathfrak{f} - \mathfrak{n} - \mathfrak{v}^* \end{array}\right| \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{t} + \mathfrak{r} = \mathfrak{f} \\ \mathfrak{d} + \mathfrak{l} = 6 - \mathfrak{f} \end{array}\right\}$$

Die Einführung der von uns hier gewählten Typusnummern $\mathfrak{n}$ (in arabischen Ziffern) erscheint durch deren angegebene Beziehungen zu den bemerkenswerten Zahlen $\mathfrak{t}$ ($\mathfrak{d}$; $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{l}$) gerechtfertigt.

Damit ist auch die Abweichung einerseits von der eigenen Numerierung der Fälle in der (1902 in dieser Zeitschrift, 48. Bd. 1. Heft erschienenen) Abhandlung über „Lineare Schraubengebiete" wie auch zum Teile von der Einteilung E. Studys in seiner bewundernswerten (1903 in Leipzig erschienenen) „Geometrie der Dynamen" begründet.

---

1) Die speziellen in den allgemeinen enthaltenen Typen haben wir oben ausführlich besprochen; *gerade sie* finden in der Technik die meiste Anwendung oder werden sie vielleicht am ehesten finden — wie in der Regel gerade das Studium und die Anwendung besonderer Fälle der allgemeinen Betrachtung vorangeht.

Freiheitsgrad $\mathfrak{f}$	Typus $\mathfrak{n}$	Hilfszahl $\mathfrak{f}^*$	Hilfszahl $\mathfrak{b}^*$	Name des typischen Apparates	Seitennummer in der Abhandlung	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{l}$
0	1	0	3	Vollkommen *fester* Körper		0	3	0	3
I	1	0	2	**Schraubenmutter** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$)	230	0	2	1	3
	2			**Schieber**	231	1	3	0	2
II	1	0	1	**Schraubenzwilling** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$, $\mathfrak{p}_{II}$)	233	0	1	2	3
	2			**Schraubschieber** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$. Einstellwinkel α)	241	1	2	1	2
	3			**Doppelschieber**	246	2	3	0	1
III	1	0	0	**Schraubendrilling** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$, $\mathfrak{p}_{II}$, $\mathfrak{p}_{III}$)	246	0	0	3	3
	2			**Flacher Drilling** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I \mathfrak{p}_{II}$) **Schraubzwillingsschieber** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$. Einstellwinkel α)	251 253	1	1	2	2
	3			**Schraubdoppelschieber** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$. Einstellwinkel α)	257	2	2	1	1
	4			**Schieberdrilling**	259	3	3	0	0
IV	1	1	0	**Muff am Zwilling** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$, $\mathfrak{p}_{II}$)	260	1	0	3	2
	2			**Kreuzdoppelschieber** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$. Einstellwinkel α)	262	2	1	2	1
	3			**Muffdoppelschieber**	266	3	2	1	0
V	1	2	0	**Mutter am Doppelstifte** (Hauptparameter $\mathfrak{p}_I$)	267	2	0	3	1
	2			**Prisma am Doppelstifte**	269	3	1	2	0
VI	1	3	0	Vollkommen *freier* Körper	269	3	0	3	0

Da jetzt diese „linearen Schraubengebiete" samt den nun vorgelegten Ausführungen als *Einleitung* in das Studium des Studyschen Werkes — besonders für Leser, welche mit der Graßmannschen *Ausdehnungslehre* vertraut sind — gelten können, geben wir noch eine Zusammenstellung der Typusbezeichnungen und der Sonderfälle, sowohl bei Study als auch in den „linearen Schraubengebieten" nebst Angabe der Seitenzahlen in beiden Abhandlungen.

E. Study hat als der *erste* alle Spezialfälle gehörig hervorgehoben, während in des Verfassers „Linearen Schraubengebieten" der sog. „allgemeine Fall" bei jedem Freiheitsgrade ebensowenig eine Nummer erhielt als die durch ∞-werden seiner Hauptparameter sich ergebenden Sonderfälle hervorgehoben wurden.

Vorliegende Abhandlung		E. Studys „Geometrie der Dynamen" (1903)		Die „linearen Schraubengebiete" in dieser Zeitschrift (1902, 48. Bd. 1. Hft.)	
I 1 (S. 230)	V 1 (S. 267)	Ia (S. 540)	Va (S. 553)	I (S. 62)	V (S. 62)
2 (S. 231)	2 (S. 269)	b (S. 541)	b (S. 553)	... für $\mathfrak{p}_I = \infty$ aus dem Hauptfall	
II 1 (S. 233)	IV 1 (S. 260)	IIa (S. 541)	IVa (S. 549)	II (S. 67)	IV (S. 81)
2 (S. 241)	2 (S. 262)	b { α (S. 542)	b { α (S. 550)	2* (S. 66)	2* (S. 67)
2′ (S. 244)	2′ (S. 264)	β (S. 542)	β (S. 552)	... (S. 66, 67)	
2″ (S. 245)	2″ (S. 266)	c (S. 543)	c (S. 552)	1* (S. 65)	1* (S. 66)
3 (S. 246)	3 (S. 266)	d (S. 543)	d (S. 553)	... für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \infty$ aus dem Hauptfall	
III 1 (S. 246)		IIIa (S. 543)		III (S. 95)	
2† (S. 251)		b { β (S. 546)		... für $\mathfrak{p}_{III} = \infty$ aus dem Hauptfall	
2 (S. 253)		α (S. 545)		4* (S. 90)	
2′ (S. 255)		c (S. 547)		3* (S. 87)	
2″ (S. 256)		b γ (S. 547)		(S. 91 — Eine Besonderheit)	
3 (S. 257)		d { α (S. 548)		2* (S. 86)	
3′ (S. 258)		β (S. 549)		(S. 87)	
3″ (S. 259)		e (S. 549)		1* (S. 86)	
4 (S. 259)		f (S. 549)		... für $\mathfrak{p}_I = \mathfrak{p}_{II} = \mathfrak{p}_{III} = \infty$ aus dem Hauptfall	

Über die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte.

Von G. Herglotz in Göttingen.

Die elastische Nachgiebigkeit des Erdkörpers wurde zuerst von Lord Kelvin (Phil. Trans. 1863) in den Bereich der Diskussion gezogen, und für sie aus der Theorie der Meeresfluten eine obere Grenze bestimmt. Die Dichtezunahme gegen das Erdinnere hin wurde dabei außer acht gelassen und die Erde als homogen vorausgesetzt. Auf diese Lücke wies Darwin hin (Mess. of Math. 1878) und versuchte gleichzeitig eine Schätzung des Einflusses der Inhomogeneität auf diese obere Grenze zu machen, indem er sich plausibler Annahmen über die Art dieses Einflusses bediente. Später stellte Love (Treatise on elasticity I.) bloß das als wahrscheinlich hin, daß eine Dichtezunahme gegen den Erdmittelpunkt, in Analogie zu den Ergebnissen der Laplaceschen Theorie der flüssigen Erde, die scheinbare Festigkeit derselben gegen äußere deformierende Kräfte vergrößere.

Eine wichtige Anwendung fand die Theorie der elastischen Erde, als S. Newcomb (Monthly notices 1892) die Nichtübereinstimmung der berechneten und beobachteten Periode der Polschwankungen auf die durch Umlagerung der Rotationsachse erzeugten elastischen Deformationen zurückführte. Die genauere theoretische Ausführung dieses Gedankens durch S. S. Hough (Phil. Trans. 1896) ergab, daß die Chandlersche Periode herauskommt, wenn man der Erde ungefähr die Nachgiebigkeit des Stahles zuerteilt. Die hierbei eingeschlagene Methode besitzt jedoch einen Mangel, der darin besteht, daß zunächst das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode für eine homogene Erde berechnet wurde, und mit diesem dann die für eine inhomogene starre Erde gültige Eulersche Periode multipliziert wurde, um dieselbe Größe für die nichtstarre Erde zu erhalten, während man strenge genommen jene Periode zugrunde zu legen hätte, die der Elliptizität $\frac{1}{232}$ einer im Gleichgewicht befindlichen flüssigen homogenen Erde zukommt. Diesen Mangel zu beseitigen, hätte man die durch Verlagerung der Rotationsachse erzeugten elastischen Deformationen unter der Voraussetzung der Inhomogeneität bestimmen müssen. Schon der Umstand, daß die Gleichgewichtstheorie einer flüssigen homogenen Erde für die Abplattung und Elliptizität $\left(= \frac{C-A}{C}\right)$ den gleichen Wert $\frac{1}{232}$ ergibt, während die beobachteten Werte $\frac{1}{298}$ bezw. $\frac{1}{305}$ sind, läßt erkennen, daß man unter Voraussetzung der Homogeneität nicht zu einer einwurfsfreien Schätzung der Nachgiebigkeit der Erde gelangen dürfte.

Es ist daher im folgenden das elastische Gleichgewicht einer inhomogenen der eigenen Schwere unterworfenen Kugel, die durch äußere Kräfte deformiert wird, untersucht worden. Es ergab sich dabei, daß die Dichtezunahme gegen den Erdmittelpunkt die scheinbare Festigkeit erhöht. Speziell beträgt für die Erde bei der Nachgiebigkeit des Stahles, und bei Zugrundelegung des Rocheschen Dichtigkeitsgesetzes, die durch die fluterzeugende Kraft entfernter Körper bewirkte Hebung oder Senkung des Erdbodens im Falle der Inhomogeneität etwa 0·80 von der im Falle der Homogeneität statthabenden. (Darwin schätzte diesen Bruchteil auf 0·97.) Es kann daher Lord Kelvins obere Grenze für die Nachgiebigkeit der Erde noch etwas weiter herabgedrückt werden.

Was nun die Bestimmung der Verlängerung der Eulerschen Periode angeht, so beseitigte die Berücksichtigung der Inhomogeneität den erwähnten der Theorie von Hough anhaftenden Mangel. Es liefert nämlich das Rochesche Gesetz für das Gleichgewicht der flüssigen Erde die Abplattung $= \frac{1}{297}$ und die Elliptizität $= \frac{1}{305.3}$, welche Werte

mit den beobachteten äußerst nahe übereinstimmen, und welche zugleich diejenigen sind, welche der Rechnung in Strenge zugrunde zu legen sind. Ferner fand sich das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode gleich 1·57 statt des für die homogene Erde bestimmten Verhältnisses 1·47. Dadurch wird die Eulersche Periode für eine Erde vom Elastizitätsgrade des Stahles um etwa 1 Monat länger als die von Hough bestimmte, und daher läßt sich auch mit Rücksicht auf die Periode der Polschwankungen, die obere Grenze für die Nachgiebigkeit, durch Berücksichtigung der Inhomogeneität weiter heruntersetzen.

Zum Schlusse wurde auch noch die von E. Wiechert über die Dichtigkeitsverteilung im Erdinnern aufgestellte Hypothese an Stelle des Rocheschen Gesetzes angewandt. Für dieselbe ergab sich der von dem vorigen nur wenig verschiedene Wert 1·59 für das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode. Soll dieses Verhältnis den durch die Beobachtungen geforderten Wert von 1·39 erhalten, so hat man bei Zugrundelegung des Wiechertsche Dichtegesetzes der Erde die Elastizitätskonstante $e = 11{\cdot}68.10^{11}$ (cgs) zu erteilen, während die Annahme einer homogenen Erde auf die Elastizitätskonstante $e = 9{\cdot}19.10^{11}$ führt.

I. Über die Deformation einer elastischen, gravitierenden und inhomogenen Kugel durch äußere Kräfte.

Zunächst handelt es sich darum, die von Thomson[1]) und Darwin angegebenen Resultate bezüglich der Deformation des elastischen homogenen Erdkörpers nun auch auf den Fall einer variablen Dichte auszudehnen. Man wird dabei, gestützt auf die von Thomson[2]) hervorgehobene Geringfügigkeit des Einflusses der Kompressibilität des Erdkörpers, auch hier unbedenklich ein inkompressibles Material voraussetzen dürfen. Die zu behandelnde Aufgabe ist dann des nähern diese: die Deformationen zu finden, welche eine elastische Kugel aus inkompressiblem, gravitierendem Material, dessen Dichte eine bekannte Funktion der Entfernung vom Kugelmittelpunkt ist, durch kleine, körperlich angreifende Kräfte erleidet. Die Behandlung dieser Frage wird sich natürlich der Laplaceschen Theorie[3]) der Figur der Planeten analog gestalten, da man ja gerade zu dieser zurückgelangt, wenn man die Elastizitätskonstante gleich Null setzt.

1) Natural philosophy. part II. art. 832 ff.
2) Natural philosophy. part II. art. 838.
3) Laplace, Méc. cél. tom. II.

Seien u, v, w die Verrückungen eines Punktes x, y, z der Kugel, also kleine Größen, deren Quadrate bereits vernachlässigt werden sollen, und werde gesetzt:

(1) $$q = ux + vy + wz,$$

sodaß $\frac{1}{r}q$ die Verrückung in Richtung des Radius r darstellt, so werden die deformierten Flächen gleicher Dichte durch die Gleichung bestimmt sein:

(2) $$R = r + \frac{1}{r}q,$$

in der r als Parameter anzusehen ist. Speziell wird, unter a den Kugelradius verstanden, die Gleichung der deformierten Oberfläche sein:

(3) $$R = a + \frac{1}{a}\bar{q},$$

wofern ein Querstrich über einer Größe anzeigt, daß ihr Wert an der Kugeloberfläche (für $r = a$) zu nehmen ist.

Endlich wird hiernach die Dichte σ im Punkte xyz den Wert haben:

(4) $$\sigma = \varrho - \frac{q}{r}\frac{d\varrho}{dr},$$

während $\varrho = f(r)$ die Dichte der Kugel vor der Deformation war.

Bezeichnen nun weiterhin V das Gravitationspotential der deformierten Kugel, Π den Druck im Innern derselben, c ihre Elastizitätskonstante und K das Potential der deformierenden Kräfte, so sind die Bedingungen des innern Gleichgewichtes bekanntlich diese:

(5) $$\begin{aligned} c\Delta u + \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \sigma\frac{\partial(V+K)}{\partial x} &= 0 \\ c\Delta v + \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \sigma\frac{\partial(V+K)}{\partial y} &= 0 \\ c\Delta w + \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \sigma\frac{\partial(V+K)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Die Komponenten des Druckes auf ein normal zum Radius stehendes Flächenelement, haben ferner die Werte:

(6) $$\begin{aligned} F &= \Pi\frac{x}{r} + \frac{c}{r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial x} - u\right) \\ G &= \Pi\frac{y}{r} + \frac{c}{r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial y} - v\right) \\ H &= \Pi\frac{z}{r} + \frac{c}{r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} - w\right)\cdot \end{aligned}$$

Nun wirken auf die Oberfläche keine äußeren Drucke, daher müssen an derselben die F, G, H[1]) verschwinden, und man hat die Grenzbedingungen:

$$F = G = H = 0, \quad \text{für} \quad r = a + \frac{1}{a}\bar{q}. \tag{7}$$

Nunmehr soll, wie es bei der Anwendung stets der Fall ist, angenommen werden, daß sich das Potential der äußeren Kräfte in die Reihe entwickeln lasse:

$$K = \sum_n k_n K_n(x, y, z), \tag{8}$$

in der die K_n räumliche Kugelfunktionen $n$ten Grades, die k_n aber Konstante sind. Man kann dann für q den, wie sich zeigt, ausreichenden Ansatz machen:

$$q = \sum_n q_n(r) \cdot K_n(x, y, z), \tag{9}$$

wo die $q_n(r)$ noch zu bestimmende Funktionen von r allein sind. Mit Hilfe desselben läßt sich der Ausdruck des Potentials V leicht aufstellen. Offenbar setzt er sich zusammen aus dem Potential einer Kugel des Radius a und der Dichte σ und aus dem Potential einer dieselbe überdeckenden Massenbelegung der Dichte: $\frac{1}{a}\varrho\bar{q}$. Dementsprechend erhält man, unter f die Gravitationskonstante verstehend:

$$\begin{aligned} V &= 4\pi f\left(\frac{1}{r}\int_0^r \varrho r^2 dr + \int_r^a \varrho r dr\right) \\ &\quad + 4\pi f \sum_n \frac{1}{2n+1}\left(\varrho\bar{q}_n - \frac{1}{r^{2n+1}}\int_0^r \varrho' q_n r^{2n+1} dr - \int_r^a \varrho' q_n dr\right) \cdot K_n(xyz) \\ &= \Gamma(r) + 4\pi f \sum_n \frac{1}{2n+1}\left(\int_0^r \varrho\, dq_n r^{2n+1} + \int_r^a \varrho\, dq_n\right) K_n(xyz) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Gamma(r) = 4\pi f\left(\frac{1}{r}\int_0^r \varrho r^2 dr + \int_r^a \varrho r dr\right) \tag{11}$$

Setzt man also:

$$\varkappa_n(r) = \frac{4\pi f}{2n+1}\left(\int_0^r \varrho\, dq_n r^{2n+1} + \int_r^a \varrho\, dq_n\right) \tag{12}$$

$$\mathfrak{K} = \sum_n (k_n + \varkappa_n) K_n(x, y, z), \tag{13}$$

---

1) Man hätte hier noch die veränderte Richtung der Oberflächennormale zu berücksichtigen; dies gibt aber bei einem inkompressiblen Material nur Korrektionen II. Ordnung.

so wird:

$$V + K = \Gamma(r) + \mathfrak{K}, \tag{14}$$

worin aber jetzt $\mathfrak{K}$ von der Ordnung der Verrückungen klein ist. Bei Vernachlässigung der Quadrate derselben, wird man daher, nach Einführung von:

$$\begin{aligned} p &= \Pi + \int_a^r \varrho\, d\Gamma(r) \\ \gamma &= \frac{4\pi f \varrho'}{r^4} \int_0^r \varrho r^2 dr, \end{aligned} \tag{15}$$

die Grundgleichungen (5) und (6) in der Form schreiben können.

$$\begin{aligned} c\Delta u + \gamma q x + \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial x} &= 0 \\ c\Delta v + \gamma q y + \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial y} &= 0 \\ c\Delta w + \gamma q z + \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} F &= \left(p + \int_r^a \varrho\, d\Gamma\right) \frac{x}{r} + \frac{c}{r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial x} - u\right) \\ G &= \left(p + \int_r^a \varrho\, d\Gamma\right) \frac{y}{r} + \frac{c}{r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial y} - v\right) \\ H &= \left(p + \int_r^a \varrho\, d\Gamma\right) \frac{z}{r} + \frac{c}{r}\left(r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial z} - w\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Aus den Gleichungen (16) leitet man nun zwei neue Beziehungen ab, die bloß p und q enthalten, indem man das eine Mal mit bezw. x, y, z multipliziert und addiert, und das andre Mal nach bezw. x, y, z differenziert, und ebenfalls wieder addiert. Man erhält hierdurch:

$$\begin{aligned} c\Delta q + r \frac{\partial p}{\partial r} + \varrho r \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial r} + \gamma q r^2 &= 0 \\ \Delta p + \varrho' \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial r} + r \frac{\partial (\gamma q)}{\partial r} + 3\gamma q &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Dem Ansatze für q entsprechend, läßt sich nun auch für p analog setzen:

$$p = \sum_n p_n(r) K_n(x, y, z). \tag{19}$$

Führt man jetzt die Entwicklungen (9), (13), (19) in die Gleichungen (18) ein, und vergleicht die Koeffizienten der einzelnen Kugelfunktionen desselben Grades, so finden sich die beiden Gleichungen für $p_n(r)$ und $q_n(r)$:

$$(20)\quad \begin{aligned} &c\left(q_n'' + 2\frac{n+1}{r} q_n'\right) + r\left(p_n' + \frac{n}{r} p_n\right) + \varrho r\left(\varkappa_n' + \frac{n}{r}\varkappa_n\right) + \\ &\qquad + n\varrho k_n + \gamma r^2 q_n = 0 \\ &p_n'' + 2\frac{n+1}{r} p_n' + \varrho\left(\varkappa_n'' + 2\frac{n+1}{r}\varkappa_n'\right) + \varrho'\left(\varkappa_n' + \frac{n}{r}\varkappa_n\right) + \\ &\qquad + \frac{n}{r}\varrho' k_n + \gamma r q_n' + (r\gamma' + (n+3)\gamma) q_n = 0. \end{aligned}$$

Um endlich eine Gleichung für q_n allein herzustellen, hat man bloß nötig, aus den beiden Gleichungen (20) die Kombination $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{n+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) I - \left(r\frac{\partial}{\partial r} + n + 2\right) II$ zu bilden. Dieselbe ergibt:

$$(21)\quad \begin{aligned} &c D q_n + n(n+1)\left[\frac{\varrho'}{r}(k_n + \varkappa_n) - \gamma q_n\right] = 0 \\ &D q_n = \frac{1}{r^{2n+2}}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r^{2n+4}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} q_n. \end{aligned}$$

Die Funktion p_n stellt sich dann durch q_n ausgedrückt in der Form dar:

$$(22)\quad p_n + \varrho(k_n + \varkappa_n) = -\frac{c}{n(n+1) r^{2n+2}}\frac{d}{dr} r^{n+3}\frac{d}{dr} r_n \frac{d}{dr} q_n.$$

Gleichung (21) besitzt nun noch den Übelstand, daß sie wegen des in ihr auftretenden $\varkappa_n$ das q_n unter dem Integralzeichen enthält. Derselbe wird einfach dadurch beseitigt, daß man aus (21) $\varkappa_n$ bestimmt, und in die aus (12) folgende Relation:

$$\varkappa_n'' + 2\frac{n+1}{r}\varkappa_n' = \frac{4\pi f \varrho'}{r} q_n$$

einträgt. Darnach ergibt sich *für q_n die lineare Differentialgleichung 6ter Ordnung:*

$$\frac{d}{dr} r^{2n+2}\frac{d}{dr}\frac{r}{\varrho'} D q_n =$$

$$(23)\quad = \frac{4\pi f n(n+1) M}{c} r^{2n-1}\left[q_n'' + 2\left(\frac{\varrho r^2}{M} + \frac{n-2}{r}\right) q_n' + 2(n-1)\left(\frac{\varrho r}{M} - \frac{3}{r^2}\right) q_n\right]$$

$$M = \int_0^r \varrho r^2 dr.$$

Für $c = 0$ geht dieselbe in die bekannte Differentialgleichung der Laplaceschen Theorie der Planetenfigur über.

Was nun die Bestimmung der in q_n willkürlichen Konstanten anbelangt, so bemerke man, daß von den 6 Partikularlösungen der Gleichung (23) bloß die drei für $r = 0$ endlich bleibenden Lösungen brauchbar sind. Von den drei hierdurch auftretenden Konstanten bestimmt sich die eine durch die Forderung, daß q_n auch der Gleichung (21) Genüge leisten soll, die beiden anderen dagegen durch die Bedingungen (7). Um diese letzteren explizite zu formulieren, hat man u, v, w durch q auszudrücken, und daraus F, G, H abzuleiten. Die Verrückungen u, v, w lassen sich direkt aus den Gleichungen (16) bestimmen, in denen man $p, q, \mathfrak{K}$ jetzt als bekannt anzusehen hat. Es ergeben sich die Werte:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
u &= \sum_n \left(s_n \frac{\partial K_n}{\partial x} + t_n x K_n\right)\\
v &= \sum_n \left(s_n \frac{\partial K_n}{\partial y} + t_n y K_n\right)\\
w &= \sum_n \left(s_n \frac{\partial K_n}{\partial z} + t_n z K_n\right)
\end{aligned}
$$

$$
(25)\qquad s_n = \frac{r}{n(n+1)} q_n' + \frac{1}{n} q_n, \qquad t_n = -\frac{1}{n+1}\frac{1}{r} q_n'.
$$

Führt man dieselben in die Ausdrücke (17) von F, G, H ein, so findet sich ohne weiteres:

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
F &= \frac{x}{r}\int_r^a \varrho\, d\Gamma + \sum_n \left(\sigma_n \frac{\partial K_n}{\partial x} + \tau_n x K_n\right)\\
G &= \frac{y}{r}\int_r^a \varrho\, d\Gamma + \sum_n \left(\sigma_n \frac{\partial K_n}{\partial y} + \tau_n y K_n\right)\\
H &= \frac{z}{r}\int_r^a \varrho\, d\Gamma + \sum_n \left(\sigma_n \frac{\partial K_n}{\partial z} + \tau_n z K_n\right)
\end{aligned}
$$

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{c}{n(n+1)r}\left(r^2 q_n'' + 2nrq_n' + 2(n^2-1)q_n\right)\\
\tau_n &= \frac{1}{r} p_n - \frac{c}{(n+1)r^3}\left(r^2 q_n'' - 2rq_n'\right).
\end{aligned}
$$

Damit diese Werte für $r = a + \frac{1}{a}\bar{q}$ verschwinden, ist offenbar ausreichend, daß:

$$
(28)\qquad \sigma_n = 0, \qquad r^2 \tau_n = \varrho q_n \frac{d\Gamma}{dr} \qquad \text{für } r = a.
$$

Dies sind die beiden noch fehlenden *Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten*, die man auch in der Form schreiben kann:

$$
(29)\qquad
\left.
\begin{aligned}
r^2 q_n'' + 2nrq_n' + 2(n^2-1)q_n &= 0\\
p_n + \frac{2c}{r^2}\left(rq_n' + (n-1)q_n\right) + r\frac{\varrho}{\varrho'}\gamma q_n &= 0
\end{aligned}
\right\}\text{für } r = a.
$$

II. Die Rochesche Hypothese über die Dichteverteilung im Erdinnern.

Für die Dichteverteilung im Innern der Erde möge nun das von Lipschitz[1]) gebrauchte und im Falle der Laplaceschen Theorie der Erdfigur ausführlich studierte Gesetz angenommen werden:

$$\varrho = \varrho_0(1 - \eta r^\lambda). \tag{1}$$

Damit ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{4\pi f\lambda\varrho_0^2\eta}{3} r^{\lambda-2}\left(1 - \frac{3\eta}{\lambda+3} r^\lambda\right) \\ \Gamma &= -\frac{4\pi f\varrho_0 r}{3}\left(1 - \frac{3\eta}{\lambda+3} r^\lambda\right) \\ M &= \tfrac{1}{3}\varrho_0 r^3\left(1 - \frac{3\eta}{\lambda+3} r^\lambda\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Hiermit wird die Differentialgleichung für q_n:

$$\begin{aligned} r^{n-1}\frac{d}{dr} r^{-2n}\frac{d}{dr} r^{1-\lambda}\frac{d}{dr} r^{-1}\frac{d}{dr} r^{2n+4}\frac{d}{dr} r^{-1}\frac{d}{dr} q_n + \frac{\alpha}{r^{n+2}}\frac{d}{dr} r^{2n+2}\frac{d}{dr} q_n = \\ = \beta r^{n+\lambda-2}(r^2 q_n'' + 2(n+\lambda+1) r q_n' + 2\lambda(n-1) q_n) \\ \alpha = \frac{4\pi f\lambda n(n+1)\varrho_0^2\eta}{3c}, \quad \beta = \frac{4\pi f\lambda n(n+1)\varrho_0^2\eta^2}{(3+\lambda)c}. \end{aligned} \tag{3}$$

Für $r = a$ hat q_n die beiden Bedingungen I. (29) zu erfüllen, die sich hier noch etwas bequemer gestalten lassen. Berechnet man nämlich aus der Gleichung I. (21) die Größe $k_n + \varkappa_n$ und setzt sie in dem Ausdruck (22) für p_n ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} n(n+1)\left(p_n - \frac{\varrho\Gamma'}{r} q_n\right) = \frac{c\varrho}{\varrho'}\frac{1}{r^{2n+1}}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r^{2n+4}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} q_n - \\ - \frac{c}{r^{2n+2}}\frac{d}{dr} r^{n+3}\frac{d}{dr} r^n \frac{d}{dr} q_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Dadurch kann man die beiden Grenzbedingungen schreiben:

$$\begin{aligned} r^2 q_n'' + 2nr q_n' + 2(n^2-1) q_n = 0 \\ \frac{\varrho}{\varrho'} r \frac{d}{dr} r^{-1}\frac{d}{dr} r^{2n+4}\frac{d}{dr} r^{-1}\frac{d}{dr} q_n - \frac{d}{dr} r^{n+3}\frac{d}{dr} r^n \frac{d}{dr} q_n + \\ + 2n(n+1) r^{n+2}\frac{d}{dr} r^{n-1} q_n = 0 \\ \text{für } r = a. \end{aligned} \tag{5}$$

Die 3te zur Bestimmung der 3, in q_n auftretenden willkürlichen Konstanten noch nötige Bedingung besteht, wie bereits erwähnt, darin,

1) Crelle LXII. 1863. Vgl. auch Tisserand Méc. cél. chap. XV.

daß q_n auch der Gleichung I. (21) genügen muß. — Es reicht dazu aus, daß dies bloß für einen speziellen Wert von r etwa $r = 0$ der Fall ist, weil dann q_n schon von selbst jener Gleichung für alle Werte von r genügen wird.

Die Konstanten im Dichtigkeitsgesetz (1) hat man nun bei der Anwendung auf die Erde so zu bestimmen, daß man erstens die durch die Beobachtungen hekannte mittlere Dichte erhält, und daß zweitens die Laplacesche Theorie der Figur der Erde unter Zugrundelegung eben dieses Gesetzes die beobachteten Werte der Abplattung und der Elliptizität $\left(= \frac{C-A}{C} \quad A, C \,..\, \text{Trägheitsmomente}\right)$ ergibt. Roche[1]) zeigte, daß für $\lambda = 2$ eine befriedigende Übereinstimmung zu erhalten ist, während Lipschitz $\lambda = 2{\cdot}39$ fand. Im folgenden soll nun das spezielle Gesetz von Roche festgehalten, also $\lambda = 2$ gesetzt werden. Dann wird aber die noch fehlende 3te Bedingung die Form erhalten:

$$\text{(6)} \quad \frac{c(Dq_n)_0}{n(n+1)} + \frac{8\pi f \varrho_0^2 \eta}{3}(q_n)_0 = 2\varrho_0\eta\left[k_n + \frac{4\pi f \varrho_0}{2n+1}\left(\frac{\overline{\varrho q_n}}{\varrho_0} + 2\eta\int_0^a q_n r\,dr\right)\right],$$

wobei man bemerke, daß: $(Dq_n)_0 = 8(2n+3)(2n+5)$ dem Koeffizienten von r^4 in q_n ist. Ferner sind die bei der Erde vorzugsweise in Betracht kommenden äußeren Kräfte die Zentrifugalkraft der Erdrotation und die Anziehung eines im Verhältnis zum Erdradius weit entfernten Himmelskörpers. In beiden Fällen hat man als Potential eine räumliche Kugelfunktion 2ten Grades zu nehmen.

Es möge deshalb für das folgende jetzt $n = 2$ gesetzt werden. Man hat in diesem Falle:

$$\alpha = \frac{16\pi f \varrho_0^2 \eta}{c}, \quad \beta = \frac{48\pi f \varrho_0^2 \eta^2}{5}$$

und wenn man noch folgende Größen einführt:

$$\text{(7)} \qquad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}, \quad \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^3}}, \quad \xi = \frac{r}{\varepsilon},$$

so folgt für q_2, wofür nunmehr einfach q geschrieben werde, die Gleichung:

$$\text{(8)} \qquad \xi^5 \frac{d}{d\xi}\xi^{-4}\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\xi^8\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{dq}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\xi^6\frac{dq}{d\xi} = $$
$$= \sigma\xi^6(\xi^2 q'' + 10\xi q' + 4q).$$

Zur Integration setze man:

$$\text{(9)} \qquad q = \sum \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!} N_\nu \xi^{2\nu},$$

1) Acad. des sciences d. Montpellier 1858; Compt. R. tom. 39 (1854); vgl. auch Helmert, Höhere Geodäsie II, pag. 473—492.

dann sind die N_ν durch folgende einfache Rekursion bestimmt:

$$N_\nu + N_{\nu-2} = 2\sigma(2\nu^2 - 3\nu - 7)N_{\nu-3}. \tag{10}$$

Hierbei bleiben $N_0 N_1 N_2$ willkürlich, und dementsprechend erhält man die 3 ganzen, transzendenten Partikularintegrale:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu \xi^{2\nu} \\ \psi(\xi) &= \sum_1^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_\nu \xi^{2\nu} \\ \chi(\xi) &= \sum_2^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_\nu \xi^{2\nu}, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei die Werte der ersten Koeffizienten $\alpha_\nu \beta_\nu \gamma_\nu$ sind:

λ	$\alpha\lambda$	$\beta\lambda$	$\gamma\lambda$
0	$1/4$	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1
3	σ	-2	0
4	0	26σ	-1
5	$-\sigma$	1	56σ
6	$94\sigma^2$	-120σ	1
7	σ	$-1+3640\sigma^2$	-196σ
8	$-288\sigma^2$	314σ	$-1+10864\sigma^2$
9	$-\sigma+24064\sigma^3$	$1-34360\sigma^2$	452σ
10	$614\sigma^2$	$-640\sigma+118664\sigma^3$	$1-74760\sigma^2$

Die allgemeinste für $\xi = 0$ endlich bleibende Lösung ist also

$$q = A\varphi(\xi) + B\psi(\xi) + C\chi(\xi). \tag{12}$$

Man bemerke nun, daß für $\xi = 0$:

$$(q)_0 = \frac{1}{5!\,2}A, \quad (Dq)_0 = \frac{2}{5!\,\varepsilon^4}C \tag{13}$$

ist, sodaß mit diesen Werten und den Bezeichnungen:

$$h = \frac{3k_2}{4\pi f\varrho_0}, \quad \xi_1 = \frac{a}{\varepsilon} \tag{14}$$

die drei zur Bestimmung von A, B, C dienenden Gleichungen (5) und (6), für $n = 2$ übergehen in:

$$(15)\quad \left.\begin{aligned} &\xi^2\frac{d^2q}{d\xi^2}+4\xi\frac{dq}{d\xi}+6q=0\\ &\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\xi^8\frac{d}{d\xi}\xi^{-1}\frac{dq}{d\xi}+\frac{10\sigma\varrho_0}{3\bar\varrho}\left(\frac{d}{d\xi}\xi^5\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{dq}{d\xi}-12\xi^4\frac{d}{d\xi}\xi q\right)=0 \end{aligned}\right\}\text{für}\quad \xi=\xi_1,$$

$$\frac{1}{5!}\left(\tfrac{1}{2}A+2C\right)=\frac{3}{5\varrho_0}\,\overline{\varrho q}+2\sigma\int_0^{\xi_1}q\xi\,d\xi+h.$$

Hier hat man jetzt den Ausdruck (12) für q einzusetzen. Zu diesem Zwecke bilde man die folgenden Funktionen:

$$\varphi_1(\xi)=\sum_0^\infty(2\nu^2+3\nu+3)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu\xi^{2\nu}$$

$$\psi_1(\xi)=\sum_1^\infty(2\nu^2+3\nu+3)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_\nu\xi^{2\nu}$$

$$\chi_1(\xi)=\sum_2^\infty(2\nu^2+3\nu+3)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_\nu\xi^{2\nu}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} \varphi_2(\xi)&=\xi^2\sum_0^\infty\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_{\nu+2}\xi^{2\nu}+\\ &\quad+\frac{20\sigma\varrho_0}{3\bar\varrho}\sum_0^\infty(2\nu+1)(2\nu^2+5\nu-6)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu\xi^{2\nu}\\ \psi_2(\xi)&=\xi^2\sum_0^\infty\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_{\nu+2}\xi^{2\nu}+\\ &\quad+\frac{20\sigma\varrho_0}{3\bar\varrho}\sum_1^\infty(2\nu+1)(2\nu^2+5\nu-6)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_\nu\xi^{2\nu}\\ \chi_2(\xi)&=\xi^2\sum_0^\infty\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_{\nu+2}\xi^{2\nu}+\\ &\quad+\frac{20\varrho\sigma_0}{3\bar\varrho}\sum_2^\infty(2\nu+1)(2\nu^2+5\nu-6)\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_\nu\xi^{2\nu}\\ \varphi_3(\xi)&=\sum_0^\infty\frac{(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_\nu\xi^{2\nu}-\frac{1}{240\sigma\xi^2}\\ \psi_3(\xi)&=\sum_1^\infty\frac{\nu+2}{(2\nu+5)!}\beta_\nu\xi^{2\nu}\\ \chi_3(\xi)&=\sum_2^\infty\frac{\nu+2}{(2\nu+5)!}\gamma_\nu\xi^{2\nu}-\frac{1}{60\sigma\xi^2}. \end{aligned}$$

Dann gehen die drei Gleichungen (15) über in folgende:

$$(17)\quad \begin{aligned} &A\varphi_1(\xi_1)+B\psi_1(\xi_1)+C\chi_1(\xi_1)=0\\ &A\varphi_2(\xi_1)+B\psi_2(\xi_1)+C\chi_2(\xi_1)=0\\ &A\varphi_3(\xi_1)+B\psi_3(\xi_1)+C\chi_3(\xi_1)+\frac{1}{\sigma\xi^2}\left(h+\frac{3\bar\varrho}{5\varrho_0}\bar q\right)=0. \end{aligned}$$

Aus diesen 3 Gleichungen sind A, B, C zu bestimmen, wobei man zu beachten hat, daß

$$\bar{q} = A\varphi(\xi_1) + B\psi(\xi_1) + C\chi(\xi_1)$$

ist. Trägt man hierauf die gefundenen Werte in (12) ein, so folgt:

$$q = -\frac{h}{\frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0} + \sigma\xi_1^2\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}} \cdot \frac{\varDelta}{\varDelta_1}, \tag{18}$$

wobei gesetzt ist:

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} \varphi(\xi_1), & \psi(\xi_1), & \chi(\xi_1) \\ \varphi_1(\xi_1), & \psi_1(\xi_1), & \chi_1(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_1), & \psi_2(\xi_1), & \chi_2(\xi_1) \end{vmatrix} \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1), & \psi_1(\xi_1), & \chi_1(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_1), & \psi_2(\xi_1), & \chi_2(\xi_1) \\ \varphi_3(\xi_1), & \psi_3(\xi_1), & \chi_3(\xi_1) \end{vmatrix}$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \varphi(\xi), & \psi(\xi), & \chi(\xi) \\ \varphi_1(\xi), & \psi_1(\xi), & \chi_1(\xi) \\ \varphi_2(\xi), & \psi_2(\xi), & \chi_2(\xi) \end{vmatrix}. \tag{19}$$

An der Oberfläche, für $\xi = \xi_1$, ist speziell:

$$\bar{q} = -\frac{h}{\frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0} + \sigma\xi_1^2\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}}. \tag{20}$$

Die Schichten gleicher Dichte haben die Gleichung:

$$R = r\left(1 + q(\xi) \cdot \frac{K_2(x, y, z)}{r^2}\right), \quad \xi = \frac{r}{\varepsilon}, \tag{21}$$

wo r der mittlere Radius der betreffenden Schichte ist.

Wenn im besonderen $K_2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - z^2$ ist, so sind die Schichten Rotationsellipsoide und ihre Abplattung ist gerade $q(\xi)$.

III. Numerische Anwendung auf den Fall der Erde.

Die erhaltenen Formeln mögen nun eine zahlenmäßige Auswertung für den Fall der elastischen Erde finden.

Für die Konstanten im Dichtigkeitsgesetz: $\varrho = \varrho_0(1 - \eta r^2)$ werde mit Roche genommen:

$$\varrho_0 = 10.1, \quad \eta = \frac{0{\cdot}764}{a^2}, \quad \text{also} \quad \bar{\varrho} = 2{\cdot}384,$$

ferner möge der Erde der Elastizitätsgrad des Stahles beigelegt werden, sodaß also zu nehmen ist:

$$c = 7{\cdot}65.10^{11} (cgs).$$

Da nun $a = 6{\cdot}37.10^8$ cm, so wird:

$$\sigma = 0{\cdot}0389, \quad \xi_1 = 3{\cdot}432.$$

Mit diesen Werten lassen sich die Funktionen $\varphi\psi\chi\ldots$ leicht berechnen, und zwar genügen etwa 10 Glieder jeder Reihe, um die ersten fünf geltenden Ziffern des betreffenden Funktionswertes richtig zu erhalten. Man findet:

$$\varphi(\xi_1) = 0{\cdot}004198 \quad \varphi_1(\xi_1) = 0{\cdot}01344$$
$$\psi(\xi_1) = 0{\cdot}01330 \quad \psi_1(\xi_1) = 0.09234$$
$$\chi(\xi_1) = 0{\cdot}004510 \quad \chi_1(\xi_1) = 0{\cdot}07472$$

$$\varphi_2(\xi_1) = -0{\cdot}01481 \quad \varphi_3(\xi_1) = -0{\cdot}004915$$
$$\psi_2(\xi_1) = -0{\cdot}1830 \quad \psi_3(\xi_1) = 0{\cdot}006825$$
$$\chi_2(\xi_1) = 0{\cdot}4377 \quad \chi_3(\xi_1) = -0{\cdot}03485$$

und daraus weiterhin:

$$\Delta_1 = 0{\cdot}0001292$$
$$\Delta_2 = -0{\cdot}0002755.$$

Bezeichnet nun g die Beschleunigung der Erdschwere, so findet sich für h:

$$h = (1 - \tfrac{3}{5}\eta a^2)\frac{ak_2}{g} = 0{\cdot}5416\frac{ak_2}{g}.$$

Mit Rücksicht auf das Spätere, soll jetzt $k_2 = \frac{1}{2}\omega^2$ ($\omega\ldots$ Rotationsgeschwindigkeit der Erde) genommen werden, was man unbeschadet der Allgemeinheit tun darf, da $K_2(xyz)$ ja ebenfalls einen willkürlichen Faktor enthält. Dann folgt sofort:

$$h = 0{\cdot}0009303$$

und:

$$\bar{q} = \frac{1}{898{\cdot}4}.$$

Man hat also das folgende Resultat:

Wird der Erde der Elastizitätsgrad des Stahles beigelegt, und dieselbe durch äußere Kräfte deformiert, die ein Potential besitzen, das eine räumliche Kugelfunktion 2ten Grades ist:

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 K_2(xyz),$$

so ist die deformierte Gestalt der Oberfläche gegeben durch:

(A) $$r = a\left(1 + \frac{1}{898.4}\cdot\frac{K_2(xyz)}{a^2}\right).$$

Betrachtet man speziell die durch die eigene Rotation erzeugte Deformation, so sind die äußeren Kräfte die Zentrifugalkräfte, für die man zu setzen hat:

$$K_2 = \tfrac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - z^2.$$

Daraus folgt sofort, daß die Oberfläche ein Rotationsellipsoid mit der Abplattung: $\frac{1}{898.4}$ wird. —

Zum Vergleiche mögen nun die analogen Zahlen für die homogene Erde hier Platz finden. Man hat in diesem Falle

$$\bar{q} = \frac{5}{2} \frac{h}{1 + \frac{19c}{2g\varrho a}}, \quad h = \frac{3k_2}{4\pi f\varrho} = \frac{ak_2}{g},$$

wo nun für ϱ die mittlere Erddichte zu nehmen ist.

Mit den obigen Zahlenangaben findet sich für $k_2 = \frac{\omega^2}{2}$:

$$\bar{q} = \frac{1}{725.4}.$$

Es wird also bei demselben äußeren Störungspotential wie vorhin jetzt die deformierte Gestalt der Oberfläche gegeben sein durch:

$$r = a\left(1 + \frac{1}{725.4} \frac{K_2(xyz)}{a^2}\right). \tag{B}$$

Die durch die eigene Rotation erzeugte Abplattung ist: $\frac{1}{725.4}$.

Der Vergleich von (A) und (B) gibt folgendes Resultat:

Bei dem Nachgiebigkeitsgrade des Stahles ist die durch ein Potential 2ten Grades erzeugte Deformation bei der inhomogenen Erde nur 0·807 oder etwa $^4/_5$ von jener bei der homogenen Erde.

Das Verhältnis ist also ein erheblich geringeres, als es von Darwin geschätzt wurde, der es gleich 0·970 fand.

IV. Die Eulersche Periode der nichtstarren Erde.

Bewegt sich die instantane Rotationsachse relativ zum Erdkörper, so bewirkt die hierdurch erzeugte Veränderung der Zentrifugalkraft eine elastische Deformation der Erde, mithin eine Variation des Trägheitsellipsoides, welche nun ihrerseits bekanntlich wieder die Verlängerung der Periode der freien Rotation zur Folge hat.

Welches ist nun zunächst die durch Verlagerung der Rotationsachse erzeugte elastische Deformation?

Man hat bei der Beantwortung dieser Frage von der natürlichen Vorstellung auszugehen[1]), daß bei der gleichförmigen Rotation der Erde um ihre Figurenachse die elastischen Kräfte durchaus nicht beansprucht werden, daß also auch noch Gleichgewicht bestände, wenn die Erde plötzlich verflüssigt würde. In diesem Falle aber muß die

1) Vgl. Klein-Sommerfeld, Kreiseltheorie III. pag. 697 ff.

Laplacesche Theorie gelten, d. h es muß die Abplattung der Schichten gleicher Dichte den aus derselben folgenden Wert besitzen.

Ist aber nun diese Voraussetzung eingeführt, dann ist man berechtigt, die durch Verlagerung der Rotationsachse entstehende neue Form der Flächen gleicher Dichte folgendermaßen zu bestimmen: Man sucht erst die Deformation, welche die durch Ablenkung der Rotationsachse erzeugte Variation der Zentrifugalkraft bei einer Kugel mit gleicher Dichteverteilung hervorrufen würde, und bringt dieselbe dann an der alten Form der Flächen gleicher Dichte an.

Sind nun l, m, 1 (unter l, m kleine Größen verstanden) die Richtungskosinusse der gestörten Rotationsachse bezogen auf das alte, in der Erde festliegende System der Hauptachsen, so ist die Variation des Zentrifugalkraftpotentials:

$$K = -\omega^2(lx + my)z. \tag{1}$$

Dies erzeugt als störendes Potential genommen nach III. eine Deformation der Schichten gleicher Dichte:

$$\delta r = -rq(l\cos\varphi + m\sin\varphi)\sin 2\theta, \tag{2}$$

wenn φ die geographische Länge und θ die Nordpolardistanz auf der Erde ist.

Ist also e die Abplattung der Schichten gleicher Dichte bei der gleichförmigen Rotation um die Figurenachse, so wird nach der Verlagerung der Rotationsachse die Gleichung dieser Schichten sein:

$$R = r\{1 + e(\tfrac{1}{3} - \cos^2\theta) - q(l\cos\varphi + m\sin\varphi)\sin 2\theta\}. \tag{3}$$

Die Trägheitsgrößen dieser neuen durch (3) bestimmten Gleichgewichtsfigur hat man nun behufs Aufstellung der Rotationsgleichungen für das alte System der Hauptachsen zu ermitteln. Zu diesem Zwecke bezeichne man mit A, A, C die Trägheitsmomente der ungestörten, also durch:

$$R = r\{1 + e(\tfrac{1}{3} - \cos^2\theta)\} \tag{4}$$

gegebenen Figur. Dann findet man sofort:

$$\begin{gathered}\int (y^2 + z^2)dm = A, \quad \int (x^2 + z^2)dm = A, \quad \int (x^2 + y^2)dm = C,\\ \int yzdm = -\frac{8m\pi}{15}\int_0^a \varrho dqr^5, \quad \int xzdm = -\frac{8l\pi}{15}\int_0^a \varrho dqr^5, \quad \int xydm = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Beachtet man nun, daß:

$$C - A = \frac{8\pi}{15}\int_0^a \varrho der^5, \tag{6}$$

ist, und setzt zur Abkürzung:

$$(7)\qquad \nu = \frac{\int_0^a \varrho\, d q r^5}{\int_0^a \varrho\, d e r^5},$$

so sind die 6 Trägheitsgrößen (5) der Figur (3) auch gegeben durch:

$$(8)\qquad \begin{matrix} A & A & C \\ -\nu m(C-A), & -\nu l(C-A), & 0. \end{matrix}$$

Bezeichnen jetzt p, q, $r \doteq \omega$ die Rotationsgeschwindigkeiten des alten Hauptachsensystemes, so wird selbstverständlich zu setzen sein:

$$(9)\qquad l = \frac{p}{\omega}, \quad m = \frac{q}{\omega},$$

und der Impulsvektor wird den Wert haben:

$$(10)\qquad \begin{aligned} J_x &= Ap + \nu l \omega (C-A) \\ J_y &= Aq + \nu m \omega (C-A) \\ J_z &= Cr. \end{aligned}$$

Nun wird die Konstanz des Impulses ausgedrückt durch:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{dJ_x}{dt} &= rJ_y - qJ_z \\ \frac{dJ_y}{dt} &= pJ_z - rJ_x \\ \frac{dJ_z}{dt} &= qJ_x - pJ_y, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen gehen jetzt, mit Hilfe von (9) und (10) einfach über in:

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\frac{dp}{dt} + \omega\varepsilon(1-\nu)q = 0 \\ &\frac{dq}{dt} - \omega\varepsilon(1-\nu)p = 0, \quad \varepsilon = \frac{C-A}{C} \\ &\frac{dr}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen entnimmt man sofort das Resultat, daß die Periode der freien Nutation gegeben ist durch:

$$(13)\qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega\varepsilon(1-\nu)}.$$

Beachtet man aber, daß für die starre Erde diese Periode:

$$(14)\qquad \tau_0 = \frac{2\pi}{\omega\varepsilon}$$

beträgt, so hat man also schließlich die Endformel:

$$\tau = \frac{\tau_0}{1 - \frac{\int_0^a \varrho\, d q r^5}{\int_0^a \varrho\, d e r^5}} \tag{15}$$

Um die beiden hier auftretenden Integrale auszuwerten, hat man sich noch die Formeln der Gleichgewichtstheorie der flüssigen Erde zu vergegenwärtigen. Man kann dieselben leicht dadurch erhalten, daß man in den Gleichungen von Nr. II einfach $c = 0$ setzt.

Bezeichnet man für diese Annahme den Wert von q wie schon vorhin mit e, so gilt zunächst die Gleichung:

$$\frac{d}{dr} r^6 \frac{de}{dr} = \frac{3\eta}{5} r^6 \left(r^2 \frac{d^2 e}{dr^2} + 10 r \frac{de}{dr} + 4e\right), \tag{16}$$

während die Grenzbedingung übergeht in:

$$e(0) = h + \frac{3}{5}\left(\frac{\bar{\varrho} \bar{e}}{\varrho_0} + 2\eta \int_0^a e r\, dr\right). \tag{17}$$

Setzt man jetzt:

$$\zeta = r\sqrt{\frac{6\eta}{5}}, \qquad \zeta_1 = a\sqrt{\frac{6\eta}{5}}, \tag{18}$$

so erhält man analog wie früher die für $\zeta = 0$ endliche Lösung von (16) in der Form:

$$e = N \sum_0^\infty {}_\nu \frac{(\nu + 1)(\nu + 2)}{(2\nu + 5)!} \alpha_\nu \zeta^{2\nu} = N \varphi(\zeta), \tag{18}$$

wo sich die α_ν aus der Rekursion bestimmen:

$$\alpha_\nu = (2\nu^2 + 5\nu - 5)\alpha_{\nu - 1}, \qquad \alpha_0 = 1, \tag{19}$$

und N aus der Grenzbedingung (17) zu berechnen ist. Diese wird aber hier:

$$\frac{1}{60} N = h + N\left(\frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0} \varphi(\zeta_1) + \int_0^{\zeta_1} \varphi(\zeta) \zeta\, d\zeta\right). \tag{20}$$

Schreibt man daher abkürzungsweise:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{60} - \frac{1}{2}\zeta^2 \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\nu + 2}{(2\nu + 5)!} \alpha_\nu \zeta^{2\nu}, \tag{21}$$

so wird:

$$e = \frac{h\varphi(\zeta)}{\varphi_1(\zeta_1) - \frac{3\bar{\varrho}}{5\varrho_0}\varphi(\zeta_1)}, \tag{22}$$

wo für $\varkappa_2 = \frac{\omega^2}{2}$ wieder $h = \left(1 - \frac{3\eta a^2}{5}\right)\frac{a\omega^2}{2g}$ ist.

Betreffs des Integrals $\int\limits_0^a \varrho\, d e r^5$ bemerke man nun, daß nach I (12) für $r = a$:

$$\bar{\varkappa}_2 = \frac{4\pi f}{5a^5}\int\limits_0^a \varrho\, d e r^5$$

wird, und daß andrerseits die Gleichung I (2b) für $r = a$, $c = 0$ übergeht in:

$$\bar{\varkappa}_2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{g}{a}\bar{e}.$$

Aus diesen beiden Beziehungen ergibt sich:

$$\int\limits_0^a \varrho\, d e r^5 = \frac{5ga^4}{4\pi f}\left(\bar{e} - \frac{a\omega^2}{2g}\right). \tag{23}$$

Da weiter: $\varepsilon = \frac{C-A}{C} = \frac{\int\limits_0^a \varrho\, d e r^5}{\int\limits_0^a \varrho\, d r^5}$ ist, so hat man auch:

$$\varepsilon = \frac{5}{3}\,\frac{1 - \frac{3}{5}\eta a^2}{1 - \frac{5}{7}\eta a^2}\left(\bar{e} - \frac{a\omega^2}{2g}\right). \tag{24}$$

Um die analoge Formel für das Integral $\int\limits_0^a \varrho\, d q r^5$ zu gewinnen, hat man wieder zu bemerken, daß für $r = a$ die beiden Gleichungen I (12) und (21), wo jetzt aber nicht mehr $c = 0$ ist, für $r = a$ übergehen in:

$$\bar{\varkappa}_2 = \frac{4\pi f}{5a^5}\int\limits_0^a \varrho\, d q r^5$$

und

$$\bar{\varkappa}_2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{g}{a}\bar{q} + \frac{\overline{Dq}}{12\varrho_0\eta},$$

woraus folgt:

$$\int\limits_0^a \varrho\, d q r^5 = \frac{5ga^4}{4\pi f}\left(\bar{q} - \frac{a\omega^2}{2g} + \frac{a\overline{Dq}}{12g\varrho_0\eta}\right). \tag{25}$$

Es läßt sich nun leicht übersehen, daß bei Einführung der drei neuen Funktionen:

$$\varphi_4(\xi) = \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\alpha_{\nu+2}\xi^{2\nu},$$

(26)
$$\psi_4(\xi) = \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\beta_{\nu+2}\xi^{2\nu},$$

$$\chi_4(\xi) = \sum_0^\infty \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(2\nu+5)!}\gamma_{\nu+2}\xi^{2\nu},$$

und Bildung der Determinante:

(27)
$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1), & \psi_1(\xi_1), & \chi_1(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_1), & \psi_2(\xi_1), & \chi_2(\xi_1) \\ \varphi_4(\xi_1), & \psi_4(\xi_1), & \chi_4(\xi_1) \end{vmatrix}$$

sich die Gleichung ergibt:

(28)
$$\frac{a\overline{D q}}{12 g \varrho_0 \eta} = \frac{\Delta_4}{\left(1 - \frac{3\eta a^2}{5}\right)\Delta_1}\bar{q}.$$

Durch Division von (23) und (25) folgt also:

(29)
$$\nu = \frac{\int_0^a \varrho\, d q r^5}{\int_0^a \varrho\, d e r^5} = \frac{\bar{q}\left[1 + \frac{\Delta_4}{(1 - \frac{3}{5}\eta a^2)\Delta_1}\right] - \frac{a\omega^2}{2g}}{\bar{e} - \frac{a\omega^2}{2g}}.$$

Für die *Periode der freien Nutation der elastischen Erde* ergibt sich daraus endlich:

(30)
$$\tau = \tau_0 \frac{\bar{e} - \frac{a\omega^2}{2g}}{\bar{e} - \bar{q}\left[1 + \frac{\Delta_4}{\left(1 - \frac{3\eta a^2}{5}\right)\Delta_1}\right]}.$$

Die Ausführung der numerischen Rechnung liefert jetzt unter Zugrundelegung der in III angegebenen Daten folgende Werte:

$$\xi_1 = 0{\cdot}9575,$$
$$\varphi(\xi_1) = 0{\cdot}02002,$$
$$\varphi_1(\xi_1) = 0{\cdot}008369,$$
$$h = 0{\cdot}0009303.$$

Dies gibt nach (22) und (24) die mit der Beobachtung sehr nahe überstimmenden Werte:
$$\bar{e} = \frac{1}{297{\cdot}1}. \qquad \varepsilon = \frac{1}{305{\cdot}8}.$$

Zur Bestimmung von Δ_4 hat man zunächst

$$\varphi_4(\xi_1) = 0{\cdot}0005272,$$
$$\psi_4(\xi_1) = -0{\cdot}008956,$$
$$\chi_4(\xi_1) = 0{\cdot}01395$$

und damit:

$$\Delta_4 = 0{\cdot}00007587.$$

Hiermit ergibt sich schließlich das Endresultat:

$$\tau_0 = 305{\cdot}3 \text{ Tage}, \quad \tau = 481{\cdot}0 \text{ Tage}. \tag{31}$$

Zum Vergleich mögen wieder die auf die homogene Erde bezüglichen Angaben hier Platz finden. Für dieselben hat man

$$\bar{e} = \varepsilon = \frac{5a\omega^2}{4g}, \qquad \bar{q} = \frac{5a\omega^2}{4g}\frac{1}{1+\frac{19c}{2g\varrho a}}, \tag{32}$$
$$\tau = \tau_0\frac{\bar{e}}{\bar{e}-\bar{q}} = \tau_0\left(1+\frac{2g\varrho a}{19c}\right).$$

Oder ausgerechnet:

$$\bar{e} = \varepsilon = \frac{1}{232{\cdot}9}, \qquad \bar{q} = \frac{1}{725{\cdot}4}, \tag{33}$$
$$\tau_0 = 232{\cdot}9 \text{ Tage}, \qquad \tau = 343{\cdot}0 \text{ Tage}.$$

Man bemerke, daß der Vergrößerungsfaktor für die Eulersche Periode im Falle der homogenen Erde 1·473, im Falle der inhomogenen Erde aber 1·575 beträgt. Würde man also in der inkonsequenten Weise von Hough die Eulersche Periode der nachgiebigen Erde vermittels des für die homogene Erde gültigen Vergrößerungsfaktors aus der für die inhomogene starre Erde gültigen berechnen, so erhielte man:

$$\tau = 449{\cdot}7 \text{ Tage},$$

was also um einen vollen Monat vom richtigen Wert verschieden ist.

V. Die Wiechertsche Hypothese über die Dichteverteilung im Erdinnern.

Es soll ferner noch jene Annahme über die Konstitution des Erdkörpers der Rechnung zugrunde gelegt werden, welche zuerst von E. Wiechert[1]) aufgestellt und ausführlich diskutiert worden ist. Nach derselben besteht der Erdkörper aus einem Metallkern der Dichte $\varrho_1 = 8{\cdot}206$ und einem darüber gelagerten Gesteinsmantel der ebenfalls konstanten Dichte $\varrho = 3{\cdot}2$. Der Radius $(= a_1)$ des Kernes beträgt

1) Göttinger Nachrichten 1897.

dabei etwa das [illegible] des ganzen Erdradius $= s$. Legt man nun außerdem noch Kern und Mantel die verschiedenen Elastizitätskonstanten c_1 bezw. c bei, so lassen sich die in I abgeleiteten allgemeinen Formeln auch leicht auf den Fall einer derartig zusammengesetzten Kugel anwenden.

Zunächst erhält man bei Einführung von

$$(1)\qquad \eta = \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho},$$

für die Größen $\varkappa_n(r)$ und $\Gamma(r)$ die Werte:

$$(2)\qquad \text{Kern}\begin{cases}\varkappa_n = \dfrac{4\pi f\varrho}{2n+1}\left[q_n(a) + \eta q_n(a_1)\right],\\ \Gamma(r) = 2\pi f\varrho\left[a^2 + \eta a_1^2 - \frac{1}{3}(1+\eta)r^2\right],\end{cases}$$

$$(3)\qquad \text{Mantel}\begin{cases}\varkappa_n = \dfrac{4\pi f\varrho}{2n+1}\left[q_n(a) + \eta\left(\dfrac{a_1}{r}\right)^{2n+1} q_n(a_1)\right],\\ \Gamma(r) = \dfrac{4\pi f\varrho}{3}\left[\dfrac{3}{2}a^2 + \eta\dfrac{a_1^3}{r} - \dfrac{1}{2}r^2\right].\end{cases}$$

Die Gleichung I (21) für $q_n(r)$ geht hier einfach über in:

$$(4)\qquad Dq_n = 0.$$

Da nun $q_n(r)$ für $r = 0$ notwendig endlich bleiben muß, so kann man für Kern und Mantel sofort die beiden Lösungen ansetzen:

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\text{Kern:} && q_n = Mr^2 + N,\\ &\text{Mantel:} && q_n = \frac{A}{r^{2n-1}} + \frac{B}{r^{2n+1}} + Cr^2 + D.\end{aligned}$$

Denselben entsprechen nach I (22) die folgenden Ausdrücke von $p_n(r)$:

$$(6)\qquad \begin{aligned}&\text{Kern:} && p_n = -2c_1\frac{2n+3}{n}M - \varrho_1(k_n + \varkappa_n),\\ &\text{Mantel:} && p_n = -2c\left[\frac{2n-1}{n+1}\frac{A}{r^{2n+1}} + \frac{2n+3}{n}C\right] - \varrho(k_n + \varkappa_n).\end{aligned}$$

Die in $q_n(r)$ noch willkürlichen Konstanten $A \ldots N$ bestimmen sich nun zum Teil aus den an der Oberfläche ebenso wie früher geltenden Grenzbedingungen, zum Teil aber aus den an der Berührungsfläche zwischen Mantel und Kern zu erfüllenden Stetigkeitsbedingungen. Offenbar wird man nämlich fordern müssen, daß: u, v, w, F, G, H[1]) an dieser Fläche stetig seien.

1) Bezüglich der veränderten Normalenrichtung ist das Gleiche wie in I. zu bemerken.

Beachtet man nun, daß die Gleichung dieser Trennungsfläche ist:

$$r = a_1 + \frac{1}{a_1}\sum_n q_n(a_1) K_n(x, y, z), \tag{7}$$

so wird man den Gleichungen (24) und (26) I zufolge diese Stetigkeitsbedingungen augenscheinlich auch dahin formulieren können, daß die vier Größen:

$$\left.\begin{array}{l} q_n(r), \qquad \dfrac{dq_n(r)}{dr} \\ c(r^2 q_n'' + 2nrq_n' + 2(n^2-1)q_n) \\ p_n - \dfrac{c}{(n+1)r^2}(r^2 q_n'' - 2nrq_n') + r\dfrac{\varrho}{\varrho'}\gamma q_n \end{array}\right\}\text{stetig für } r = a_1 \tag{8}$$

sein sollen. Die Grenzbedingungen an der Oberfläche sind dagegen unverändert wie früher:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 q_n'' + 2nrq_n' + 2(n^2-1)q_n = 0 \\ p_n - \dfrac{c}{(n+1)r^2}(r^2 q_n'' - 2rq_n') + r\dfrac{\varrho}{\varrho'}\gamma q_n = 0 \end{array}\right\}\text{für } r = a. \tag{9}$$

Hierdurch hat man aber gerade sechs Beziehungen zur Bestimmung der sechs Konstanten $A \ldots . N$ erhalten. Die weitere Ausführung möge wieder speziell bloß für den Fall $n = 2$ erfolgen und hierbei der Kürze halber statt $q_2(a)$, $q_2(a_1)$ einfach q bezw. q_1 geschrieben werden Ferner sollen g, g_1 die Beschleunigungen der Schwere an der Mantel- bezw. Kernoberfläche, ϱ_m die mittlere Dichte des Erdkörpers bezeichnen:

$$g = \frac{4\pi f\varrho a}{3}(1 + \eta\alpha^3), \quad g_1 = \frac{4\pi f\varrho a_1}{3}(1 + \eta), \quad \varrho_m = \varrho(1 + \eta\alpha^3) \tag{10}$$

und hierbei die Abkürzungen eingeführt werden:

$$\alpha = \frac{a_1}{a}, \qquad \delta = \frac{c_1}{c}, \qquad \sigma = \frac{c}{g\varrho a}, \qquad \lambda = \frac{\varrho}{\varrho_m}. \tag{11}$$

Trägt man jetzt die Werte (2), (3), (5) und (6) in die Gleichungen (8) und (9) ein, so kann man denselben, indem man sie untereinander passend verbindet, sehr leicht die Form geben:

$$q\left[\frac{4\pi f\varrho}{5}\right] - q_1\left[\frac{g_1}{a_1} + \frac{19c(\delta-1)}{5a_1^2\varrho\eta} - \frac{4\pi f\varrho\eta}{5}\right] - \frac{c}{a_1^2\varrho\eta}\left(\frac{8A}{a_1^3} + \frac{7B}{a_1^5}\right) + k_2 = 0,$$

$$q\left[\frac{g}{a} + \frac{19c}{5a^2\varrho} - \frac{4\pi f\varrho}{5}\right] - q_1\left[\frac{4\pi f\varrho\eta\alpha^5}{5}\right] - \frac{c}{\varrho a^2}\left(\frac{8A}{a^3} + \frac{7B}{a^5}\right) - k_2 = 0,$$

$$\begin{array}{ll} \dfrac{A}{a^3} + D = \frac{8}{5}q & \dfrac{A}{a_1^3} + D_1 + Ma_1^2\delta = \dfrac{8-3\delta}{5}q_1, \\ \dfrac{B}{a^5} + 6a^2 = -\frac{8}{5}q_1, & \dfrac{B}{a_1^5} + Ca_1^2 - Ma_1^2\delta = \frac{3}{5}(\delta-1)q_1, \end{array} \tag{12}$$

$$3\frac{A}{a_1^5} + 5\frac{B}{a_1^7} = 2(C - M).$$

Drückt man vermöge der letzten fünf Gleichungen A und B durch q, q_1 aus und führt die gewonnenen Werte in die beiden ersten Gleichungen ein, so erhält man zur Berechnung von q, q_1 die beiden Relationen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} H_1 q - H_2 q_1 + \frac{a k_2}{g} &= 0, \\ H_3 q - H_4 q_1 - \frac{a k_2}{g} &= 0. \end{aligned}$$

$$(14)\qquad \begin{aligned} H_1 &= \tfrac{3}{5}\lambda + \frac{\sigma}{5\eta\alpha^2}\,\frac{35(8-3\alpha^2)-2(64-21\alpha^2+21\alpha^5-64\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}{4-7\alpha^5+3\alpha^7-2(1-\alpha^5)(1-\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}, \\ H_2 &= (1+\tfrac{2}{5}\eta)\lambda + \frac{\sigma}{5\eta\alpha^2}\left[19(\delta-1)+\frac{175-2(43+21\alpha^5-64\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}{4-7\alpha^5+3\alpha^7-2(1-\alpha^5)(1-\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}\right], \\ H_3 &= 1-\tfrac{3}{5}\lambda + \frac{\sigma}{5}\left[19+\alpha^5\,\frac{7(8-3\alpha^2)^2-2(64-21\alpha^4-43\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}{4-7\alpha^5+3\alpha^7-2(1-\alpha^5)(1-\alpha^7)\frac{\delta-1}{\delta}}\right], \\ H_4 &= H_1\cdot\eta\alpha^5. \end{aligned}$$

Legt man jetzt die oben angeführten Wiechertschen Zahlenangaben der Rechnung zugrunde und setzt ferner die Elastizitätskoeffizienten von Kern und Mantel als gleich voraus, so erhält man:

$$(15)\qquad \begin{aligned} q &= \frac{a k_2}{g}\cdot\frac{1{\cdot}089+47{\cdot}5\sigma}{0{\cdot}558+31{\cdot}4\sigma+116\sigma^2}, \\ q_1 &= \frac{a k_2}{g}\cdot\frac{1+62{\cdot}5\sigma}{0{\cdot}558+31{\cdot}4\sigma+116\sigma^2}. \end{aligned}$$

Sind dann weiter e und e_1 diejenigen Werte, in welche q bezw. q_1 für $\sigma = 0$ übergehen, so ist nach IV (15) das Vergrößerungsverhältnis der Eulerschen Periode:

$$(16)\qquad \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{1-\dfrac{q+\eta\alpha^5 q_1}{e+\eta\alpha^5 e_1}}$$

oder gemäß den obigen Werten:

$$(17)\qquad \frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{1+49{\cdot}2\sigma}{(7{\cdot}19+208{\cdot}4\sigma)\sigma}.$$

Für die im Falle des Rocheschen Gesetzes angenommene Elastizitätskonstante des Stahls ($c = 7{\cdot}65.10^{11}$) erhält man:

$$(18)\qquad \frac{\tau}{\tau_0} = 1{\cdot}59,$$

was von dem in jenem Falle gefundenen Werte 1·57 nur wenig abweicht.

Um die beobachtete Chandlersche Periode zu erhalten, müßte $\frac{\tau}{\tau_0} = 1{\cdot}39$ werden, was für $c = 11{\cdot}68.10^{11}$ der Fall ist. Würde dagegen die Erde homogen angenommen, so erforderte dies nach IV (32) die Elastizitätskonstante $c = 9{\cdot}19.10^{11}$.

Göttingen, November 1904.

Über kinematische Erzeugung von Regelflächen 4. Ordnung.

Von E. WEINNOLDT in Kiel.

Die Regelflächen 4. Ordnung sind von Chasles[1]), Cayley[1]), Schwarz[1]), Cremona[1]), Rohn[2]) und Holgate[3]) klassifiziert und behandelt worden. Von Burmester[4]) und Blake[5]) sind einfache Bewegungsmechanismen ebener Bewegungen besprochen worden, bei welchen eine Gerade eine Regelfläche 4. Ordnung erzeugte. Burmester hat die dem Ellipsographen entsprechende Bewegung benutzt, Blake hat außerdem die umgekehrte Bewegung, welche Kreiskonchoiden als Punktbahnkurven hat, behandelt, und dann den Fall, daß die Polkurven diejenigen des Antiparallelogramms sind. Die von ihm und auch hier angewandte Methode ist die, daß man eine Ebene σ sich in einer festen Ebene σ' bewegen läßt und die Fläche untersucht, welche von einer Geraden l_1 beschrieben wird, die mit σ fest verbunden ist. Die Eigenschaften der entstandenen Regelfläche werden aus denjenigen ihrer zu σ parallelen Schnittfiguren hergeleitet, die als Bahnkurveu der Projektionen P die einzelnen Punkte P_1 der Erzeugenden l_1 auf σ betrachtet werden. Aus den Gleichungen von l_1 in dem mit σ fest verbundenen Koordinatensystem ξ, η, ζ

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi &= m\zeta + n \\ \eta &= m_1\zeta + n_1 \end{aligned}$$

---

1) Salmon Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. II. Teil, 3. Aufl., S. XIV. 169.

2) Rohn, Die verschiedenen Arten der Regelflächen 4. Ordnung. Math. Annalen, 28. Bd., 1887.

3) Holgate, On certain ruled surfaces of the fourth Order. American Journal of Mathematics, 15. Bd. 1893 u. 22. Bd. 1900.

4) Burmester, Kinematische Flächenerzeugung vermittels zylindrischer Rollung. Diese Zeitschr. 23. Jahrg. 1888.

5) Blake, Upon the Ruled Surfaces generated by the plane movement etc. A. J. of M. 21. Bd. 1899 und 22. Bd. 1900.

und aus der Gleichung der Bahnkurve eines Punktes P_1 in dem mit σ' verbundenen Koordinatensystem x, y, z:

$$(2) \qquad \varphi(x, y, \xi, \eta) = 0$$

ergibt sich die Gleichung der Regelfläche durch Elimination von ξ, η aus (1) und (2) und aus der Beziehung $\zeta = z$. Die Doppelpunkte der Bahnkurven der Projektionen aller Punkte P_1 von l_1 ergeben die Doppellinien der Fläche. Ob dieselben isoliert verlaufen oder auf der Fläche liegen, erkennt man aus der Natur der Doppelpunkte als Knotenpunkte oder isolierte Doppelpunkte. Aus dem Satze daß die Punkte der beweglichen Polkurven p im allgemeinen Bahnkurven mit Spitzen ergeben, schließt man auf die Zwickpunkte der Regelflächen, d. h. auf die Punkte der Doppelkurve, in welchen die beiden in den übrigen Punkten der Doppelkurve getrennt liegenden beiden Tangentialebenen zusammengefallen sind. Wie viele Zwickpunkte vorhanden sind, ob zwei oder mehrere von ihnen zusammenfallen, ergibt sich aus der Zahl und der Natur der Schnittpunkte, welche die Projektion l der Erzeugenden l_1 auf σ mit der Polkurve p hervorbringt.

Die von Burmester und Blake genommenen Mechanismen ergaben nur verhältnismäßig wenige Arten von Regelflächen 4. Ordnung. Ich habe mir vorgenommen, mit einer allgemeineren Bewegung den großen Formenreichtum dieser Flächen zur Anschauung zu bringen und dadurch, daß ich Polkurven von höherer als der 2. Ordnung benutzte, Flächen mit einer Doppelkurve und 4 Zwickpunkten zu erzeugen. Die Bewegungsmechanismen, bei denen die Bahnkurven von der 4. Ordnung sind, geben jedoch im allgemeinen zu Regelflächen höherer Ordnung Veranlassung. Von allen Mechanismen, die Dingeldey[1]) untersucht hat, geben außer den erwähnten, von Burmester und Blake verwendeten Bewegungen, die ja Spezialfälle des Kurbelgetriebes sind, nur noch zwei andere Bewegungen, die auch Spezialfälle des allgemeinen Kurbelgetriebes sind, Regelflächen 4. Ordnung. Dies sind:

1. Das gleichschenklige Doppelkurbelgetriebe bezw. seine Umkehrung das gleichschenklige Schwingkurbelgetriebe und

2. Die allgemeine Konchoidenbewegung, hervorgebracht durch das Schleifschiebergetriebe oder die doppeltgeschränkte Winkelschleifenkette. Da diese beiden ebenen Bewegungen inbezug auf ihre Bahnkurven und deren Doppelpunkte ziemlich vollständig bekannt sind, so genügt es, die Ergebnisse der Untersuchungen früherer Autoren zusammenzustellen und ihnen einige wenige Ergänzungen hinzuzufügen,

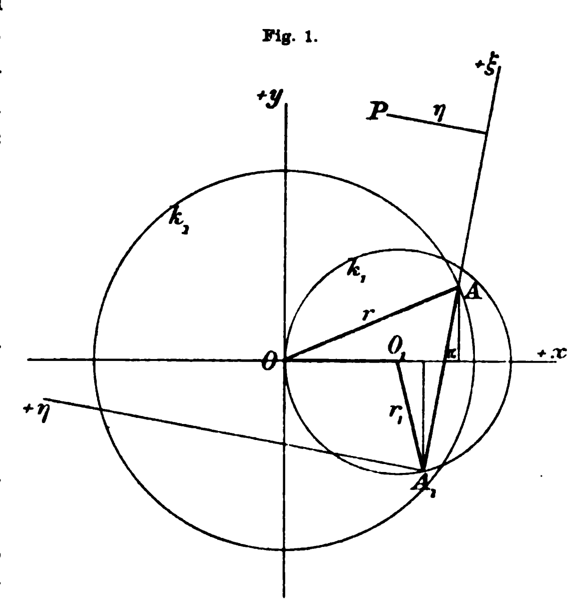
1) Dingeldey, Über die Erzeugung der Kurven 4. Ordnung durch Bewegungsmechanismen. Leipzig, 1885.

um Aufschluß über die Art der mit diesen Getrieben erzeugbaren Regelflächen zu erhalten.

Es zeigt sich, daß man mit ihnen von drei Hauptklassen der Regelflächen 4. Ordnung Beispiele erzeugen kann, und daß nur Regelflächen mit einer dreifachen Geraden nicht darstellbar sind. Die drei anderen Hauptklassen kommen aber in ihren verschiedenen Unterarten ziemlich vollständig zur Anschauung.

§ 1. *Das gleichschenklige Doppelkurbelgetriebe*[1]) (Fig. 1) ist der besondre Fall des Kurbelgetriebes, bei welchem die Stäbe OA und AA_1, bezw. OO_1 und O_1A_1 einander gleich sind und daher der vom Punkte A_1 um O_1 mit dem Radius r_1 beschriebene Kreis k_1 durch den Mittelpunkt O des vom Punkte A durchlaufenen Kreises k vom Radius r geht. OO_1 sehen wir als festen Stab an und verbinden mit ihm die Ebene σ und das Koordinatensystem xyz, und zwar den Anfangspunkt in O und die $+x$-Achse nach O_1 gerichtet. Das Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ bringen wir so an dem Stabe AA_1 an, daß A_1 der Nullpunkt ist und A_1A die Richtung der $+\xi$-Achse ist; die $+\eta$- und $+\zeta$-Achse werden so gelegt, daß sie, wenn die $+\xi$-Achse und die $+x$-Achse zusammenfallen, in die Richtung der $+y$ und $+z$-Achse zeigen. Für eine Phase der Bewegung, in der die $+\xi$-Achse mit der $+x$-Achse den Winkel α bildet und die Punkte A und A_1 die Koordinaten u, v bezw. u_1, v_1 im festen Koordinatensystem haben, gelten für einen Punkt P die Transformationsgleichungen:

Fig. 1.



$$x = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha + u_1$$
$$y = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha + v_1$$
$$x = (\xi - r)\cos\alpha - \eta\sin\alpha + u$$
$$y = (\xi - r)\sin\alpha + \eta\cos\alpha + v$$

1) Roberts, On the pedals of conic sections. Proceedings of the London Mathematical Society Bd. 3, 1871. S. 88.

und die Kreisgleichungen:

$$(u_1 - r_1)^2 + v_1^2 = r_1^2$$
$$u^2 + v^2 = r^2,$$

aus denen durch Elimination von u_1, v_1, u, v und dann von α unter Abspaltung des Kreises $x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$ die *Gleichung der Bahnkurve* eines Punktes P:

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\{r(x^2 + y^2) + r_1(\xi x + \eta y) - 2rr_1 x\}^2 \\ &- \{r_1(\xi^2 + \eta^2) + r(\xi x + \eta y) - 2rr_1\xi\}^2 - (r^2 - r_1^2)(\eta x - \xi y)^2 = 0\end{aligned}$$

folgt. Eliminiert man hieraus und aus den Gleichungen (2) der Geraden l_1, die mit dem Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ fest verbunden bewegt wird, ξ und η und setzt $\zeta = z$, so erhält man die von der Geraden l_1 beschriebene *Regelfläche.* Man erkennt, daß sie in der Tat von *der 4. Ordnung ist.* Je nachdem r größer oder kleiner als r_1 ist, werden die erzeugten Bahnkurven und Regelflächen verschieden voneinander sein. Beide Fälle können aber mit demselben Mechanismus erzeugt werden, wenn man im zweiten Fall l_1 mit OO_1 in feste Verbindung bringt, AA_1 festhält, dagegen OO_1 bewegt, da die Gleichung (3) inbezug auf (ξ, η) und (x, y) ganz gleichartig gebaut ist, nur daß r und r_1 gegeneinander vertauscht sind.

§ 2. Die *Polkurven* der Bewegung sind *Paskalsche Schnecken.*[1]) Die bewegliche Polkurve p hat in Polarkoordinaten R und φ die Gleichung:

$$(4)\qquad R = \frac{2rr_1}{r^2 - r_1^2}(r - r_1 \cos\varphi),$$

die feste Polkurve p' dagegen:

$$(5)\qquad R = \frac{2rr_1}{r^2 - r_1^2}(-r_1 + r\cos\varphi).$$

Dabei ist A_1 bezüglich O der Nullpunkt der Polarkoordinaten, und die $+\xi$ bezw. $+x$-Achse die Polarachse. Wenn $r > r_1$ hat p' einen Knotenpunkt, dagegen p einen isolierten Doppelpunkt; wenn $r < r_1$ ist, findet das Umgekehrte statt. Wenn AA_1 in die Richtung von OO_1 fällt, berühren sich die Polkurven mit den Scheitelpunkten H und H', bezüglich K und K' ihrer Symmetrieachsen. In Figur 2 sind für $r = 5$, $r_1 = 3$ die beiden Polkurven für die Phase gezeichnet, daß die $+\xi$-Achse in die Richtung der $-x$-Achse zeigt; dasselbe ist in Figur 3 für $r = 3$ und $r_1 = 5$ dargestellt. Wenn in Figur 2 p einmal an p'

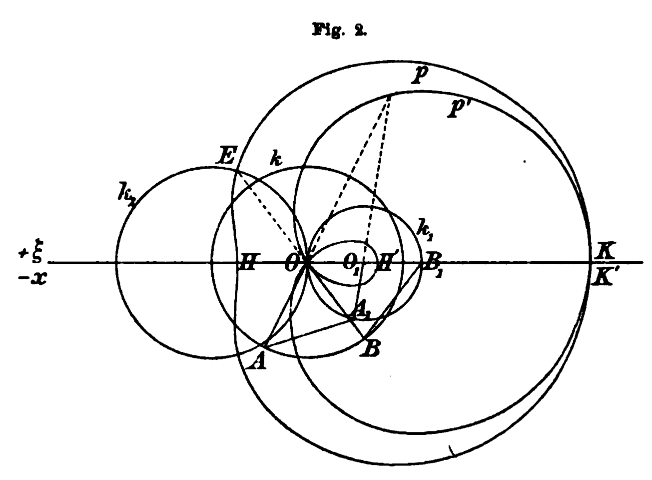
1) Cayley, On the mechanical description of a nodal bicircular quartic. L. M. Society Proc., 3. Bd. 1871, p. 101.

abgerollt ist, hat A den Kreis k einmal, dagegen A_1 den Kreis k_1 zweimal durchlaufen. In Figur 3 durchläuft A_1 nur einen Teil von k_1 zweimal. Er kehrt um, wenn A_1 bis zu einem Punkt E gelangt ist, so daß OA und AA_1 eine Gerade OGE bilden. In dieser Lage ist E der momentane Drehungspol, in ihm wird p' von p mit dem Knotenpunkte A_1 berührt. Ferner folgt noch aus

$$\cos EOO_1 = \frac{r}{r_1},$$

daß die Linie OE die Polkurve p in der gezeichneten Phase berührt.

Fig. 2.

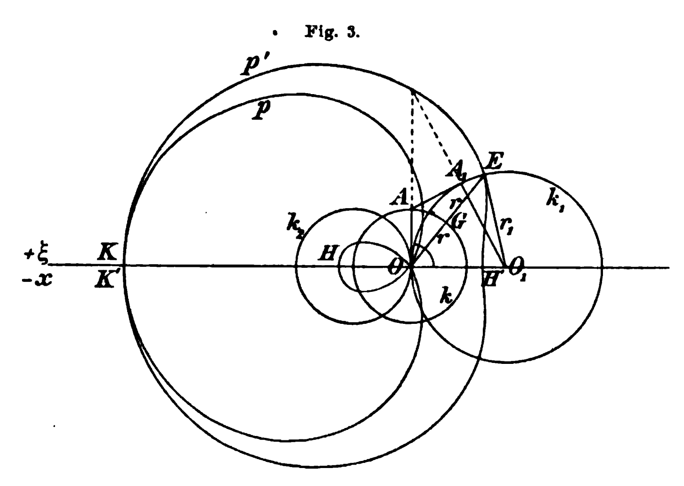


Wenn $r > r_1$ ist, können die Stäbe OO_1 und O_1A_1 eine Gerade bilden. Dies tritt ein, wenn A_1 in B_1 auf der Verlängerung von OO_1 liegt. Dann ist der Knotenpunkt O von p der momentane Drehungspunkt. Wegen der Beziehung

$$\cos BOB_1 = \frac{r_1}{r}$$

ist OB die Tangente von p' in O und der Schnittpunkt E von p mit der Verlängerung von BO über O hinaus der Punkt, mit dem p die Kurve p' in O berührt. Die Punkte E sind auch die Schnittpunkte von p mit dem Kreise k_2, der mit dem Radius r um den auf der $+\xi$-Achse gelegenen Punkt von k geschlagen ist.

Fig. 3.



§ 3. Die Bahnkurve (2) hat die Kreispunkte zu *Doppelpunkten* und außerdem den *Doppelpunkt* P' im Endlichen, dessen Koordinaten sich mit Hilfe der ersten Differentialquotienten von (2) aus den Gleichungen:

$$r(x^2+y^2)+r_1(\xi x+\eta y)-2rr_1x=0$$
$$r_1(\xi^2+\eta^2)+r(\xi x+\eta y)-2rr_1\xi=0$$
$$\eta x-\xi y=0$$

zu

$$(4)\qquad \begin{cases} x=-\dfrac{r_1\xi}{r}\dfrac{\xi^2+\eta^2-2r\xi}{\xi^2+\eta^2}\,[1] \\ y=-\dfrac{r_1\eta}{r}\dfrac{\xi^2+\eta^2-2r\xi}{\xi^2+\eta^2} \end{cases}$$

ergeben. Die Koordinaten xy des Systempunktes P ergeben sich andrerseits aus denjenigen seines Doppelpunktes P' durch die Beziehungen:

$$(4a)\qquad \begin{cases} \xi=-\dfrac{rx}{r_1}\dfrac{x^2+y^2-2r_1x}{x^2+y^2} \\ \eta=-\dfrac{ry}{r_1}\dfrac{x^2+y^2-2r_1x}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Aus den zweiten Differentialquotienten der Gleichung (2) erkennt man, daß solche Punkte P, welche innerhalb der beweglichen Polkurve p liegen, Kurven mit Knotenpunkten erzeugen, daß dagegen Punkte, welche außerhalb p oder für $r_1>r$ auch innerhalb der kleinen Schleife von p sich befinden, Kurven mit isoliertem Doppelpunkt beschreiben. Die Punkte der Polkurve p selbst dagegen geben Kurven mit Rückkehrpunkt.

Die Punkte P der bewegten Ebene σ stehen nach den Gleichungen (4) und (4a) mit den Doppelpunkten P' ihrer Bahnen in σ' in einer *ein-eindeutigen Verwandtschaft*[2]), mit der Ausnahme, daß dem Punkte $A_1(\xi=0,\ \eta=0)$ der Koppel AA_1 alle Punkte des Bahnkreises k_1 als Doppelpunkte entsprechen, während dem Punkte $O(x=0,\ y=0)$ des Steges OO_1 alle Punkte des Kreises k_2

$$\xi^2+\eta^2-2r\xi=0$$

als erzeugende Punkte zugeordnet sind. k_2 ist die Bahn, welche O bei der umgekehrten Bewegung beschreibt.

Aus der Beziehung

$$(5)\qquad \frac{y}{x}=\frac{\eta}{\xi}$$

folgt, daß Geraden durch A_1 Gerade durch O entsprechen. In den Durchschlagslagen (Figur 2 und 3) liegen daher erzeugender Punkt P und Doppelpunkt P' auf derselben Geraden durch O, im besonderen

1) A. a. O. S. 102.

2) R. Müller, Über die Doppelpunkte der Koppelkurve. Diese Zeitschrift, 36. Jahrg. 1891 S. 65.

jeder Punkt von p' mit dem Punkt von p, mit dem er im Lauf der Bewegung von p berührt wird.

Da ferner für alle Punkte der Geraden $\eta = m\xi$:

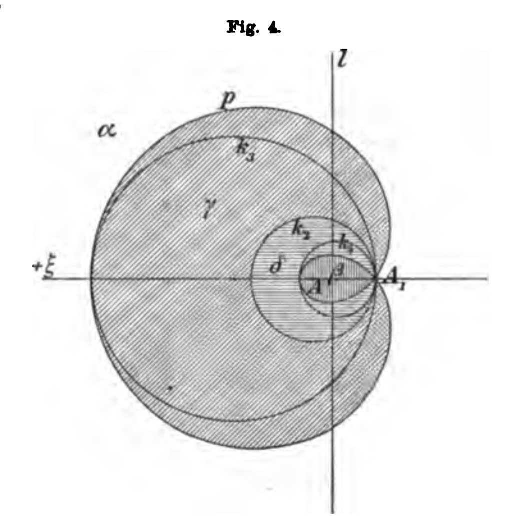
$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{r_1}{r}\xi + \frac{2r_1}{1+m^2} \\
y &= -\frac{r_1}{r}\eta + \frac{2r_1 m}{1+m^2} \qquad (5a) \\
\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{r_1}{r}\sqrt{\xi^2+\eta^2} - \frac{2r_1}{\sqrt{1+m^2}}
\end{aligned}
$$

ist, so muß, wenn P eine Geraden durch A_1 durchläuft, P' eine *ähnliche Punktreihe* auf einer Geraden durch O beschreiben. Wenn daher die Projektion l auf σ der Geraden l_1, welche unsere Regelfläche erzeugt, durch A_1 hindurch geht, so müssen die Doppelpunkte der Bahnkurven der einzelnen Punkte von l_1 eine Doppelgerade bilden.

Bei der durch die Gleichungen (4) und (4a) vermittelten eindeutigen Beziehungen zwischen σ und σ' ist das Gebiet α außerhalb p und außerhalb k_2 auf das Gebiet α' außerhalb p' und außerhalb k_1 abgebildet, ebenso das Gebiet β außerhalb p und innerhalb k_2 auf β' außerhalb p' und innerhalb k_1, γ innerhalb p und außerhalb k_2 auf γ' innerhalb p' und außerhalb k_1, und endlich das Gebiet δ innerhalb p und innerhalb k_2 auf das Gebiet δ' innerhalb p' und innerhalb k_1.

Dabei wird unter dem Gebiet außerhalb p oder außerhalb p' bei einer Polkurve mit Schleife auch das Gebiet innerhalb der Schleife verstanden. (Figur 4 und 5.)

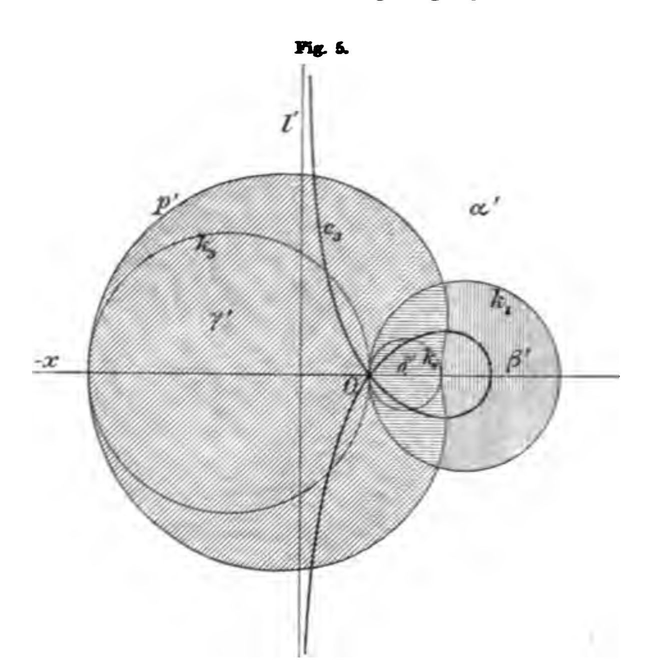
Fig. 4.



§ 4. Es soll jetzt noch der geometrische Ort der Doppelpunkte derjenigen Bahnkurven bestimmt werden, welche von einer *beliebigen* in σ liegenden *Geraden* l herrühren. Indem man aus der Gleichung der Geraden l und den Gleichungen (4) und (4a) ξ und η eliminiert, findet man eine Kurve 3. Ordnung c_3, die, wenn l durch A_1 geht, in den Kreis k_1 und eine Gerade durch O zerfällt. Auf Grund der Gleichungen (5) und (5a) kann die c_3 folgendermaßen konstruiert werden (Figur 4 und 5). Man zieht in σ' eine Gerade l' ebenso gegen die $+x$-Achse geneigt wie l in σ gegen die $+\xi$-Achse, aber in einem Abstande von O, der im

Verhältnis $\frac{r_1}{r}$ gegen den Abstand der Geraden l von A_1 verkleinert oder vergrößert ist. Durch O zieht man Leitstrahlen nach l' und verlängert oder verkürzt jeden Leitstrahl um das Stück desselben, welches innerhalb des Kreises k_1 liegt, je nachdem es auf den Leitstrahl selbst oder auf seine Verlängerung über O hinausfällt. Die neuen Endpunkte des Leitstrahls sind die Punkte der c_3. l' ist ihre einzige Asymptote, O ihr Doppelpunkt. Er ist ein Knotenpunkt, ein isolierter Doppelpunkt oder ein Rückkehrpunkt, je nachdem l den Kreis k_2 in reellen oder imaginären Punkten schneidet oder in einem Punkte berührt.

Fig. 5.



Mit Hilfe der in § 4 gegebenen Aufzählung der einander in σ und σ' zugeordneten Gebietsteile ist es leicht aus der Lage von l gegen p und k_2 den Verlauf von c_3 gegen p' zu übersehen. In Figur 4 und 5 ist eine Gerade l senkrecht zur ξ-Achse und die entsprechende c_3 zur Anschauung gebracht.

§ 5. Herr R. Müller[1]) hat gezeigt, daß diejenigen Punkte P', welche in einer bestimmten Phase der Bewegung mit ihrem Doppelpunkte zusammenfallen, eine gewisse Fokalkurve 3. Ordnung ausfüllen. In den beiden Totpunktlagen, in denen AA_1 in der Geraden OO_1 liegt, zerfällt die Kurve 3. Ordnung in eine Gerade und je einen Kreis, von denen für unsre Bewegung nur die Kreise in Betracht kommen.

Wenn man die Gebiete σ und σ' so übereinander zeichnet, wie es den beiden Totpunktlagen entspricht, so daß A_1 in O liegt und die $+\xi$-Achse in die Richtung der $+x$-Achse, oder in der andren Lage in die Richtung der $-x$-Achse zeigt, erhält man die Punkte P, welche mit ihren Doppelpunkten P' zusammenfallen, aus den Gleichungen (4),

1) A. a. O. S. 66.

indem man $x = +\xi$, $y = +\eta$ bezw. $x = -\xi$, $y = -\eta$ setzt. Es ergeben sich in der Tat die beiden Kreise k_3 und k_4 von den Gleichungen:

$$\left(\xi + \frac{rr_1}{r \pm r_1}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{rr_1}{r \pm r_1}\right)^2.$$

Beide gehen durch A_1; der eine berührt p in dem einen Endpunkt der Symmetrieachse, der andre in dem andren Endpunkt.

In den Figuren 4 und 5 sind die beiden Kreise eingezeichnet. l trifft k_3 zweimal im Gebiete γ; daher wird l die c_3 in der einen Totpunktlage ebenfalls zweimal und zwar im Gebiet γ' schneiden, und zwar kann man von dem einen Schnittpunkt zum anderen durch stetiges Fortschreiten auf der c_3 nur gelangen, indem man isolierte Knotenpunkte trifft.

§ 6. Wir gehen nunmehr zur näheren Betrachtung der *Regelflächen 4. Ordnung* über, welche nach § 1 von einer Geraden l_1, die mit σ fest verbunden ist, erzeugt wird. Die Fälle, daß l_1 senkrecht oder parallel zu σ ist, schließen wir aus. Dagegen setzen wir, ohne daß dadurch die Allgemeinheit beschränkt wird, voraus, daß der kürzeste Abstand der Geraden l_1 und der ζ-Achse in der Ebene σ liegt. Die Regelfläche gehört einem inbezug auf die Beschaffenheit ihrer Doppelkurve wesentlich verschiedenen Typus an, je nachdem l_1 durch den Punkt A_1 geht oder nicht.

Wenn nämlich die Gerade l_1 den Punkt A_1 enthält, beschreibt A_1 den Kreis k_1 ganz oder zum Teil doppelt, ferner liegen nach § 3 S. 305 die Doppelpunkte der Bahnkurven der einzelnen Punkte von l_1 auf einer Geraden d_1. Unsere Fläche hat also einen *Doppelkreis* k_1 und eine *Doppelgerade* d_1. Beide schneiden sich in einem Punkte S, den man erhält als Schnittpunkt des Kreises k_1 und einer Geraden, die durch O in σ' ebenso gegen die $+x$-Achse liegt, wie die Projektion l von l_1 in σ gegen die $+\xi$-Achse. Wenn l mit der $+\eta$-Achse zusammenfällt, liegt S in O; wenn l im Falle $r_1 > r$ p in A_1 berührt, ist S nach S. 303 der eine Schnittpunkt E von k_1 und p'. Nach der allgemeinen Theorie der Regelflächen 4. Ordnung mit Doppelgeraden und Doppelkegelschnitt können sowohl auf dem Doppelkreise als auch auf der Doppelgeraden zwei Zwickpunkte vorkommen. Sie sind auf dem Kreise imaginär, wenn $r_1 < r$ ist, da ja der Punkt d_1 den Kreis k_1 zweimal vollständig durchläuft, der Kreis k_1 daher ganz auf der Fläche liegt. Ist dagegen $r_1 > r$, so sind die Zwickpunkte auf k_1 reell; sie sind die Punkte E, in welchen der Punkt A_1 in seiner Bewegung umkehrt, also k_1 die feste Polkurve p' trifft. Derjenige Teil von k_1, welcher den Punkt O enthält, verläuft reell auf der Fläche, der andere liegt isoliert.

Die Zwickpunkte der Doppelgeraden d_1 werden von solchen Punkten von l_1 erzeugt, deren Projektionen auf σ Rückkehrpunkte hervorbringen, also auf p liegen. Da nun l die bewegliche Polkurve p außer in A_1 nur noch in zwei Punkten und immer in zwei Punkten schneidet, so hat die Doppelgerade d_1 stets zwei Zwickpunkte. Derjenige Teil von d_1, welcher von Punkten herrührt, deren Projektion innerhalb p, d. h. innerhalb der Gebiete γ und δ von σ liegen, ist eine wirkliche Durchschnittslinie der Fläche; der übrige Teil von d_1 dagegen liegt isoliert. Es fragt sich noch, auf welchem der beiden Teile von d_1 der Schnittpunkt S von Doppelgerade und Doppelkreis liegt. Wenn $r_1 < r$ ist, liegt S stets auf der Fläche, da ja sein erzeugender Punkt A_1 und die seiner Nachbarpunkte innerhalb p fallen.

Wenn dagegen $r_1 > r$ ist, befindet sich S nur dann auf der Fläche selbst, falls l die kleine Schleife von p nicht durchsetzt, da der erzeugende Punkt A_1 nur in diesem Falle den Übergang zwischen Punkten bildet, die zu den Gebieten γ und δ von σ gehören. Geht aber l durch die Schleife, so erzeugen die beiderseitigen Nachbarpunkte von A_1 isolierte Doppelpunkte, S bildet daher einen Punkt des außerhalb der Fläche liegenden Teils von d_1.

Der eine Sonderfall, welcher bei Regelflächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt und Doppelgeraden in bezug auf die Zwickpunkte vorkommen kann, ist der, daß je ein Zwickpunkt der Geraden und des Kegelschnittes in den Durchschnittspunkt S beider hineinrückt. Er wird bei unserem Mechanismus hervorgebracht, wenn $r_1 > r$ ist und l_1 so gelegt wird, daß ihre Projektion l die Polkurve p in A_1 berührt. Der dem Punkte A_1 entsprechende Doppelpunkt ist dann selbst ein Zwickpunkt; er fällt nach S. 303 und 307 in der Tat mit dem einen Zwickpunkt E von k_2 zusammen.

Der andere Sonderfall, daß die beiden Zwickpunkte der Geraden zusammenrücken und die Doppelgerade zugleich eine Erzeugende ist, kann hier nicht eintreten. Ich erwähne, daß nach Rohn[1]) eine solche Fläche in zwei Flächen 2. Grades zerfallen müßte[1]), ein Ergebnis, welches mit Salmon[2]) und Blake[3]) nicht übereinstimmt.

§ 7. In den Figuren 6a, b und 7a, b sind die beiden einzigen durch unser Getriebe herstellbaren Regelflächen des behandelten Typs, die eine Symmetrieebene haben, dargestellt. Sie entstehen, wenn die

---

1) A. a. O. S. 306.

2) Salmon Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes 2. Teil, 3. Aufl. 1880. S. 440.

3) A. J. of M S. 266.

Gerade l mit der ξ-Achse zusammenfällt. Die Gleichungen von l_1 sind dann

$$\eta = 0$$
$$\xi = sz,$$

wenn s die Kotangente des Winkels ist, die l_1 mit der ξ-Achse bildet. Die Regelfläche hat die Gleichung:

$$\{r(x^2 + y^2) + r_1 sxz - 2rr_1 x\}^2 - \{r_1 s^2 z^2 + rsxz - 2rr_1 sz\}^2 - (r^2 - r_1^2)s^2 z^2 y^2 = 0.$$

Die Symmetrieebene xz schneidet die Fläche in:

$$(rx^2 + r_1 sxz - 2rr_1 x)^2 - s^2 z^2 (r_1 sz + rx - 2rr_1)^2 = 0$$

oder:

$$(x^2 - s^2 z^2)(rx + r_1 sz - 2rr_1)^2 = 0,$$

d. h. in den beiden Erzeugenden l_1 und l_2:

$$x = \pm sz$$

und in der Doppelgeraden d_1:

$$z = -\frac{r}{r_1 s}(x - 2r_1).$$

Wenn $r_1 < r$ ist, schneidet die Doppelgerade d_1 den Doppelkreis k_1 im Punkte S ($x = 2r_1$, $y = 0$), der reell auf der Fläche liegt. Im Falle $r_1 > r$ ist S außerhalb der Fläche.

Der scheinbare Umriß der Fläche in der xz-Ebene ist der Schnitt dieser Ebene mit dem berührenden Zylinder der Fläche, dessen Achse parallel der y-Achse geht. Seine Gleichung ergibt sich durch Elimination aus der Flächengleichung und der Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, d. i.:

$$4ry\{r(x^2 + y^2) + r_1 sxz - 2rr_1 x\} - 2y(r^2 - r_1^2)s^2 z^2 = 0.$$

Diese Bedingung zerfällt in $y = 0$, welche Gleichung mit der Flächengleichung auf die Geraden l_1, l_2 und d_1 führt, und in:

$$y^2 = -x^2 - \frac{r_1}{r} sxz + 2r_1 x + \frac{r^2 - r_1^2}{2r^2} s^2 z^2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von y:

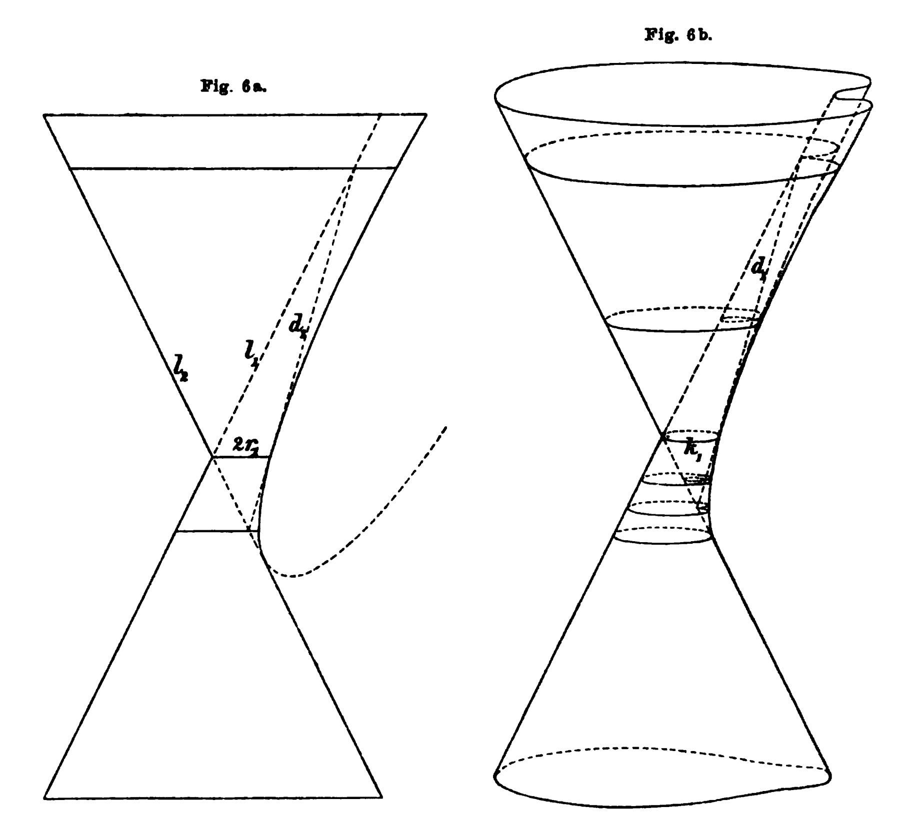
$$s^2 z^2 \left\{ \frac{(r^2 + r_1^2)^2}{4r^2} s^2 z^2 + r_1^2 x^2 + \frac{r^2 + r_1^2}{r} r_1 sxz - 2r_1(r^2 + r_1^2)x - 4rr_1^2 sz + 4r^2 r_1^2 \right\} = 0,$$

d. i. die Doppelebene $z=0$ und ein parabolischer Zylinder. Die xz-Ebene schneidet den Zylinder in einer Parabel von derselben Gleichung, welche die x-Achse in den Punkten:

$$x_1 = \frac{2r^2}{r_1} \text{ und } x_2 = 2r_1$$

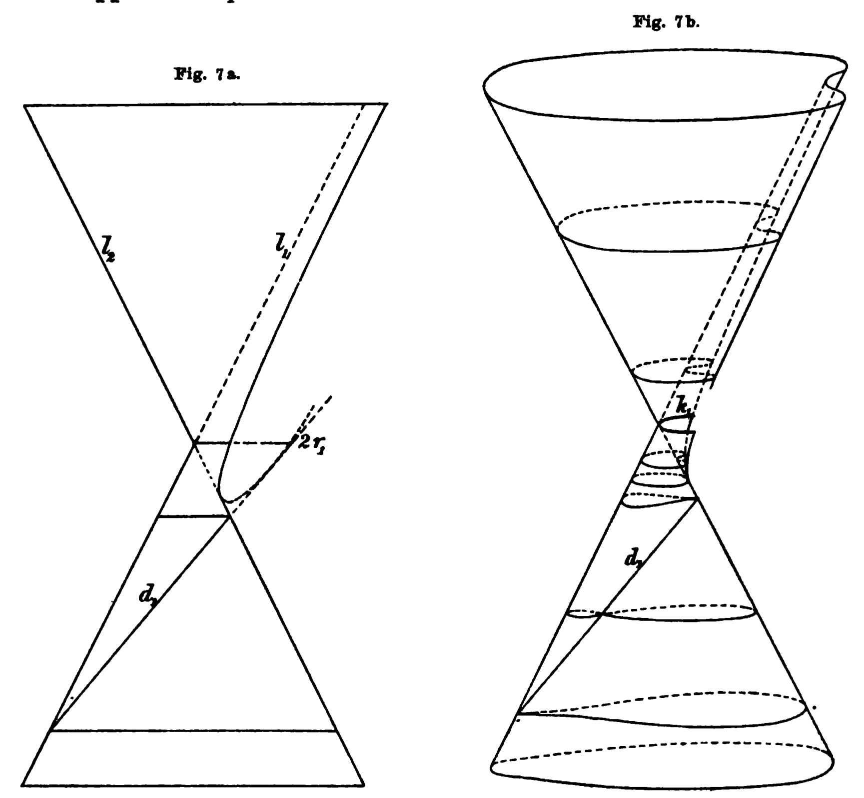
trifft. Für $r > r_1$ liegt der durch x_1 bestimmte Punkt, für $r < r_1$ der durch x_2 bestimmte außerhalb der Fläche. Die Geraden $x = \pm sz$ berühren die Parabel in den Punkten mit den Abszissen $x = \frac{4 r_1 r^2}{(r \pm r_1)^2}$, das ist dort, wo die zur xy-Ebene parallelen Querschnitte der Fläche aufhören reelle Doppeltangenten parallel der y-Ache zu haben. Ferner wird die Umrißparabel von der Doppelgeraden $z = -\frac{r}{r_1 s}(x - 2r_1)$ im Punkte $z = 0$, $x = 2r_1$ berührt, der nur im Falle $r > r_1$ auf der Fläche selbst liegt.

Diesen Resultaten entsprechend ist der Aufriß der beiden Flächen für $r = 5$, $r_1 = 3$ (Figur 6a) und $r = 3$, $r_1 = 5$ (Figur 7a) und $s = \frac{1}{2}$



gezeichnet. Außerdem sind die Flächen in Parallelperspektive skizziert (Figur 6b und 7b). Dabei geht der scheinbare Umriß in eine Kurve 6. Ordnung und 4. Klasse über. [Zum Vergleich sind zwei symmetrische Regelflächen 4. Ordnung in Parallelperspektive gezeichnet, welche durch die Antiparallelogrammbewegung entstehen. Sie haben ebenfalls

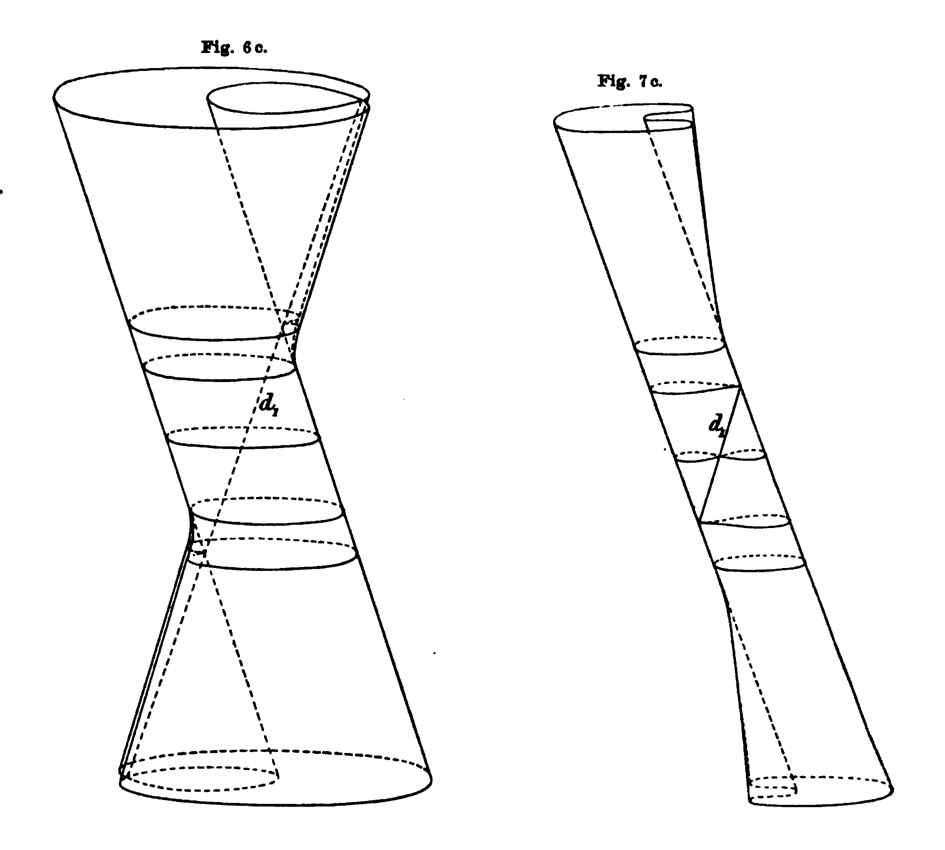
eine Doppelgerade, aber einen Doppelkreis im Unendlichen. Ihr scheinbarer Umriß in der $+z$-Ebene enthält zwei Erzeugende, die Doppelgerade und im gekrümmten Teile Stücke einer Hyperbel. Figur 7b entsteht durch kongruente Ellipsen als Polkurven, Figur 7c durch kongruente Hyperbeln. Die Analogie zwischen den Figuren 6b und 6c bezw. den Figuren 7b und 7c ist unverkennbar. In 6c und 7c liegt der Doppelkreis k_1 im Unendlichen.



In Figur 6d ist die Regelfläche 4. Ordnung mit Doppelkreis und Doppelgerade zur Anschauung gebracht, welche bei der umgekehrten Ellipsographenbewegung entsteht, wenn die erzeugende Gerade durch den Mittelpunkt des beweglichen Kreises geht. Sie ähnelt der Fläche 6b. Die Doppelgerade steht aber auf der Ebene des Doppelkreises senkrecht.]

§ 8. Von nun an lassen wir die Erzeugende l_1 nicht mehr durch A_1 hindurchgehen. Die von ihr beschriebene Regelfläche hat dann eine Raumkurve 3. Ordnung als Doppelkurve, deren Projektion auf σ' die in § 4 untersuchte c_3 ist. Aus den Eigenschaften der c_3 folgt, daß die

Doppelkurve nur eine Asymptote hat und daher eine kubische Ellipse ist. Ferner geht aus § 3 hervor, daß die Doppelkurve ganz von der Fläche isoliert verlaufen muß, wenn die Projektion l von l_1 die Polkurve p nicht schneidet. Ebenso folgt, daß sie zwei oder vier reelle Zwickpunkte hat, je nachdem l die Kurve p in zwei oder vier reellen Punkten schneidet, daß zwei von diesen Zwickpunkten in einen Punkt zusammenrücken, wenn l eine gewöhnliche Tangente von p ist, daß



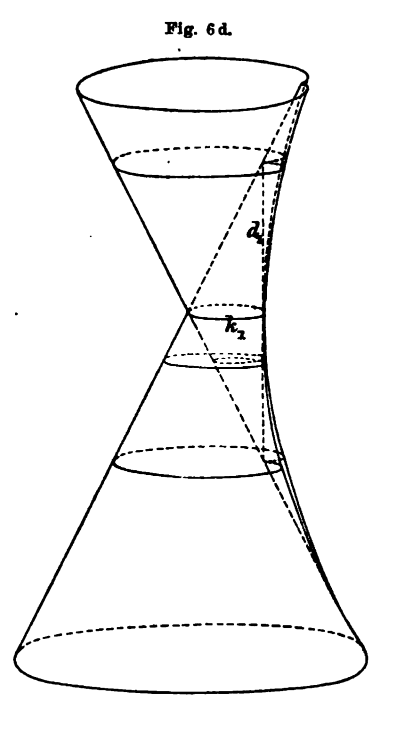
dasselbe mit drei Zwickpunkten geschieht, wenn l Wendetangente ist, und daß zweimal zwei Zwickpunkte in je einen Punkt fallen, wenn l Doppeltangente von p ist. Man braucht daher l_1 nur so mit der Ebene σ zu verbinden, daß l eine der aufgezählten Lagen zu p hat, um mit unserem Mechanismus die verschiedenen von **Rohn** angegebenen Unterarten der Regelflächen 4. Ordnung mit Doppelkurve 3. Ordnung zu erhalten. Mit Ausnahme derjenigen Flächen, bei welchen die Doppelkurve ganz und gar auf der Fläche selbst liegt, bekommt man alle Flächen; man kann auch die Unterscheidung be-

rücksichtigen, die Rohn[1]) in bezug darauf macht, ob alle Erzeugenden der Regelfläche die Doppelkurve wirklich schneiden, oder ob einige sie nicht treffen. Wenn z. B. die Doppelkurve vier reelle Zwickpunkte hat, sind nach Rohn noch folgende beiden Flächenarten zu trennen:

1. solche Flächen, bei denen alle Erzeugenden reelle Doppelkanten der Raumkurve sind und gleichzeitig die beiden Schnittpunkte so liegen, daß sie durch Zwickpunkte getrennt sind;

2. solche Flächen, bei denen es neben reellen Doppelsekanten auch ideelle gibt und gleichzeitig die beiden Schnittpunkte jeder reellen Sekante der Raumkurve nicht durch Zwickpunkte getrennt sind, sondern sich auf einem und demselben auf der Fläche liegenden Stück der Doppelkurve befinden. Da bei beiden Flächenarten stets die eine angegebene Bedingung die andere nach sich zieht, so erhalten wir eine Fläche der ersten Art, wenn wir eine Erzeugende so legen, daß sie die Doppelkurve in Punkten schneidet, welche Zwickpunkte zwischen sich haben. Dies wird durch die Untersuchung § 5 ermöglicht. Wir brauchen l nur so zu ziehen, daß es p in vier Punkten schneidet, damit die Doppelkurve vier Schnittpunkte erhält, und außerdem den Kreis k_3 oder k_4 so trifft, daß die Schnittpunkte zwei Teile von l begrenzen, die zum Teil in dem Gebiete α oder β liegen. In einer der Totpunktlagen findet dann entsprechendes mit l und c_3 statt, und daher schneidet in dieser Phase der Bewegung l_1 die Doppelkurve in der gewünschten Weise. Nur wenn $r_1 > r$ ist, können wir diesen Bedingungen genügen, und zwar ist ihnen immer genügt, wenn l die kleine und die große Schleife von p in je zwei Punkten durchsetzt.

Fig. 6d.



Eine Fläche der zweiten Art ergibt sich, wenn nur eine Erzeugende eine ideelle Sekante ist. Dazu wird l so angeordnet, daß es p viermal schneidet, ohne k_3 oder k_4 zu erreichen, denn in diesem Falle wird in einer der Totpunktlagen kein Punkt von l mit seinem Doppelpunkt zusammenfallen, und daher l_1 die Doppelkurve nicht

1) A. a. O. S. 300.

treffen. Eine solche Anordnung von l ist möglich für $r_1 < r$ und für $r_1 > r$.

Wenn man bei den Flächenerzeugungen mit vier Zwickpunkten l so verschiebt, daß es p berührt, erhält man Flächen mit zwei reellen und zwei zusammenfallenden Zwickpunkten, und zwar kommt man auf Flächen mit ausschließlich reellen Doppelsekanten, wenn man von dem ersten der oben besprochenen Fälle ausgeht, dagegen Flächen mit reellen und ideellen Doppelsekanten, wenn eine dem zweiten Falle entsprechende Lage von l als Ausgang gewählt wird.

Interessant ist es, zu beobachten, wie die in 3 erwähnten Flächen durch passende Lagenveränderung von l allmählich in Flächen des Abschnittes 7 übergeführt werden können. Da die Pascalsche Schnecke p eine reelle Doppeltangente hat, so lange $r < 2r_1$ ist, und zwei Wendepunkte, wenn r zwischen $2r_1$ und r_1 liegt, so können alle in 7 und 8 aufgezählten Flächenerzeugungen mit einem und demselben Mechanismus hervorgebracht werden, wenn man $r_1 > \frac{r}{2}$ und $< r$ wählt und die umgekehrte Bewegung mit benutzt.

Zur Verwirklichung des Falles, daß alle vier Zwickpunkte zusammenrücken, bedarf man aber der besonderen Anordnung $r_1 = \frac{r}{2}$. Dann fallen in p die Wendepunkte und die Berührungspunkte der Doppeltangente in einem Flachpunkt zusammen. Nimmt man die Tangente in diesem Flachpunkt als Projektion l der Erzeugenden l_1, so müssen vier Zwickpunkte in dem singulären Punkte der Bahnkurve zusammenfallen. Es entsteht auch hier wiederum die Fläche nicht, welche sich längs einer Doppelkurve wirklich durchsetzt, sondern man kommt auf eine solche, bei der die Doppelkurve bis auf den singulären Punkt, in welchem sie die Fläche berührt, isoliert verläuft.

§ 9. Eine Anzahl der mit dem gleichschenkligen Doppelkurbelgetriebe nicht erhaltbaren Regelflächen 4. Ordnung und eine Anzahl der mit ihm darstellbaren, aber in neuen Formen, liefert das *Schleifschiebergetriebe.*[1])

Ein rechter Winkel, dessen Schenkel als ξ- und η-Achse genommen werden, bewegt sich so, daß der eine Schenkel, die $+\xi$-Achse, beständig durch den Punkt A' der Ebene σ' hindurchgeht, während der Punkt A des anderen Schenkels, der $+\eta$-Achse, auf einer Geraden g' entlang gleitet. Mit der Ebene σ des rechten Winkels wird eine Gerade l_1 fest verbunden, es fragt sich, welche Art Regelfläche die Gerade l_1 beschreibt, wenn sie sich mit dem Schleifschiebergetriebe bewegt. Zunächst soll

1) Roberts, London Math. Society Proc. 7. 1876. S. 216.

die *Bahnkurve* eines Punktes P der Ebene σ bestimmt werden. Beim festen Koordinatensystem falle die y-Achse auf g' und gehe die $+x$-Achse durch A', ferner sei $OA = \nu$, und $O'A' = n$. In einem bestimmten Augenblick der Bewegung sei die $+\xi$-Achse gegen die $+x$-Achse um den Winkel α gedreht, dann ist gleichzeitig der Anfangspunkt O gegen O' um $-n \operatorname{tg} \alpha + \frac{\nu \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$ in Richtung der $+y$-Achse (Figur 8 und 9) und um $\nu \sin \alpha$ in Richtung der $+x$-Achse verschoben. Zwischen den Koordinaten $\xi\eta$ und xy bestehen daher die Gleichungen:

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + \nu \sin \alpha$$
$$y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha - n \operatorname{tg} \alpha + \frac{\nu \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

oder:

$$x \sin \alpha = \xi \sin \alpha \cos \alpha - (\eta - \nu) \sin^2 \alpha$$
$$y \cos \alpha = \xi \sin \alpha \cos \alpha + \eta \cos^2 \alpha - n \sin \alpha + \nu \sin^2 \alpha,$$

aus denen durch Subtraktion:

$$(x - n) \sin \alpha - y \cos \alpha = -\eta$$

und in Verbindung mit der ersten Gleichung:

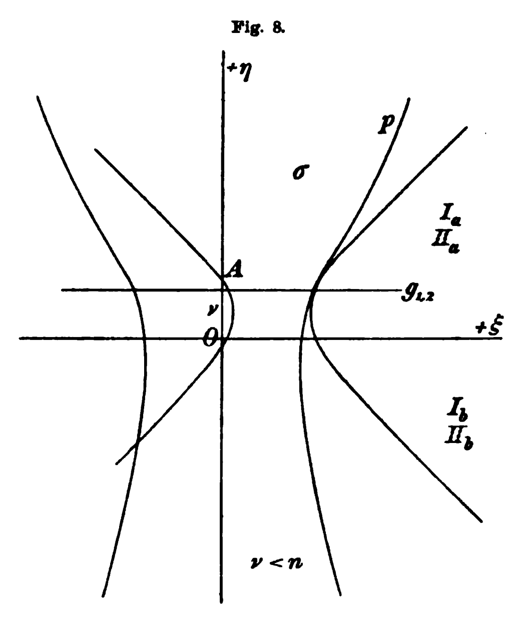
$$(\eta - \nu) \sin \alpha - \xi \cos \alpha = -x$$

durch Elimination von α für die Bahnkurve von P die Gleichung 4. Ordnung:

$$(6) \quad (\xi\eta - xy)^2 + \{\eta(\eta - \nu) - x(x - n)\}^2 = \{y(\eta - \nu) - \xi(x - n)\}^2$$

folgt. Schafft man hieraus mit Hilfe der Gleichungen (1) der Geraden l_1 ξ und η fort und setzt wiederum $\xi = z$, so bleibt die Gleichung inbezug auf x, y, z von der 4. Ordnung; die Gerade l_1 beschreibt also auch bei diesem Mechanismus eine Regelfläche 4. Ordnung. Die Bahnkurven und Regelflächen werden verschieden ausfallen, je nach dem $n >$ oder $< \nu$ ist. Da aber die Gleichung (6), wenn man xy konstant, ξ, η veränderlich nimmt, so weit unverändert bleibt, nur daß n

Fig. 8.



und ν ihre Plätze tauschen, so kann, wenn der Mechanismus für $n > \nu$ vorhanden ist, der Fall $n < \nu$ durch Umkehrung ersetzt werden.

§ 10. Die *Polkurvengleichungen* ergeben sich daraus, daß der momentane Drehungspunkt C der Schnittpunkt der Bahnnormalen AC von A und der Enveloppennormalen $A'C$ der ξ-Achse ist. Für seine Koordinaten $\xi\eta$ ist daher:

$$\xi = \frac{n}{\cos\alpha} - \nu \operatorname{tg}\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\nu - \eta}{\sqrt{\xi^2 + (\nu - \eta)^2}}; \quad \cos\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (\nu - \eta)^2}}.$$

Hieraus folgt durch Elimination von α die Gleichung der beweglichen Polkurve p:

$$\{\xi^2 - \nu(\eta - \nu)\}^2 = n^2\{\xi^2 + (\eta - \nu)^2\};$$

die der festen Polkurve p' ist daher:

$$\{y^2 - n(x - n)\}^2 = \nu^2\{y^2 + (x - n)^2\}.$$

Die Polkurve p hat den Punkt A und den unendlich fernen Punkt in Richtung der η-Achse zu Doppelpunkten und wird im letzteren Punkt von der unendlich fernen Geraden vierpunktig berührt.[1]) Der Ausdruck:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right]_{\xi=0,\ \eta=\nu} = 4n^2(\nu^2 - n^2)$$

zeigt, daß der Doppelpunkt A im Endlichen ein Knotenpunkt ist, wenn $\nu > n$ ist, dagegen ein isolierter Doppelpunkt, wenn $\nu < n$. Ist $\nu = n$, so zerfallen die Polkurven, ebenso die Bahnkurven und die Regelflächen. Da dieser Fall auch in bezug auf die Regelflächen von Blake[2]) behandelt worden ist, soll nur gelegentlich auf ihn hingewiesen werden.

Wir untersuchen die Reellitätsverhältnisse der p-Kurven zunächst für $\nu < n$. Es ist:

$$\eta - \nu = \frac{-\nu\xi^2 \pm n\xi\sqrt{\xi^2 + \nu^2 - n^2}}{n^2 - \nu^2},$$

also η nur reell, wenn $\xi \geqq +\sqrt{n^2 - \nu^2}$ oder $\leqq -\sqrt{n^2 - \nu^2}$ ist. Ferner ist:

$$\xi = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\{n^2 + 2\nu(\eta - \nu)\} \pm \tfrac{n}{2}\sqrt{n^2 + 4\eta(\eta - \nu)}} = \pm\sqrt{R}.$$

Für $\nu < n$ ist $n^2 + 4\eta(\eta - \nu)$ stets positiv und der absolute Wert von $n^2 + 2\nu(\eta - \nu)$ wegen der Ungleichheit:

$$n^4 + 4n^2\nu(\eta - \nu) + 4\nu^2(\eta - \nu)^2 < n^4 + 4n^2\nu(\eta - \nu) + 4n^2(\eta - \nu)^2$$

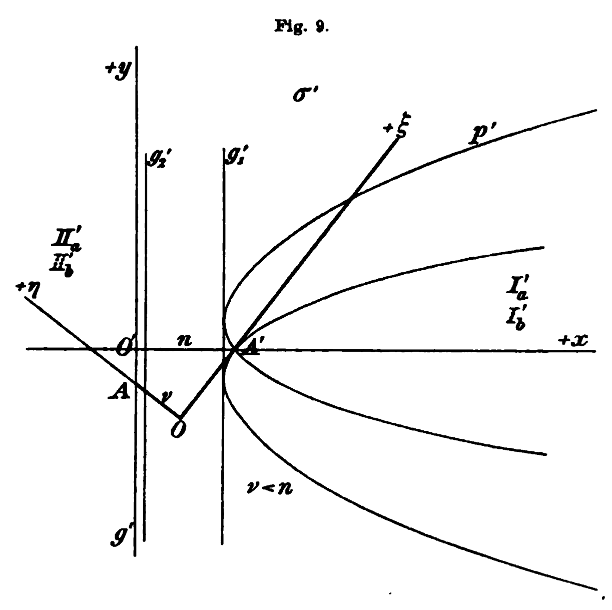
1) R. Müller, Über die Gestaltung der Doppelkurven für besondere Fälle des Kurbelgetriebes, diese Zeitschrift. 36. Bd. (1891) S. 18.

2) Blake, American Journal of Math. 21. Bd. 1899. S. 267.

kleiner als der absolute Wert von $n\sqrt{n^2 + 4\eta(\eta - \nu)}$. R ist also, wenn das obere Vorzeichen unter der Wurzel gilt, stets positiv, wenn das untere Vorzeichen genommen wird, stets negativ. Von den 4 Werten von ξ sind daher zwei imaginär. Die p-Kurve besteht aus zwei getrennten Zügen außerhalb der Parallelen

$$\xi = \pm\sqrt{n^2 - \nu^2},$$

die sich von $\eta = -\infty$ bis $\eta = +\infty$ erstrecken. Sie durchschneiden die Gerade $\eta = \nu$ an den Stellen $\xi = \pm n$ mit der Neigung $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{n}{\nu}$ und laufen zur η-Achse parallel für $\eta = 0$ und $\xi = \pm\sqrt{n^2 - \nu^2}$. (Fig. 8.)



Wenn $\nu > n$ ist, gibt es für alle Werte von ξ reelle Werte von η. Da $n^2 + 4\eta(\eta - \nu)$ negativ wird, wenn η zwischen $\frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ und $\frac{1}{2}(\nu - \sqrt{\nu^2 - \eta^2})$ liegt, so ist ξ für solche Werte von η sicher imaginär. Ferner ist jetzt der absolute Wert von $n^2 + 2\nu(\eta - \nu)$ größer als der von $n\sqrt{n^2 + 4\eta(\eta + \nu)}$ und daher R negativ, wenn $n^2 + 2\nu(\eta - \nu)$ negativ ist, dagegen sicher positiv, wenn $n^2 + 2\nu(\eta - \nu)$ positiv, d. h. $\eta > \nu - \frac{n^2}{2\nu}$ ist. Die Bedingungen für die Reellität von ξ sind daher:

$$\eta > \nu - \frac{n^2}{2\nu} \text{ und } \eta \text{ außerhalb } \tfrac{1}{2}(\nu \pm \sqrt{\nu^2 - n^2}).$$

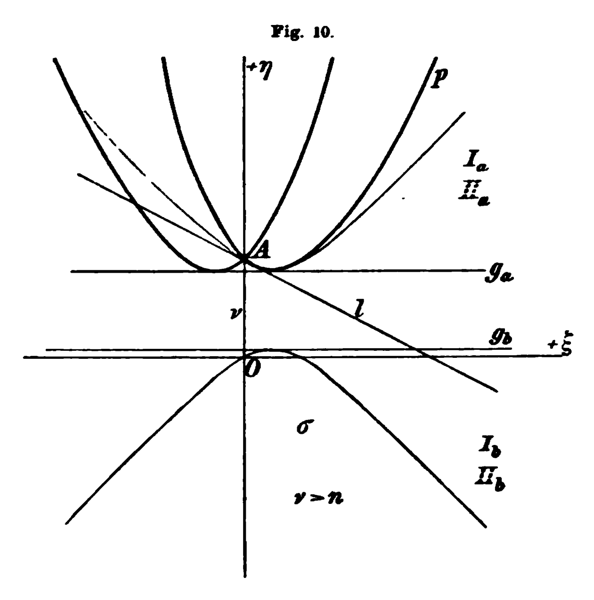
Beiden wird genügt durch:

$$\eta \geqq \tfrac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2}).$$

Für $\eta = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ ist $\xi = \pm\sqrt{\frac{n^2 - \nu^2}{2} + \frac{\nu}{2}\sqrt{\nu^2 - n^2}}$ und der Richtungskoeffizient der Tangente gleich Null. Die p-Kurve (Figur 10) besteht daher aus zwei Teilen, die sich im Knotenpunkt durchschneiden, sich wie zwei Parabeln mit zur $+\eta$-Achse parallelen Achsen ins Unendliche erstrecken und die Gerade $\eta = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$

zur Doppeltangente haben. Für die äußeren Kurvenzüge bis zu den Scheitelpunkten gilt in den Werten von ξ unter der Wurzel das obere Zeichen, für die inneren das untere Zeichen.

Fig. 10.



Für $\nu = n$ zerfällt p in die Gerade $\xi = 0$ und die Parabel $\xi^2 = 2n\left(\eta - \frac{n}{2}\right)$; entsprechendes findet mit p' statt[1]) und für $n = 0$ reduziert sich p auf die doppelt zählende Parabel $\xi^2 = \nu(\eta - \nu)$. Dasselbe erfolgt mit der p'-Kurve für $\nu = 0$.

§ 11. Inbezug auf die *Doppelpunkte* der Bahnkurven folgt aus den ersten Differentialquotienten der Gleichung (6), daß ein Doppelpunkt im Unendlichen liegt in Richtung der y-Achse, und daß die Koordinaten zweier andern Doppelpunkte P_1' und P_2' den Gleichungen[2]):

$$(7) \qquad \begin{aligned} yx &= \xi\eta \\ x(x-n) &= \eta(\eta-\nu) \\ y(\eta-\nu) &= \xi(x-n) \end{aligned}$$

oder:

$$x_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + \eta(\eta-\nu)}$$

$$y_{1,2} = \frac{\xi\eta}{x_{1,2}}$$

genügen.

Die Gleichungen (8) bestimmen zwischen den Systempunkten P und den Doppelpunkten $P_{1,2}'$ eine *zwei-zweideutige* Verwandtschaft *dritten* Grades.

Ausnahmen bilden die Punkte P $\xi = 0$, $\eta = \nu$ und $\xi = \infty$, $\eta = 0$, denen alle Punkte der Geraden $x = 0$ bezw. $x = n$ entsprechen, und andererseits die Doppelpunkte $P'x = n$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = \infty$, denen alle Punkte der Geraden $\eta = 0$ bezw. $\eta = \nu$ als Systempunkte zugeordnet sind.

1) Blake, A. J. of M. 21. Bd. S. 267.

2) Ebd. Roberts u. Müller.

Durchläuft P in der bewegten Ebene σ eine Gerade parallel zur ξ-Achse, so erzeugen P_1' und P_2' ähnliche Punktreihen auf zwei Parallelen zur y-Achse. Man kann daraus bereits schließen, daß, wenn die bewegte Gerade l_1 so liegt, daß ihre Projektion parallel zur ξ-Achse geht, die von ihr erzeugte Fläche zwei Doppelgeraden enthalten muß. Wenn P auf der Geraden $\eta = \nu$ liegt, entspricht ihm ein Punkt $P_1'\left(y = \frac{\nu \xi}{n}\right)$ auf $x = n$ und als P_2' der unendlich ferne Punkt auf $x = 0$, dagegen, wenn P auf $\eta = 0$ fällt, der Punkt O auf $x = n$ als P_1' und ein Punkt $\left(y = + \frac{n \xi}{\nu}\right)$ auf $x = 0$ als P_2'.

Die Doppelpunkte P_1' und P_2' sind imaginär für Punkte P, für welche:

$$\eta^2 - \nu\eta + \frac{n^2}{4} > 0$$

ist, welche also zwischen den Geraden g_a und g_b

$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(\nu \pm \sqrt{\nu^2 - n^2}\right)$$

liegen. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $\nu > n$ ist. Dann gibt es auch die beiden Parallelen zur ξ-Achse g_a und g_b, die Müller[1]) Übergangsgeraden genannt hat, die solche Systempunkte P enthalten, für welche die beiden Doppelpunkte zusammenrücken. Ebenso sind für $\nu < n$ die Systempunkte $P_{1,2}$ imaginär, welche den Punkten $P_{1,2}'$ zwischen den Parallelen g_1' und g_2': $x = \frac{1}{2}\left(n \pm \sqrt{n^2 - \nu^2}\right)$ entsprechen würden, d. h. für $\nu < n$ liegen zwischen g_1' und g_2' keine Doppelpunkte.

§ 12. Die Doppelpunkte der Bahnen aller Punkte einer Geraden l:

$$\xi \cos\vartheta + \eta \sin\vartheta - p = 0$$

bilden eine Kurve, deren Gleichung sich aus:

$$yx = \xi\left(-\xi \operatorname{ctg}\vartheta + \frac{p}{\sin\vartheta}\right)$$

und:

$$y\left(-\xi \operatorname{ctg}\vartheta + \frac{p}{\sin\vartheta} - \nu\right) = \xi(x - n)$$

durch Elimination von ξ zu:

$$(9)\quad x(x \sin\vartheta + y \cos\vartheta - n \sin\vartheta)^2 = (p - \nu \sin\vartheta)(px - pn + \nu y \cos\vartheta)$$

ergibt. Sie ist eine Kurve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt im Unendlichen in Richtung der Geraden $x \sin\vartheta + y \cos\vartheta = 0$ und den drei Asymptoten: $x = 0$ und:

$$x \sin\vartheta + y \cos\vartheta - n \sin\vartheta \pm (p - \nu \sin\vartheta) = 0.$$

1) R. Müller: Ebd.

Ist $\nu = n$, so tritt ein 2. Doppelpunkt

$$x = \frac{n}{2}, \quad y = \frac{p - \frac{1}{2} n \sin\vartheta}{\cos\vartheta}$$

auf und die c_3 zerfällt in die Gerade

$$x \sin\vartheta + y \cos\vartheta - p = 0$$

und in die Hyperbel:

$$x(x \sin\vartheta + y \cos\vartheta - 2n \sin\vartheta + p) - (p - n \sin\vartheta)n = 0.$$

Geht die Gerade l durch den Punkt A, so trennt sich von der Gleichung (9) die Gleichung $x = 0$ der von A doppelt durchlaufenen Geraden ab, und es bleibt die Gerade d':

$$x \sin\vartheta + y \cos\vartheta - n \sin\vartheta = 0$$

als Ort der Doppelpunkte der Bahnkurven von l übrig. Die Doppelpunkte liegen daher auf einer Geraden durch A', wie sich auch unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{y}{x - n} = \frac{\xi}{\eta - \nu}$$

ergibt. Da aber die Abszissen der Doppelpunkte auf d noch durch eine quadratische Gleichung mit den Ordinaten der Systempunkte zusammenhängen, werden die Doppelpunkte der Bahnen der räumlichen Geraden l_1 keine Gerade, sondern eine Kurve 2. Grades bilden.

§ 13. Um die *Natur der Doppelpunkte* P_1' und P_2' zu untersuchen, bilden wir für die Gleichung (6) den Ausdruck:

$$J = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Unter Benutzung der Bedingung für die Doppelpunkte erhalten wir:

$$J = 4\{n^2 + 4\eta(\eta - \nu)\}\left\{\xi^2 - \frac{n^2}{2} - \nu(\eta - \nu) \mp \frac{n}{2}\sqrt{n^2 + 4\eta(\eta - \nu)}\right\}.$$

Hierin ist, wenn P_1' und P_2' getrennt und reell sind, $n^2 + 4\eta(\eta - \nu)$ positiv und von Null verschieden. Das Vorzeichen von J ist daher durch das von:

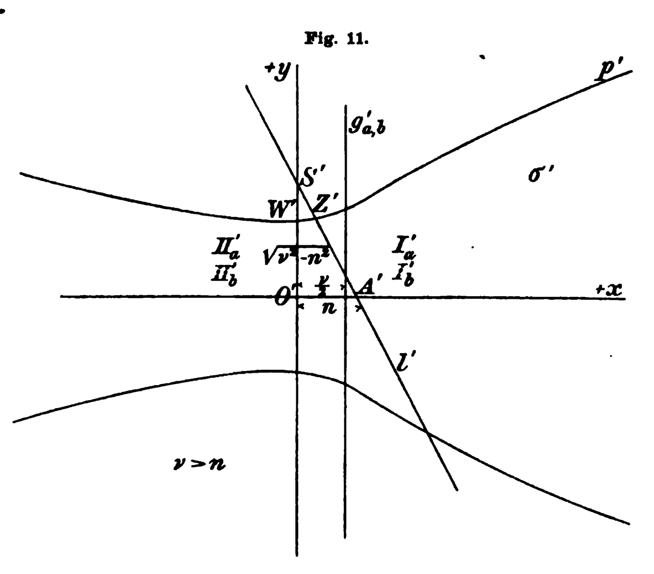
$$\xi^2 - \frac{n^2}{2} - \nu(\eta - \nu) \mp \frac{n}{2}\sqrt{n^2 + 4\eta(\eta - \nu)} = \xi^2 - R$$

bestimmt. Das obere Vorzeichen bezieht sich auf den Doppelpunkt P_1', das untere auf P_2'.

Zunächst sei $\nu < n$. Dann kann, wenn das untere Vorzeichen gilt, nach § 10 $\xi^2 - R$ niemals Null sein, sondern muß immer positive Werte hahen. Daher ist P_2' für jede Lage des erzeugenden Punktes P

ein Knotenpunkt. Nimmt man dagegen das untere Vorzeichen, so ist $\xi^2 - R$ gleich Null, wenn P auf der p-Kurve liegt. Dann ist P_1' ein Rückkehrpunkt. Weil ferner für $\xi = 0$ und $\eta = \nu$ der Ausdruck $\xi^2 - R$ einen negativen Wert hat und er seine Vorzeichen nur auf der p-Kurve wechseln kann, so ist P_1' ein isolierter Doppelpunkt, wenn P mit dem Punkte $\xi = 0$, $\eta = \nu$ auf derselben Seite der p-Kurve liegt, dagegen ein Knotenpunkt, wenn P in das Gebiet fällt, welches durch die p-Kurve vom Punkte A getrennt ist.

Im Falle $\nu > n$ ist, wenn P auf den äußeren Zügen der p-Kurve angenommen wird, nach § 10 $\xi^2 - R = 0$ und daher P_1' ein Rückkehrpunkt, dagegen P_2' ein solcher, falls P auf den inneren Zügen liegt. Ferner ist, wenn $\eta < \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ wird, R negativ und daher J positiv und zwar für beide Vorzeichen. Dasselbe gilt für $\eta = 0$ und $\xi = \pm\infty$. Dagegen ist J negativ für $\xi = 0$ und $\eta > \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$. Daher ist P_1' ein isolierter Doppelpunkt, wenn P innerhalb der äußeren Züge der p-Kurve und oberhalb der Übergangsgeraden g_a $\eta = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ angenommen wird und P_2' ebenfalls ein solcher, wenn sich P innerhalb der inneren Züge von p oder zwischen ihnen und der Geraden g_a befindet. In allen anderen Fällen sind P_1' und P_2', wenn sie nicht imaginär werden, Knotenpunkte.



§ 14. Die gewonnenen Resultate lassen sich am besten übersehen, wenn man die zwei-zweideutige Verwandtschaft zwischen den Systempunkten P und den Doppelpunkten $P_{1,2}'$ auf zwei Doppelebenen σ und σ' zur Anschauung bringt (Figuren 8—11).

Die Punkte P, sofern sie die Doppelpunkte P_1' erzeugen, bleiben auf dem oberen Blatt, sofern sie aber die Doppelpunkte P_2' hervorbringen, werden sie auf dem unteren Blatt auf σ angeordnet. Wenn nun $\nu < n$ ist, bedecken die Systempunkte $P_{1,2}$ die Doppelebene σ vollständig (Figur 8 und 9). Im oberen und unteren Blatt werden

dann die Geraden g_1 und g_2 $\left(\eta = \frac{\nu}{2}\right)$ gezogen. Hierdurch entstehen im oberen Blatt die Gebietsteile I_a und I_b, im unteren II_a' und II_b und zwar I_a und II_a nach der $+\eta$-Achse hin, I_b und II_b um die $-\eta$-Achse. Die Gebiete des obereren und unteren Blattes hängen nicht im Endlichen zusammen, dagegen gehen I_a und I_b in g_1, II_a und II_b in g_2 in einander über.

In σ' entsprechen den Geraden g_1 und g_2 die Geraden g_1' und g_2', zwischen denen Doppelpunkte nicht liegen. Die von g_1' nach außen befindlichen Doppelpunkte werden von Punkten von I_a und I_b hervorgebracht, und zwar verweisen wir die I_a entsprechenden ins obere Blatt, und nennen ihr Gebiet I_a' dagegen die I_b entsprechenden ins untere Gebiet I_b' und lassen I_a' und I_b' in g_1' zusammenhängen. Analoges machen wir mit II_a und II_a', II_b und II_b'. Dann sind die Doppelebenen σ und σ' in den Teilen I_a und I_a', I_b und I_b' usw. durch die Gleichungen (8) eindeutig aufeinander abgebildet mit Ausnahme der singulären Punkte:

$$\begin{aligned} &\xi = \infty, \ \eta = 0 \quad \text{in } I_b, \\ &\xi = 0, \quad \eta = \nu \quad \text{in } II_a, \\ &x = n, \quad y = 0 \quad \text{in } I_b', \\ &x = 0, \quad y = \infty \ \text{in } II_a', \end{aligned}$$

denen alle Punkte der Geraden:

$$x = n \text{ in } I_b', \ x = 0 \text{ in } II_a', \ \eta = 0 \text{ in } I_b \text{ und } \eta = \nu \text{ in } II_a$$

zugeordnet sind.

Wenn $\nu > n$, findet entsprechendes statt (Figur 10 und 11), nur erfüllen die Systempunkte $P_{1,2}$ die Doppelebene σ allein außerhalb der Geraden g_a und g_b. Ihnen entsprechen dann in σ' die Geraden g_a' und g_b' $\left(x = \frac{n}{2}\right)$ im oberen und unteren Blatte. I_a und I_b sind nun getrennt, ebenso II_a und II_b, dagegen hängen I_a und I_b in g_a, I_b und II_b in g_b zusammen. In σ' stoßen I_a' und II_a' in g_a' aneinander und füllen das obere Blatt vollständig aus, ebenso im unteren Blatt I_a' und II_b' in g_b'.

Die p-Kurve verläuft, wenn $\nu < n$ ist (Figur 8 und 9), ganz im oberen Blatt, die ihr zugeordnete p'-Kurve mit den äußeren Zügen im oberen Blatt in I_a', mit den inneren Zügen im unteren Blatt in I_b'. Die Gebiete II_a' und II_b' sind ganz, die Gebiete I_a' und I_b' sind außerhalb der p'-Kurve von Knotenpunkten erfüllt.

Ist $\nu > n$ (Figur 10 und 11), so liegen die äußeren Züge der p-Kurve im oberen Teil von σ im Gebiet I_a, die inneren Züge im

unteren Teil im Gebiet II_a, dagegen erstreckt sich die p'-Kurve ganz im oberen Blatte durch die Teile I'_a und II'_a. Hier ist das ganze untere Blatt von σ vollständig von Knotenpunkten bedeckt, das obere aber nur außerhalb der Kurve p'.

§ 15. Zur Diskussion der durch eine Gerade l_1 erzeugten Regelfläche nehmen wir den kürzesten Abstand p der Geraden l_1 und der ζ-Achse wiederum in der σ-Ebene an; er bilde mit der $+\xi$-Achse den Winkel ϑ und die Gerade l_1 mit ihrer Projektion l auf σ einen Winkel φ, dessen Kotangente s ist. Dann lauten die Gleichungen von l_1:

$$\xi = p \cos\vartheta - s\zeta \sin\vartheta$$
$$\eta = p \sin\vartheta + s\zeta \cos\vartheta.$$

Wir verzichten auch hier darauf die Gleichung der Regelfläche anzuführen. Die Doppelkurve 3. Ordnung hat als Projektion auf σ die Kurve c_3 mit drei Asymptoten und als Projektion auf die xz-Ebene die Hyperbel:

$$x(x-n) = (p \sin\vartheta + sz\cos\vartheta)(p\sin\vartheta + sz\cos\vartheta - \nu).$$

Sie ist daher eine kubische Hyperbel. Die Gleichungen der einen Asymptote lauten:

$$x = 0; \quad z = \frac{\nu - p\sin\vartheta}{s\cos\vartheta},$$

die der Asymptoten 2 und 3 (S. 319):

$$x\sin\vartheta + y\cos\vartheta - n\sin\vartheta \pm (p - \nu\sin\vartheta) = 0$$
$$sz\cos\vartheta \mp \left(x - \frac{n}{2}\right) - \frac{\nu}{2} + p\sin\vartheta = 0.$$

Die Doppelkurve zerfällt, wenn zwei oder alle Asymptoten sich schneiden. Dies tritt in Übereinstimmung mit S. 320 ein, wenn $p = \nu\sin\vartheta$ ist, also l durch A geht. Dann schneiden sich die beiden letzten Asymptoten. Ferner rücken alle drei Asymptoten in die unendlich ferne Ebene, wenn $\cos\vartheta = 0$, also l zur ξ-Achse parallel läuft. Endlich treffen sich noch in dem nicht näher zu besprechenden Fall $\nu = n$ die Asymptoten 1 und 3 für alle Geraden l_1. In allen übrigen Fällen hat die Regelfläche eine wirkliche Doppelkurve 3. Ordnung.

§ 16. Wir behandeln zunächst den Fall, daß die Projektion l von l_1 zur ξ-Achse parallel l läuft, $\cos\vartheta = 0$, also:

$$\xi = -sz$$
$$\eta = p$$

ist. Sofern l im oberen Blatt von σ liegt, hat die Fläche die Doppelgerade

$$x = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + p(p-\nu)}; \quad y = \frac{-psz}{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + p(p-\nu)}},$$

und sofern l im unteren Blatt verläuft, die Doppelgerade:

$$x = \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + p(p-\nu)}; \qquad y = \frac{-psz}{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + p(p-\nu)}}.$$

Weil l durch den singulären Punkt $\xi = \infty$, $\eta = 0$ hindurchgeht, ist auf der Fläche noch die dritte Doppelgerade $x = n$, $z = \infty$ vorhanden, d. h. eine Doppelgerade in der unendlich fernen Ebene in Richtung der yz-Ebene. Diese Doppelgerade ist die Doppelerzeugende, in deren Lage l_1 zweimal kommt, wenn A das Ende der x-Achse erreicht. Die Doppelerzeugende schneidet nach der allgemeinen Theorie jede der beiden eigentlichen Doppelgeraden in einem Doppelzwickpunkt. Daher kann jede Doppelgerade außerdem nur noch zwei reelle Zwickpunkte enthalten. In der Tat schneidet l diese p-Kurve in jedem der beiden Blätter höchstens in zwei Punkten. Man übersieht leicht, daß, wenn $\nu < n$ ist, die eine Doppelgerade stets zwei reelle Zwickpunkte hat, die zweite nie solche besitzt, aber ganz aus Knotenpunkten besteht und daher in ihrer ganzen Ausdehnung eine Durchsetzungslinie der Fläche ist. Wenn dagegen $\nu > n$ ist, sind entweder auf beiden Geraden zwei reelle Zwickpunkte vorhanden, dann nämlich, wenn l durch die Gebiete I_a und II_a geht, oder beide Gerade sind frei von Zwickpunkten im Endlichen und verlaufen ganz auf der Fläche. Bei allen Flächen, die bei $\cos\vartheta = 0$ entstehen können, enthalten die reell auf der Fläche liegenden Teile der Doppelgeraden die unendlich fernen Punkte, so daß die im Unendlichen liegende Doppelerzeugende auch reell auf der Fläche ist und bei der Bewegung mit durchlaufen wird, zum Unterschied von den Flächen, die nach Burmester und Blake bei der Ellipsographenbewegung entstehen.

Flächen mit zwei imaginären Doppelgeraden werden von l_1 beschrieben, wenn l im Falle $\nu > n$ zwischen den Geraden g_a und g_b liegt. Die unendlich ferne Doppelgerade ist aber auch dann reell und auf der Fläche.

Wenn $p = \frac{1}{2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - n^2})$ oder $\frac{1}{2}(\nu - \sqrt{\nu^2 - n^2})$ ist, bleibt die unendliche Doppelerzeugende bestehen und die beiden Doppelgeraden rücken in eine Selbstberührungsgerade zusammen, auf der im ersten Falle zwei reelle Zwickpunkte vorhanden sind, zwischen denen das endliche Stück isoliert ist, während im unendlichen Stück sich die Fläche wirklich selbst berührt. Im zweiten Falle schneidet l die p-Kurve nicht und die Fläche berührt sich in der ganzen Ausdehnung der Geraden.

Die einfachsten unter den bisher aufgezählten Flächen sind:

(1) $$\nu = 0; \; p = 0.$$

Die Gleichung der Fläche ist:

$$x^2y^2 + (x - n)^2(x^2 - s^2z^2) = 0.$$

Die zur xy-Ebene parallelen Schnitte sind gewöhnliche Konchoiden, die Bahnkurven der einzelnen Punkte von l_1. Die eine Doppelgerade, die Bahn des Punktes A, ist die y-Achse ohne Zwickpunkte im Endlichen, in der die Fläche sich vollständig durchsetzt. Die andere Doppelgerade geht durch A' parallel der z-Achse, ist zwischen den Zwickpunkten $z = \pm \frac{n}{s}$ isoliert, im übrigen reell auf der Fläche. Die Schnittebenen parallel der xz-Ebene geben wie bei allen Flächen dieses Abschnittes, da sie durch die unendlich ferne Doppelerzeugende gehen, außerdem noch Schnittkurven zweiten Grades, in diesem Falle Hyperbeln. Der Schnitt der Fläche mit der xz-Ebene besteht aus den Doppelgeraden $(x - a)^2 = 0$ und den beiden Erzeugenden $x = \pm sz$. Der scheinbare Umriß in derselben Ebene enthält außerdem nur noch die Projektion der unendlich fernen Doppelerzeugenden $x^2 = 0$.

(2) $$n = 0;\ p = \nu.$$

Die Gleichung der Fläche ist:

$$x^4 + (xy + \nu sz)^2 - s^2x^2z^2 = 0.$$

Die Schnitte parallel der xy-Ebene sind zwei voneinander isoliert verlaufende parabelförmige Kurvenzüge, die sich in der xy-Ebene zur Selbstberührungseraden, der y-Achse zusammenziehen; diese ist zwischen den beiden Zwickpunkten isoliert.

(3) $$n = 0;\ p = 0.$$

Die Gleichung lautet:

$$x^4 + x^2y^2 - (sxz - \nu y)^2 = 0.$$

Auch hier bestehen die Bahnkurven der einzelnen Punkte von l_1 aus zwei parabelförmigen Stücken, die sich aber nie zu einer Geraden verengen, und sich in je einem Punkte der z-Achse, der Selbstberührungsgeraden der Fläche, die ganz auf der Fläche liegt, berühren.

§ 17. Wenn die Erzeugende l_1 durch den Punkt A hindurchgeht, also $p = \nu \sin\vartheta$ ist, im übrigen die Richtung von l_1 und l beliebig ist, liefert l, sofern sie durch den singulären Punkt A läuft, die Doppelgerade $x = 0$, $z = \frac{\nu \cos\vartheta}{s}$, außerdem aber Doppelpunkte, denen im Raum die Gleichungen:

$$x(x - n) = (\nu \sin^2\vartheta + sz\cos\vartheta)(\nu \sin^2\vartheta + sz\cos\vartheta - \nu)$$
$$x\sin\vartheta + y\cos\vartheta - n\sin\vartheta = 0$$

zukommen, also einen Doppelkegelschnitt. Er liegt in einer zur Ebene σ senkrechten Ebene, und ist nach der Gleichung seiner Projektion in der xz-Ebene:

$$\left(x - \frac{n}{2}\right) - \left(sz \cos\vartheta + \nu \sin^2\vartheta - \frac{\nu}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - \nu^2}{4}$$

eine Hyperbel. Von der Doppelgeraden wird sie in dem Punkte S_1 $\left(x = 0;\ z = \frac{\nu \cos\vartheta}{s};\ y = n \operatorname{tg}\vartheta\right)$ getroffen. Ist $n > \nu$, so läuft die reelle Achse der Hyperbel mit der xy-Ebene parallel, ist dagegen $n < \nu$, so ist diese Achse parallel der z-Achse.

Mit Hilfe der § 14 gegebenen Abbildung übersieht man die folgenden Resultate. Im Falle $\nu < n$ besteht die Doppelgerade aus lauter Knotenpunkten, da ja die Gerade $x = 0$ in II'_a, die dem Punkte $\xi = 0$ $\eta = \nu$ entspricht, sich ganz im Gebiet solcher Punkte erstreckt. l schneidet die p-Kurve außer im singulären Punkt A des unteren Blattes stets noch in zwei Punkten des oberen Blattes. Also enthält die Doppelhyperbel zwei reelle Zwickpunkte. Der eine Ast der Hyperbel dehnt sich über und unter den Gebieten I'_a und I'_b von σ' aus und rührt daher von Systempunkten des oberen Blattes von σ her, enthält also die beiden Zwickpunkte und verläuft mit dem endlichen Teil isoliert. Der andere Ast der Hyperbel gehört ganz zu den Gebieten II'_a und II'_b, demnach wird er von Systempunkten P des unteren Blattes von σ erzeugt, besteht aus lauter Knotenpunkten, liegt ganz reell auf der Fläche und enthält den Schnittpunkt der Doppelgeraden und des Doppelkegelschnittes.

Fällt l mit der η-Achse zusammen, dann rücken die Zwickpunkte ins Unendliche und der eine Ast der Hyperbel ist völlig isoliert.

Im Falle $\nu > n$ enthält auch die Doppelgerade zwei Zwickpunkte, deren Lage sich aus ihrer Projektion $x = 0$ in II'_a und deren Schnittpunkten mit p' ergeben. Der endliche Teil der Doppelgeraden ist isoliert. Ferner erstreckt sich jeder Ast der Doppelhyperbel über die ganze Ausdehnung der Ebene σ'; an der Entstehung des einen sind daher die Gebiete I_a und II_a, an der des anderen I_b und II_b von σ beteiligt. Der zweite Ast, welcher von Systempunkten in I_b und II_b herrührt, die ganz außerhalb des Bereiches der p-Kurve liegen, wird von lauter Knotenpunkten gebildet, gehört demnach der Fläche an. Der erste Ast dagegen enthält die Zwickpunkte und, im endlichen Teil zwischen ihnen, das isolierte Stück der Hyperbel, außerdem, da A in II_a liegt, ihren Schnittpunkt S_1 mit der Doppelgeraden. In derselben Weise wie in (6) folgt, daß S_1 auf die Fläche fällt, wenn l beim Durchgang durch A außerhalb der p-Kurve des unteren Blattes

bleibt, daß S_1 aber einen Punkt des isolierten Teiles der Hyperbel und damit auch der Doppelgeraden bildet, wenn l im unteren Blatt innerhalb der p-Kurve verläuft, d. h. in den Teilen, die auch die η-Achse enthält. Berührt l die p-Kurve in A, so rücken wie in § 6 der Punkt S_1 und der eine Zwickpunkt Z_1 der Doppelhyperbel zusammen. In σ' (Figur 11) ist S', die Projektion von S_1, der Schnittpunkt von $x = 0$, dem A entsprechenden Gebilde von σ', und von der Geraden l' durch A'. Die Projektion Z' von Z_1 ist der Schnittpunkt von l' und p'. Fällt nun Z' auf S', so muß die Projektion W' des einen Zwickpunktes der Doppelgeraden als Schnittpunkt von $x = 0$ und p' in denselben Punkt fallen. In der Tat ist nach § 10 tg $O'W'A' = \mp \frac{n}{\sqrt{v^2 - n^2}}$ ebenso groß wie der Richtungskoeffizient der Tangenten in A, also die Gerade $A'W'$ nach § 11 mit l' identisch. Es sind also auch hier wiederum ein Zwickpunkt der Doppelgeraden und des Doppelkegelschnittes in den Schnittpunkt beider Doppelgebilde hineingerückt.

Die Scheitelpunkte der Hyperbel werden von den Punkten von σ hervorgebracht, in denen l die Geraden g_a und g_b und, wenn $v < n$ ist, die Geraden g_1 und g_2 schneidet. Aus der Lage dieser Schnittpunkte in σ kann man ohne weiteres erkennen, daß der eine Scheitelpunkt stets einen Punkt der Fläche bildet, ferner ob er ein Zwickpunkt ist und ob der andere Scheitelpunkt der Hyperbel zum isolierten Teil der Doppelkurve gehört oder nicht.

Die einzige symmetrische Fläche mit Doppelgerade und Doppelkegelschnitt entsteht, wenn l mit der η-Achse zusammenfällt. Dann sind $\sin\vartheta$ und p Null; der Doppelkegelschnitt liegt in der xz-Ebene, der eine Ast ganz isoliert, der andere ganz auf der Fläche. Ihre Gleichung lautet nach § 9 und 15: $x^2y^2 + \{sz(sz - v) - x(x - n)\}^2 = y^2(sz - v)^2$. Der Schnitt mit der xz-Ebene ist der Doppelkegelschnitt. Der scheinbare Umriß in der xz-Ebene ist, wie bei allen Flächen dieses Kapitels, die Projektion des Kegelschnitts auf die xz-Ebene, in unserem Falle der Kegelschnitt selbst, und das doppelt zu zählende Strahlenbüschel, welches als Schnitt der xz-Ebene und des Büschels 1. Ordnung von Doppeltangentialebenen der Fläche mit der Doppelgeraden als Achse entsteht. Von diesem Strahlenbüschel zählen zum scheinbaren Umriß allerdings nur die beiden Strahlen, welche die reellen von den imaginären trennen, das sind die Projektionen derjenigen beiden Erzeugenden der Fläche, welche von der Doppelgeraden, also in der Projektion von $x = 0$, $sz = v$, nach den Zwickpunkten der Hyperbel, in unserem Falle parallel den Asymptoten gehen. Der Schnitt mit der yz-Ebene enthält die Doppelgerade und außerdem zwei Erzeugende, der Schnitt mit der Ebene $sz = v$ eben-

dieselbe Doppelgerade und einen auf dem isolierten Teil der Doppelhyperbel liegenden isolierten doppelt zu zählenden Punkt der Fläche.

Ist ferner $n = 0$, so fällt die Achse der Doppelhyperbel auf die z-Achse, die Fläche wird auch noch symmetrisch zur yz-Ebene. Daher wird der Büschel 2. Ordnung der Doppeltangentialebenen der Fläche ein Zylinder mit der Achse senkrecht zur yz-Ebene, und die Projektion der Fläche auf diese Ebene hat als scheinbaren Umriß eine Parabel und zwei Erzeugende als Tangenten dieser Parabel, außerdem die Doppelgerade.

Eine Fläche, die außer zur xz-Ebene noch symmetrisch zur xy-Ebene ist, entsteht, wenn $v = 0$ ist. Die Achse der Hyperbel ist dann die x-Achse. Der Büschel 2. Ordnung der Doppeltangentialebenen ist ein parabolischer Zylinder senkrecht zur xy-Ebene, der scheinbare Umriß in ihr die vollständige Parabel $y^2 = 4nx$, die von der $+\xi$-Achse umhüllt wird.

§ 18. Im allgemeinen Fall, wenn l weder durch A noch zur ξ-Achse parallel läuft, gibt unsere Bewegung der Geraden l_1 eine Fläche mit einer kubischen Hyperbel als Doppelkurve.

Alle Arten dieser Fläche, welche durch die Zahl und das Zusammenfallen der Zwickpunkte bedingt sind und welche wir mit dem vorigen Mechanismus erhalten haben, können wir auch hier durch passende Anordnung von l gegen die p-Kurve erzeugen. Der Fall, daß vier Zwickpunkte zusammenfallen, ist allerdings nicht erreichbar, da der Selbstberührungspunkt der p-Kurve, wenn er überhaupt reell ist, im Unendlichen liegt und die unendlich ferne Gerade zur Tangente hat, ebenso wenig können wir dahin gelangen, zweimal zwei Zwickpunkte zusammenrücken zu lassen, da dann l mit g_a zusammenfällt und statt der allgemeinen Doppelkurve eine Selbstberührungsgerade entsteht.

Dagegen können wir Flächen hervorbringen mit vier imaginären Zwickpunkten und ganz auf der Fläche verlaufender Doppelkurve, Flächen, die bei dem vorigen Mechanismus ausfielen, wenn wir l so legen, daß sie nicht durch die p-Kurve hindurchgeht. Dies ist, wenn $v > n$ ist, möglich, bei $v < n$ niemals möglich. Auch bei diesen letzten Flächen hat Rohn[1]) noch unterschieden zwischen solchen mit nur reellen und solchen mit reellen und ideellen Doppelsekanten der Raumkurve. Um die Möglichkeit der Entstehung beider Flächenformen zu zeigen, und um es in der Hand zu haben, die eine oder die andere Art entstehen zu lassen, betrachten wir die Kurve, in der der erzeugende Punkt mit einem der Doppelpunkte P_1' und P_2' zusammenfällt. Diese

1) Ebd. S. 302.

Kurve ist, in der Lage der Bewegung, wo die $+\xi$-Achse auf der $+x$-Achse, die $+\eta$-Achse auf der $+y$-Achse liegt, besonders einfach. Ihre Gleichung ergibt sich aus (7) S. 318, wenn man $\xi = x$, $\eta = y$ setzt, zu

$$\left(\xi - \frac{n}{2}\right)^2 - \left(\eta - \frac{\nu}{2}\right)^2 = \frac{n^2 - \nu^2}{2}$$

als die einer gleichseitigen Hyperbel (Fig. 8 u. 10). Schneidet l weder die Polkurve p noch die Hyperbel, so erhalten wir eine Fläche, die sicher ideelle Doppelsekanten hat. Schneidet l die Polkurve nicht, wohl aber die Hyperbel in dem Zweige, der ganz frei von der Polkurve liegt, so ergibt sich eine Fläche, deren Erzeugende sämtlich die Doppelkurve schneiden. Wir können nämlich durch Drehen von l um ihren einen Schnittpunkt mit der Hyperbel, bis l zur ξ-Achse parallel wird, zu einer Fläche mit zwei ganz auf ihr verlaufenden Geraden mit lauter reellen Sekanten gelangen. Wir schließen daraus, daß auch die Doppelkurve, aus der die Doppelgeraden entstanden sind, nur reelle Sekanten hat.

Im Falle von *vier reellen Zwickpunkten* können wir ähnliche Unterscheidungen, wie in § 8 machen. l kann auch bei vier Schnittpunkten mit p so angebracht werden, daß es die Hyperbel nicht schneidet, da der eine Scheitelpunkt der Hyperbel außerhalb des Stückes der Doppeltangente der p-Kurve liegt, welches sich zwischen den beiden Berührungspunkten befindet. Wenn l die Hyperbel schneidet, sind wir imstande zu bewirken, daß die Schnittpunkte von l mit der Hyperbel Doppelpunkte hervorbringen, die auf demselben Stück der Doppelkurve liegen. Wir brauchen l nur so zu legen, daß es die $+\eta$-Achse oberhalb A trifft. Schneidet l dagegen die η-Achse zwischen A und O, so fallen die beiden Doppelpunkte auf getrennte Stücke der Doppelkurve, nur in diesem Falle haben wir Flächen mit vier Zwickpunkten und ausschließlich solchen Erzeugenden, welche die Doppelkurve schneiden. Wenn zwei Zwickpunkte zusammenrücken, tritt gegen § 8 die Vervollständigung ein, daß Flächen mit ganz auf ihnen liegender Doppelkurve ebenfalls erzeugt werden können.

Durch die beiden in vorliegender Arbeit verwendeten Mechanismen können daher die reellen Regelflächen, welche Rohn aus der zwei-zweideutigen Verwandtschaft herleitet, in den verschiedenen von ihm aufgeführten Arten beschrieben werden mit folgenden Ausnahmen:

1. Bei den Flächen mit zwei Doppelgeraden oder einer Selbstberührungsgeraden oder zwei imaginären Doppelgeraden fehlen solche, bei denen außerdem nicht noch eine Doppelerzeugende vorhanden ist. Dies Ergebnis war von vornherein zu übersehen, da ja bei den Bahnkurven unserer Mechanismen stets drei Doppelpunkte vorhanden sind.

2. Bei den Flächen mit Doppelkegelschnitt und Doppelgerade fielen die aus, bei denen auf keinem der beiden Doppelgebilde Zwickpunkte vorkommen, und die Flächen, die Rohn nicht mit erwähnt, bei denen auf einem, aber nur auf einem Doppelgebilde ein Doppelzwickpunkt vorhanden ist. Flächen dieser Art entstehen nach Blake bei der Antiparallelogrammbewegung.

3. Bei den Flächen mit Doppelkurve 3. Ordnung sind alle Arten und Spezialfälle vertreten ausgenommen die Fläche mit vierfachem Zwickpunkt und reell auf ihr liegender Doppelkurve.

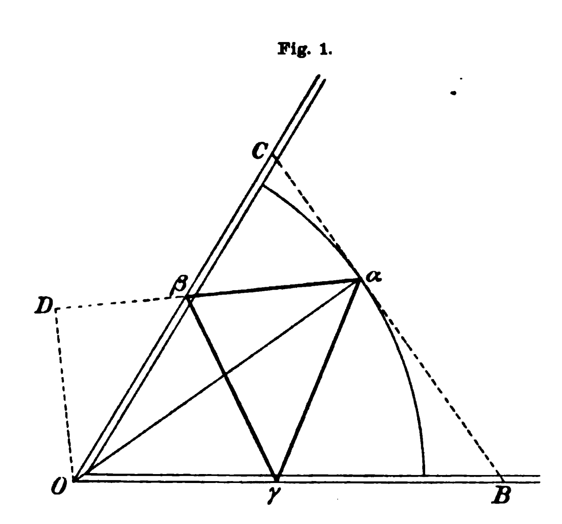
Die Flächen mit dreifacher Geraden können nicht gewonnen werden, da bei unseren Bahnkurven die drei Doppelpunkte nicht in einen zusammenfallen können.

Über eine neue geometrisch-mechanische Erzeugungsweise des Kreises und der sphärischen Kegelschnitte.

Von Felix Bernstein in Halle a. S.

1. Die kinematischen Erzeugungsweisen der einfachsten algebraischen Kurven haben von jeher das Interesse der Geometer auf sich gelenkt und zum Ausgangspunkt zahlreicher und wichtiger Untersuchungen gedient.

Fig. 1.



Die kinematische Erzeugung des Kreises, welche hier behandelt werden soll, scheint, obwohl sehr elementar und merkwürdig, bisher nicht gefunden worden zu sein.

Die Vorrichtung (Fig. 1.) besteht aus einem geschlossenen Faden von der unveränderlichen Länge $2s$ und zwei Stäben OB und OC, welche den *spitzen* Winkel $\sphericalangle COB = \zeta$ miteinander bilden.

Auf den Schenkeln OB und OC gleiten zweckmäßig zwei Ringe γ und β, durch welche der Faden geschlungen ist. Wird derselbe nun durch einen in α angehaltenen Schreibstift, der seinerseits an dem Faden entlang frei verschieblich ist, gespannt, so orientieren sich die Ringe γ und β auf den Schenkeln OB und OC, und es bleibt für den

Punkt α ein Grad der Freiheit. *Es bewegt sich der Punkt α auf einem Kreisbogen um O, welcher durch den Schreibstift aufgezeichnet wird.*

2. Zunächst wollen wir den Beweis geben, welcher durch die mechanische Betrachtung nahegelegt wird. Es sind die drei in den Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ entstehenden Fadenspannungen gleich; infolgedessen kann für die Ringe β und γ nur Gleichgewicht bestehen, wenn

$$\sphericalangle O\gamma\beta = \sphericalangle B\gamma\alpha \qquad (1)$$
$$\sphericalangle O\beta\gamma = \sphericalangle \alpha\beta C$$

ist. Es sind also $O\gamma B$ und $O\beta C$ Halbierende zweier Außenwinkel des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ und sie gehen daher mit der Halbierenden des dritten Dreieckswinkels $\sphericalangle \beta\alpha\gamma$ zusammen durch den festen Punkt O. Die Resultante der beiden gleichen auf α wirkenden Fadenspannungen liegt in der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle \beta\alpha\gamma$ und geht also stets durch O. Die Verschiebung von α erfolgt nun ohne Arbeitsaufwand, da der Faden seine Länge $2s$ nicht ändert. Der Weg ist also stets senkrecht zu $O\alpha$ und daher ein Kreis um O.

3. Für einen rein geometrischen Beweis müssen wir die Bedingungen (1) und außerdem die Beziehungen

$$\overline{\alpha\beta} + \overline{\beta\gamma} + \overline{\gamma\alpha} = 2s, \qquad (2)$$
$$\sphericalangle \beta O\gamma = \zeta < R, \qquad (3)$$

zugrunde legen.

Es ist

$$\frac{\hat{\alpha}}{2} = R - \frac{\hat{\beta} + \hat{\gamma}}{2};$$
$$R - \frac{\hat{\beta}}{2} = \sphericalangle O\beta\gamma$$
$$R - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle O\gamma\beta$$
$$\underline{\sphericalangle O\beta\gamma + \sphericalangle O\gamma\beta = 2R - \sphericalangle \beta O\gamma}$$

also

$$\frac{\hat{\alpha}}{2} = R - \sphericalangle \beta O\gamma = R - \zeta. \qquad (4)$$

Es ist also α während der Bewegung konstant.

Fällt man von O ein Lot OD auf $\alpha\beta$, so ist, da O Mittelpunkt des an $\beta\gamma$ anbeschriebenen Kreises ist, bekanntlich

$$\alpha D = s;$$

und also

$$\overline{O\alpha} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = s.$$

Also ist, wenn wir $\overline{O\alpha} = r$ setzen, mit Rücksicht auf (4)

$$r \sin \zeta = s. \tag{I}$$

Bei konstantem ζ und s ist also r konstant.

Aus der Gleichung (4) folgt, daß α dann und nur dann von Null verschieden sein kann, wenn

$$R - \zeta > 0$$

ist, was nach Voraussetzung der Fall ist.

Wenn

$$R = \zeta$$

ist, so ist $\alpha = 0$ und β und γ fallen in O zusammen.

In diesem Falle geht die Kreiserzeugung in die gewöhnliche über, in der der Kreis mittels eines — hier doppelt genommenen — Fadens konstanter Länge beschrieben wird.

Wird ζ weiter vergrößert, so bleiben β und γ in 0. Es gibt keine andere Gleichgewichtsfigur, wie man sich leicht überzeugt, und es bleibt auch in diesem Fall bei der gewöhnlichen Kreiserzeugung.

4. Wenn man bei gegebenem α die Punkte β und γ finden will, so errichtet man am einfachsten in α auf $O\alpha$ das Lot und bringt es in B und C mit OB und OC zum Schnitt. Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ist dann in dem spitzwinkligen Dreieck OBC *das Dreieck der Höhenfußpunkte* und demgemäß sind dann β und γ die Fußpunkte der von B und C auf OC und OB gefällten Lote.

Unter allen Dreiecken, welche einem spitzwinkligen Dreieck OBC einbeschrieben sind, hat das Dreieck der Höhenfußpunkte die kleinste Seitensumme. Dies ist zuerst von J. Steiner (Werke, Bd. II, S. 45, No. 7 u. S. 238, No. 64. II, 3) bemerkt worden. Einen eleganten Beweis des Satzes hat H. A. Schwarz (Ges. Math. Abhandlungen. Bd. II, S. 344) gegeben. Endlich hat R. Sturm (Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätzen über Maximum und Minimum, Crelle Bd. 96 p. 62) gezeigt, daß in einem stumpfwinkligen Dreieck das Lot von der stumpfen Ecke auf die Gegenseite die Minimalfigur darstellt. Man kann sich vorstellen, daß der Streckenzug $\alpha\beta\gamma$ der Weg eines Lichtstrahls ist, der gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung den kürzesten Weg zwischen den spiegelnden Graden OB, BC, CO einschlägt. Aus dieser Vorstellung ist wohl der Schwarzsche Spiegelungsbeweis hervorgegangen. Man kann jedoch auch, wie es in unserer Betrachtung naheliegt, die Vorstellung eines elastischen gespannten Fadens $\alpha\beta\gamma$ heranziehen, dessen Ecken α, β, γ resp. auf den Seiten OB, BC, CO gleiten.

Wie ersichtlich kann Gleichgewicht nur eintreten, wenn einerseits die Fadenlänge ein Minimum ist, andererseits wenn auf die Ecken des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ gleiche Kräfte wirken und also die Fäden, die in einer Ecke zusammenlaufen, gleiche Winkel mit den entsprechenden Seiten des festen Dreiecks OBC bilden. Es ist also notwendig, daß OB, BC, CO Halbierende der Außenwinkel des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ sind, und das letztere ist daher in OBC das Dreieck der Höhenfußpunkte. Bekanntlich ist diese Analogie zwischen statischem und dynamischem Problem ein Spezialfall der allgemeinen von Möbius (Statik 2. Teil) entdeckten Analogie.

5. Allgemein bekannt ist die Erzeugung der Ellipse mittels des gespannten Fadens der Länge $2s$, welcher um die Brennpunkte geschlungen ist. Steht diese nun in irgend einem Zusammenhang mit unserer Kreiserzeugung? Einen solchen Zusammenhang habe ich durch räumliche Betrachtung hergestellt.

Fig. 2.

Wir untersuchen die Bewegung des Punktes α, wenn er die Ebene OBC verläßt. (Fig. 2).

Wir wollen den Winkel $\beta O\gamma$ mit ζ, den Winkel $\alpha O\beta$ mit η und den Winkel $\alpha O\gamma$ mit θ bezeichnen.

Es ist dann wieder

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \sphericalangle\, O\gamma\beta &= \sphericalangle\, \alpha\gamma B, \\ \sphericalangle\, O\beta\gamma &= \sphericalangle\, \alpha\beta C; \end{aligned}$$

und

$$\text{(2)} \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = 2s.$$

Wir nehmen zunächst an, es existiere eine Gleichgewichtsfigur $\alpha\beta\gamma$, deren drei Punkte α, β, γ auf $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ liegen.

Da

$$\sphericalangle\, O\alpha\gamma = \sphericalangle\, \alpha\gamma B - \sphericalangle\, \alpha O\gamma = \sphericalangle\, \alpha\gamma B - \theta,$$

und ebenso

$$\sphericalangle\, O\alpha\beta = \sphericalangle\, \alpha\beta C - \sphericalangle\, \alpha O\beta = \sphericalangle\, \alpha\beta C - \eta$$

ist, und ferner infolge von (1)

$$\sphericalangle\, \alpha\gamma B + \sphericalangle\, \alpha\beta C = 2R - \zeta$$

ist, so folgt

$$\sphericalangle\, O\alpha\gamma + \sphericalangle\, O\alpha\beta = 2R - (\zeta + \theta + \eta).$$

Damit also

$$\sphericalangle\, O\alpha\gamma + \sphericalangle\, O\alpha\beta > 0$$

sei, muß

(3) $$2R > \zeta + \theta + \eta$$

sein. Diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend, wie später gezeigt wird.

Wir projizieren den Punkt O senkrecht auf die Ebene $\alpha\beta\gamma$. Die Projektion O^* wird der Mittelpunkt des dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ an der Seite $\beta\gamma$ anbeschriebenen Kreises sein, da offenbar $O\beta$ und $O\gamma$ sich als Winkelhalbierende der Außenwinkel in β und γ projizieren.

Dementsprechend ist auch

$$\sphericalangle O^*\alpha\gamma = \sphericalangle O^*\alpha\beta$$

und somit

(4) $$\sphericalangle O\alpha\gamma = \sphericalangle O\alpha\beta,$$

also

(5) $$\sphericalangle O\alpha\beta = R - \frac{\zeta + \theta + \eta}{2}.$$

Bedeutet D den Fußpunkt des von O auf $\alpha\beta$ gefällten Lotes, so ist dasselbe zugleich Fußpunkt des von O^* auf $\alpha\beta$ gefällten Lotes, und also ist

(6) $$\overline{\alpha D} = s.$$

Ferner ist

$$s = \overline{\alpha D} = \overline{O\alpha} \cdot \cos O\alpha\beta,$$

oder

(II) $$s = r \sin \frac{\zeta + \theta + \eta}{2}.$$

Die Gleichung (II) *lehrt, daß bei konstantem s und bei konstanter der Bedingung* (3) *genügender Summe $2\sigma = \zeta + \eta + \theta$ der Punkt α sich auf einer Kugeloberfläche vom Radius r bewegt. Er beschreibt dort einen sphärischen Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Schnittpunkte B und Γ von OB und OC mit der Kugeloberfläche sind.*

Man realisiert diese Erzeugung, indem man einen in O mittels Universalgelenk frei drehbaren Stab $O\alpha$ von der Länge r anbringt, dessen Länge sich durch Ausziehen einer Hülse variieren läßt und der an seinem Ende einen Ring trägt, durch den die Schnur laufen kann.

Man hat in dieser Erzeugung ein bequemes Mittel, einen sphärischen Kegelschnitt auf das *Innere* einer Kugeloberfläche zu zeichnen, während bei der gewöhnlichen Erzeugung des Kegelschnitts auf der Sphäre nur auf der Außenfläche gezeichnet werden kann, da die sämtlichen Seiten des Fadendreiecks $B\Gamma\alpha$ von der Länge 2σ durch den Widerstand der Oberfläche die Krümmung erhalten. Wir wollen die hier gegebene Erzeugung mittels eines gradlinigen Fadendreiecks mit

beweglichen Ecken als *innere* Erzeugung, die andere als *äußere* Erzeugung des sphärischen Kegelschnitts bezeichnen.

Beide Erzeugungen werden identisch, wenn wir O ins Unendliche rücken lassen und gehen in die ebene Erzeugung der Ellipse mittels des Fadendreiecks von konstanter Länge über.

Unsere Kreiserzeugung entspricht dem Grenzfall der Erzeugung sphärischer Ellipsen, nämlich dem Fall, wo die Ellipse die doppelt durchlaufene Entfernung der Brennpunkte wird.

6. Es erübrigt noch zu bemerken, daß die Bedingung (3) *hinreichend* dafür ist, daß eine Gleichgewichtsfigur mit getrennten α, β und γ besteht. In der Tat, aus (II) ergibt sich bei gegebenem s sofort r und somit bei gegebenem ζ, η und θ auch der Punkt α. Von α aus werden die Winkel $\alpha O \beta$ und $\alpha O \gamma$ gleich $R - \frac{\zeta + \theta + \eta}{2}$ angetragen, woraus sich β und γ ergeben.

Wird
$$2R = \zeta + \theta + \eta,$$
so wird
$$\sphericalangle\, \alpha O \beta = \sphericalangle\, \alpha O \gamma = 0$$
und β und γ fallen in O zusammen. Wir haben dann für die Lage von α eine Kugelfläche vom Radius s.

Ist
$$2R < \zeta + \theta + \eta,$$
so bleiben β und γ in O, und es bleibt bei der Erzeugung einer Kugeloberfläche mittels eines doppelt genommenen Fadens.

Halle a. S., den 1. Dezember 1904.

Bücherschau.

L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. II. Teil enthaltend: Die Wirkungsprinzipe, die Lagrangeschen Gleichungen und deren Anwendungen. Leipzig, J. A. Barth, 1904. X u. 336 S.

Dem ersten 1897 erschienenen Bande, von dem man in Band 44 dieser Zeitschrift (Hist.-Lit. Abt. S. 172) eine Anzeige findet, ist nach längerer Pause der zweite gefolgt, in dem dieselben Bestrebungen zum Ausdruck kommen, die sich bereits in dem ersten geltend machen, nämlich einenteils die Darstellung der Mechanik in ihrer alten, klassischen Form möglichst beizubehalten, jedoch die Dunkelheiten, die die moderne Kritik mit Recht gerügt hat, zu vermeiden und die Sätze möglichst zu präzisieren, anderen-

teils Gewicht auf den physikalischen Sinn und den Zusammenhang mit der theoretischen Physik zu legen; verdankt doch das ganze Werk seine Entstehung dem Umstande, daß Herr Boltzmann die für den zweiten Teil der Gastheorie erforderlichen Einschaltungen über Mechanik ihres großen Umfanges wegen in ein selbständiges Buch verwiesen hat.

Der Zusammenhang mit der Physik tritt besonders in diesem zweiten Teile hervor, in dem der Verfasser sich die Behandlung des Prinzipes der kleinsten Wirkung, der Hamiltonschen Prinzipe sowie der damit zusammenhängenden Arbeiten von Helmholtz, Hölder, Voß und anderen zur Aufgabe gemacht hat, wobei die Beziehungen der Wirkungsprinzipe zur Gastheorie, Wärmetheorie und Elektrizitätslehre sowie die Sätze von Maxwell, Helmholtz und Hertz über zyklische Systeme Berücksichtigung gefunden haben. Von großem Interesse sind die Ausführungen in § 35, wo Herr Boltzmann seine Ansichten über die Stellung der Mechanik zur Physik entwickelt.

Zu der allmähligen Ausbildung der Mechanik in ihrer heutigen Gestalt habe, offener oder versteckter, die Vorstellung von Zentrikräften zwischen materiellen Punkten geführt. Daraus dürfe man jedoch nicht den Schluß ziehen, daß diese Vorstellung deswegen auch immer deren Basis bleiben müsse. Es könnten vielmehr die Prinzipien der Mechanik ebenfalls unter Bedingungen gelten, die sich nicht durch Zentrikräfte realisieren lassen, man könnte also die Vorstellung der Zentrikräfte ganz fallen lassen und an ihrer Stelle irgend eines der allgemeinen Prinzipe zur Grundlage der Mechanik machen, zum Beispiel das Prinzip der stationären Wirkung, das die Gleichungen der Mechanik in ihrer Gesamtheit liefert. Dabei könnte sogar der Fall ins Auge gefaßt werden, daß der Zustand von Systemen durch andere Koordinaten bestimmt sei, als solchen, welche die Lage im Raume angeben, man könnte also als generalisierte Koordinaten etwa die Temperatur, den elektrischen Zustand usw. nehmen. Um das Auftreten solcher Gleichungen, die denen der Mechanik analog sind, in der Theorie der Wärme, der Elektrizität usw. zu erklären, bestehe die Möglichkeit, diese Phänomene durch verborgene mechanische Bewegung verursacht zu denken. Es wäre sicher klarer, wenn wir nicht nur alle Bewegungserscheinungen an festen, tropfbaren und gasförmigen Körpern, sondern auch Wärme, Licht, Elektrizität, Magnetismus, Gravitation, alles durch ein einheitliches Prinzip erklären könnten, als wenn wir für jedes dieser Agentien wieder ein ganzes Inventar vollkommen fremdartiger Begriffe wie Temperatur, elektrische Ladung, Potential usw. brauchen. Freilich gebe er gern zu, daß es vermessen sei zu hoffen, daß das heutige mechanische Weltbild sich in alle Ewigkeit erhalten werde, und er sei daher weit entfernt, von Versuchen, allgemeinere Gleichungen zu suchen, von denen die mechanischen nur spezielle Fälle sind, gering zu denken. Nur dem Leichtsinn möchte er entgegenarbeiten, der, bevor ein anderes derartiges Weltbild von der ersten Grundlage bis zur Anwendung auf die wichtigsten Erscheinungen, die schon solange durch das alte Weltbild erschöpfend dargestellt sind, detailliert ausgearbeitet vorliegt, ja ohne von den Schwierigkeiten der Konstruktion desselben eine Ahnung zu haben, das alte Weltbild der Mechanik für einen überwundenen Standpunkt erklärt. Vor allem dürfe man, wenn man das Bild materieller Punkte vermeiden wollte, nicht doch wieder später materielle Punkte einführen, sondern man

müsse von anders beschaffenen Einzelwesen oder Elementen ausgehen, deren Eigenschaften so klar wie die der materiellen Punkte zu schildern wären.

„Ich schrieb das Vorstehende vor etwa sieben Jahren nieder", schließt Herr Boltzmann. „Was ich dort nach Jahrhunderten oder nach Jahrtausenden erwartete, ist in sieben Jahren zur Hälfte geschehen. Aber nicht von der Energetik, nicht von der Phänomenologie ging der Hoffnungsstrahl einer nichtmechanischen Naturerklärung aus, sondern von einer Atomtheorie, die in phantastischen Hypothesen die alte Atomtheorie ebenso übertrifft, wie ihre Elementargebilde an Kleinheit die alten Atome übertreffen. Ich brauche nicht zu sagen, daß ich die moderne Elektronentheorie meine. Diese strebt gewiß nicht, die Begriffe der Masse und Kraft, das Trägheitsgesetz usw. aus Einfacherem, leichter Verständlichem zu erklären, ihre einfachsten Grundbegriffe und Gesetze werden sicher ebenso unerklärlich bleiben, wie für das mechanische Weltbild die Mechanik. Aber der Vorteil, die gesammte Mechanik aus anderen, für die Erklärung des Elektromagnetismus ohnehin notwendigen Vorstellungen ableiten zu können, wäre ebenso groß, als wenn umgekehrt die elektromagnetischen Erscheinungen mechanisch erklärt werden könnten. Möge das erstere gelingen und dabei meine vor sieben Jahren gestellte Forderung erfüllt werden!"

Vielleicht bietet der in Aussicht gestellte dritte Teil, der die Elastizitätslehre und die Hydrodynamik behandeln soll, Herrn Boltzmann Gelegenheit, in einigen Jahren auf die elektromagnetische Begründung der Mechanik zurückzukommen, deren Durchführung inzwischen erhebliche Fortschritte gemacht hat und wohl auch weiter machen wird.

Kiel. PAUL STÄCKEL.

Astronomischer Kalender für 1905. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. 8⁰. 138 S. Wien, K. Gerolds Sohn. Pr. kart. 2.40 M.

Inhalt und Anordnung des Kalenders sind unverändert geblieben (vgl. diese Ztschr. Bd. 51, p. 171). Unter den Anlagen ist die bemerkenswerteste Nr. VIII: Die Figur der Planeten auf Grund der Theorien über das Gleichgewicht rotierender Flüssigkeitsmassen, von A. Prey. Der Aufsatz enthält eine gemeinverständliche Darstellung der Lehre von den rotierenden Gleichgewichtsfiguren. Die Disposition folgt der historischen Entwickelung, mit Maclaurin und d'Alembert anfangend bis auf die Darwin-Poincaréschen Theorien unserer Tage; weder die Korrektheit der Fassung noch die Zahl der Quellennachweise läßt zu wünschen übrig.

Straßburg i. E. C. W. WIRTZ.

G. Kewitsch, Zweifel an der astronomischen und geometrischen Grundlage des 60-Systems. 8⁰. 23 S. Ztschr. f. Assyriologie. Bd. 18. Straßburg 1904.

Die Zweifel, die Herr Kewitsch gegen die astronomische und geometrische Entstehung des Sexagesimalsystems erhebt, gründen sich auf die Überlegung, daß Zählen dem Messen voranging und daß man einem Naturmaße zu liebe nie daran denken würde, das einmal entwickelte Zählsystem aufzugeben.

Mit Tatsachen aus Ethnologie und Philologie belegt der Verf. seine These, daß auch das Zählsystem der Babylonier, gleich dem der heutigen unkultivierten Völker, aus dem reinen Fingerzählen entstand; für die Art dieses Fingerzählens werden zwei durch Argumente aus Völkerkunde und Sprache gestützte Möglichkeiten offen gelassen. Es ist u. E. nicht leicht, den überzeugenden Darlegungen des Aufsatzes gleich stichhaltige Einwände entgegenzusetzen.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

Neue Bücher.[1])

Arithmetik und Analysis.

1. Biermann, Otto, Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8; geb. in Leinw. M. 8.80.
2. Neumann, Ernst Richard, Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. (Preisschriften der Fürstl. Jablonowskischen Gesellsch. Nr. XXXVII.) Leipzig, Teubner.

Astronomie und Geodäsie.

3. Marcuse, Adolf, Handbuch der geographischen Ortsbestimmung für Geographen und Forschungsreisende. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
4. Schmehl, Chr., Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. Gießen, Roth. M. 1.60; geb. M. 2.

Graphische Methoden.

5. Poussin, R., Sur l'application des procédés graphiques aux calculs d'assurances. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 10.

S. auch Nr. 1.

Geschichte und Biographien.

6. Lampe, E., Guido Hauck. Rede zur Gedächnisfeier für Guido Hauck am 17. Mai 1905 in der Halle der technischen Hochschule zu Charlottenburg. (Sonderabdruck aus dem 14. Band des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.) Nebst der Rede am Sarge in der Halle des Friedhofes der Zwölfapostelgemeinde, gehalten am 28. Januar 1905 von A. Parisius. Mit einem Bildnis von G. Hauck als Titelbild. Leipzig, Teubner.

Kristallographie.

7. Baumhauer, H., Die neuere Entwicklung der Kristallographie. („Die Wissenschaft" Heft 7.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4; geb. in Leinw. M. 4.60.

Mechanik.

8. Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. 3. Bd. Festigkeitslehre. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.
9. Gibbs, J. Willard, Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik, ent-

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

wickelt besonders im Hinblick auf eine rationelle Begründung der Thermodynamik. Deutsch bearb. v. E. Zermelo. Leipzig, Barth. M. 10.—; geb. in Leinw. M. 11.

10. HELLER, A. H., Stresses in structures and the accompanying deformations. Columbus, O. Heller. $ 2.50.
11. SACHS, L., Zur Berechnung räumlicher Fachwerke. Allgemeine Formeln für statisch bestimmte und insbesondere statisch unbestimmte Kuppel-, Zelt- und Turmdächer. Berlin, Ernst & Sohn. M. 2.50.
12. VIDAL, L., Manuel pratique de cinématique navale et maritime, à l'usage de la marine de guerre et de la marine de commerce. Paris, Gauthiers-Villars. Frs. 7.50.

S. auch Nr. 2.

Physik und Meteorologie.

13. BRAUN, FERD., Über drahtlose Telegraphie und neuere physikalische Forschungen. Rektoratsrede. Straßburg, Heitz. M. 1.20.
14. CHWOLSON, O. D., Lehrbuch der Physik, übersetzt von E. Berg. 3. Bd. Die Lehre von der Wärme. Braunschweig, Vieweg & Sohn.
15. FORTSCHRITTE, die, der Physik im J. 1904. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellsch. 60. Jahrg. 1. Abtlg. Allgem. Physik, Akustik, physikal. Chemie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 30.
16. MACK, KARL, Physikalische Hypothesen und ihre Wandlungen. Akademische Festrede. Mit Anmerkungen und Literaturnachweisen. Leipzig, Barth. M. 1.
17. RÜMELIN, GUST., Über die Verdünnungswärme konzentrierter Lösungen. Diss. Freiburg i. B., Speyer & Kärner. M. 1.
18. SCHWARZSCHILD, K., Untersuchungen zur geometrischen Optik. I. Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs. II. Theorie der Spiegelteleskope. (Abh. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse, Neue Folge. Bd. IV Nr. 1 u. 2.) Berlin, Weidmann. Je M. 2.
19. TRABERT, WILHELM, Meteorologie u. Klimatologie. („Die Erdkunde", XIII. Teil.) Leipzig u. Wien, Deuticke. Preis für Abnehmer des ganzen Werkes M. 4, für den Einzelverkauf M. 5.
20. WINKELMANN, A., Handbuch der Physik. 2. Aufl. IV. Bd. 2. Hälfte. Elektrizität u. Magnetismus. I. Leipzig, Barth. M. 20.

S. auch Nr. 2, 7, 9.

Tafeln.

21. REX, FRDR. WILH., Vierstellige Logarithmen-Tafeln. Schul-Ausg. 2. Aufl. Stuttgart, Metzler. M. —.60.
22. RÜHLMANN, M. u. M. R., Logarithmisch-trigonometrische u. andere f. Rechner nützliche Tafeln, zunächst f. Techniker sowie f. den Schulgebrauch u. f. praktische Rechner überhaupt. 13., verm. u. verb. Aufl. Leipzig, Klinkhardt. geb. in Leinw. M. 2.50.
23. WEGENER, A., Die Afonsinischen Tafeln f. den Gebrauch eines modernen Rechners. Diss. Berlin.

S. auch Nr. 5.

Verschiedenes.

24. BELL, W. W., Mathematical recreations and essays. 4th ed. London, Macmillan. 7 s.
25. NEUMAYER, G. VON, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. Unter Mitwirkung zahlreicher Gelehrter hrsg. In zwei Bänden. 3. Aufl. (In etwa 12 Lfgn. zu 3 M.) Hannover, Jänecke.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Ambronn, L., Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Repsoldschen 6-zöll. Heliometer der Sternwarte zu Göttingen, ausgeführt von W. Schur u. L. Ambronn. (Abh. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse, Neue Folge Bd. III Nr. 3.) Berlin, Weidmann. M. 12.

Baumhauer, H., Die neuere Entwicklung der Kristallographie, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 7.

Biermann, O., Mathematische Näherungsmethoden, s. N. B. 1.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik, 3. Bd., s. N. B. 14.

Föppl, A., Technische Mechanik, 3. Bd., s. N. B. 8.

Fricke, Robert, Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. Als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 4. Aufl. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 5; geb. M. 5.80.

Hecker, O., Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1904. (Veröffentlichung des Kgl. Preuß. geodät. Instituts Neue Folge Nr. 21.) Berlin, Stankiewicz.

Lampe, E., Guido Hauck, s. N. B. 6.

Marcuse, A., Handbuch der geographischen Ortsbestimmung, s. N. B. 3.

Neumann, E. R., Studien über die Methoden von C. Neumann u. G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie, s. N. B. 2.

Neumayer, v., Anleitung zu wissenschaftl. Beobachtungen auf Reisen, Lfg. 2, s. N. B. 25.

Polhöhe von Potsdam, die, III. Heft. (Veröffentlichung des Kgl. Preuß. geodätischen Instituts, Neue Folge Nr. 20.) Berlin, Stankiewicz.

Rühlmann, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, s. N. B. 22.

Schmehl, Chr., Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie, s. N. B. 4.

Schulze, Edmund, u. Pahl, Franz, Mathematische Aufgaben. Ausgabe f. Gymnasien. 1. Teil. Aufgaben aus der Planimetrie u. Arithmetik f. die Unterstufe (Quarta bis Untersekunda einschl.). Leipzig, Dürr. geb. in Leinw. M. 2.40.

Schwarzschild, K., Untersuchungen zur geometrischen Optik, I. u. II., s. N. B. 18.

Trabert, W., Meteorologie u. Klimatologie, s. N. B. 19.

Berichtigung.

In der Abhandlung: „Spannungen und Formänderungen einer rotierenden Hohl- und Vollkugel" von Ing. A. V. Leon in Bd. 52 Heft 2 dieser Zeitschr. muß Satz IV auf S. 174, Z. 16—24 v. o. gestrichen werden. Er ist der Schriftleitung schon vor längerer Zeit vom Verfasser als unrichtig bezeichnet worden, aber aus Versehen stehen geblieben.

Title Page

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN

52. BAND. 4. HEFT.

MIT 40 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 2. Januar 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart, Weißenburgstraße 29

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

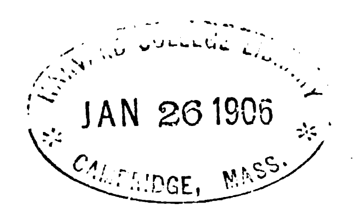
☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

O. Biermann, N. Delaunay, K. Doehlemann, P. Ernst, R. Girtler, A. Grünwald, A. Leon, M. Lerch, R. Mehmke, G. Mie, K. Nitz, M. Radaković, C. Runge, R. Schimmack, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, A. Timpe, Th. Weitbrecht, S. Wellisch, K. Wieghardt, C. W. Wirtz, F. Wittenbauer, A. Wlassow, R. Wölffing.



Ein kinematisches Prinzip und seine Anwendung zu einem Katenographen.

Von Rudolf Schimmack in Göttingen.

Es ist bekannt, daß eine Rolle von horizontaler Achsenstellung, welche mit ihrem messerscharfen Rande in die horizontale Ebene des Zeichenpapiers ein wenig eingepreßt wird, bei ihrer Bewegung in jedem Augenblick nur in Richtung ihrer eigenen Drehungsebene rollen kann. Aus der mehrfachen sinnreichen Verwendung dieser scharfrandigen Rolle bei der Konstruktion kinematischer Apparate[1]) ergab sich die Anregung, durch Kombinationen mehrerer solcher Rollen nach neuen Möglichkeiten zu suchen.[2]) Im folgenden soll von einer besonderen Art der Kombination zweier Rollen die Rede sein, die anscheinend ein spezielles Interesse verdient; sie weist nämlich einen *Weg zur Konstruktion mehrerer neuer Apparate für kinematische Erzeugungen von Kurven.*

---

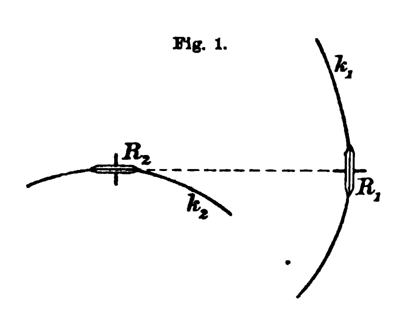
1) Nach Mitteilung von Herrn Prof. R. Mehmke hat schon Giov. Poleni 1729 eine scharfrandige Rolle zur Konstruktion seines Traktoriographen benutzt; Zeitschrift f. Math. u. Phys. 43 (1898), S. 317. Von neueren Apparaten, die ebenfalls wesentlich auf dem Prinzip der scharfrandigen Rolle beruhen, sei ein (weniger bekanntes) Planimeter von J. Amsler und der Integraph von Abdank-Abakanowicz angeführt. Vgl. J. Amsler, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter, Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. in Zürich 1 (1856), S. 41—70, 101—140, bes. 60; Br. Abdank-Abakanowicz, die Integraphen, die Integralkurve und ihre Anwendungen, deutsch bearb. von E. Bitterli, Leipzig (Teubner) 1889; die neueste Form des Integraphen ist in der von der Firma G. Coradi-Zürich herausgegebenen Broschüre beschrieben: H. Lossier, L'Intégraphe Abdank-Abakanowicz, 1903, sowie in dem Referat von Hammer über diese Broschüre, Zeitschrift für Instrumentenkunde 24 (1904), S. 213—217.

2) Herr Geheimrat F. Klein hat in einer Vorlesung (vom Sommer 1897) die Idee angegeben, daß man mittels mehrerer Integraphen, deren Laufschlitten in geeigneter Weise miteinander verbunden werden, Apparate zur Integration irgendwelcher spezieller gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung müsse konstruieren können.

1. Das Prinzip der Rollenkoppel und die Idee eines Katenographen.

Es mögen zwei Rollen der oben geschilderten Art R_1, R_2 so miteinander verbunden sein, daß *die Achse der Rolle R_1 beständig in die Ebene der Rolle R_2 fällt* (Fig. 1), während der Abstand $\overline{R_1R_2}$ der Mittelpunkte beider Rollen zunächst beliebig veränderlich sein mag. Läßt man ein solches System — wir mögen es kurz eine „Rollenkoppel" nennen — sich auf der Zeichenebene bewegen, so beschreiben die Rollen R_1, R_2 je eine Kurve k_1, k_2, und zwar in folgender charakteristischen Weise. In jedem Augenblick ist, wie unmittelbar einleuchtet, der Ort von R_2 der Krümmungsmittelpunkt der Kurve k_1 für den instantanen Ort von R_1, der Abstand $\overline{R_1R_2}$ allemal der zugehörige Krümmungsradius ϱ der Kurve k_1; die Kurve k_2 stellt die Evolute der Kurve k_1 dar. Wir formulieren also den Satz:

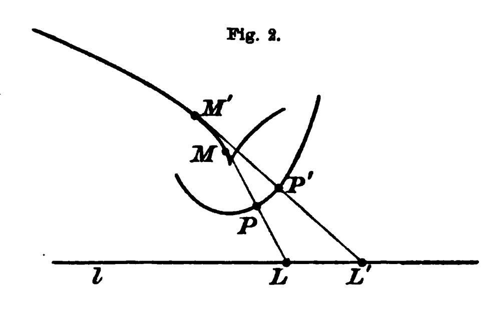
Fig. 1.



Unsere Rollenkoppel hat die Eigenschaft, sich nur so bewegen zu können, daß der Abstand $\overline{R_1R_2}$ fortgesetzt den Krümmungsradius der von R_1 durchlaufenen Kurve darstellt.

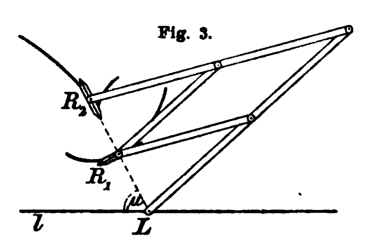
Das hiermit gewonnene kinematische Prinzip findet eine einfache Anwendung zur Konstruktion eines Apparates, der Kettenlinien zeichnet: eines Katenographen. Es wird dabei von der bekannten Eigenschaft der Kettenlinie Gebrauch gemacht, daß für jede Stelle ihr Krümmungsradius gleich ist dem Stücke der Normalen, das zwischen der Kurve und ihrer Leitlinie liegt. Man betrachte in der Fig. 2 die Gleichheit der Strecken MP und PL, bezw. $M'P'$ und $P'L'$.

Fig. 2.



Denken wir uns jetzt auf diese Figur die vorhin betrachtete Rollenkoppel aufgesetzt, und zwar so, daß sich die Rolle R_1 im Punkte P, die Rolle R_2 im Punkte M befindet; dann wird R_1 offenbar zwangläufig auf der Kettenlinie entlangrollen, wenn wir Sorge tragen, daß der Punkt L, der ja in jeder Lage der Koppel (durch die Verlängerung der Strecke $\overline{MP}$ über P hinaus um sich selbst) *ideell bestimmt* ist, sich nur auf der Leitgeraden l bewegen kann. Dies gelingt nun sehr

einfach dadurch, daß wir in der Weise, wie es die Fig. 3 andeutet, mittels eines Storchschnabels für den Punkt L eine *kinematische Realisierung* schaffen, und dann den in diesem Punkte befindlichen Fahrstift auf der Geraden l entlang führen.



In dieser Vereinigung unserer Rollenkoppel mit dem Storchschnabel haben wir daher einen Apparat, der mit seiner Rolle R_1 *unsere Kettenlinie beschreibt.* Von einer beliebigen Anfangslage aus erhalten wir stets Kettenlinien, sobald wir den Fahrstift in L auf einer Geraden bewegen. Und der Apparat gestattet offenbar im Prinzip auch *jede* Kettenlinie zu zeichnen. Schreiben wir etwa die Leitlinie l und den Wert des Parameters a (Abstand des Scheitels von der Leitlinie) vor, so ergibt sich für die Anfangseinstellung des Apparates die Bedingung:

$$\varrho \sin^2 \mu = a,$$

worin ϱ den Abstand der Rollen $\overline{R_1 R_2}$ und μ den Winkel der geradlinigen Verbindung $\overline{R_2 L}$ mit der Leitlinie l (Fig. 3) bei der Einstellung bedeutet.

2. Die technische Ausführung des Katenographen.

Die Fig. 4 zeigt den Katenographen in fertiger Ausführung.[1]) Wir sehen zunächst den Storchschnabel mit seinen vier Gelenkpunkten A, B, C, D und seinen beiden freien Enden E, F; der Punkt B halbiert die Strecke $\overline{AE}$, D die Strecke $\overline{AF}$.

In den Gelenken bei A, B und D bewegt sich jedesmal der eine Stab zwischen zwei einander gegenüberstehenden Spitzenschrauben, die der andre Stab mittels eines Bügels trägt.

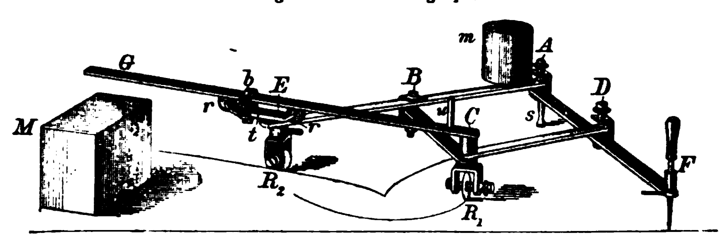
Das Gelenk bei C wird durch eine *drehbare vertikale Achse* gebildet, welche die hier zusammentreffenden Stäbe BC und DC durchbohrt. Diese Achse trägt an ihrem unteren Ende die Gabel, in der die scharfrandige Rolle R_1 läuft; am oberen Ende ist sie mit einer horizontalen Lenkstange CG starr verbunden, von der wir sogleich noch reden werden.

1) Der hier abgebildete Apparat ist nach den Angaben des Verf. von der „Mechanischen Werkstätte Spindler & Hoyer“ in Göttingen mit Sorgfalt ausgeführt worden und funktioniert gut. Er war bereits auf dem *III. Internationalen Mathematikerkongreß* zu Heidelberg, im August 1904, ausgestellt und ist seither nur in einigen technischen Details abgeändert worden. (Wegen etwaiger Bestellungen wolle man sich an die genannte Werkstätte wenden.)

Im Punkte E hält der Storchschnabel ebenfalls eine *drehbare vertikale Achse.* Diese läuft an ihrem unteren Ende in eine Gabel mit der scharfrandigen Rolle R_2 aus; an ihrem oberen Ende trägt sie ein längliches horizontales Tischchen t, das seinerseits der Träger zweier kleiner *Laufrollen* rr ist. Diese Laufrollen besitzen eine gemeinsame vertikal gestellte Drehungsebene, die zugleich durch die Seele der Achse in E hindurchgeht.

Auf den Laufrollen rr liegt nun die Lenkstange CG mit einer an ihrer Unterseite befindlichen, von C bis G reichenden Rille auf. (Ein an dem Tischchen befestigter Bügel b bewirkt, daß die Laufrollen


Fig. 4. Der Katenograph.



überhaupt nicht aus der Rille herausspringen können). Infolgedessen realisiert die Lenkstange, bezw. ihre Rille, fortgesetzt die geradlinige Verbindung der Punkte C und E; und gleichzeitig hat auch das Tischchen relativ zu der geraden Linie CE stets dieselbe Orientierung, wie man auch den Storchschnabel bewegen mag. Mit der Lenkstange und dem Tischchen sind aber (wie schon gesagt) die Gabeln der beiden scharfrandigen Rollen bezüglich fest verbunden, und zwar (wie wir nun hinzufügen) so, daß die Drehungsebene der Rolle R_1 senkrecht zur Längsrichtung der Lenkstange CG orientiert ist, und die Ebene der Rolle R_2 mit der Ebene der erwähnten Laufrollen zusammenfällt. *Indem also die Lenkstange mit ihrer Rille auf den Laufrollen aufliegt, haben die Rollen R_1, R_2 in der Tat die gewünschte Orientierung und behalten sie in jeder Lage des Storchschnabels bei.*

In F befindet sich der Fahrstift, den man längs einer geraden Linie zu führen hat, wenn man den Apparat als Kettenlinienzeichner benutzen will. Dieser Fahrstift ist in einer mit dem Stabe AF verbundenen Hülse vertikal verschiebbar. Bei F wird infolgedessen der Apparat auf die Zeichenebene nicht gestützt. Er liegt vielmehr zunächst nur an den Stellen C und E mittels der Rollen R_1, R_2 auf. Um aber den Storchschnabel in horizontaler Lage zu halten, ist an dem Stabe AF eine kleine *Stütze* s angebracht, die bei Bewegung des Apparates über das Zeichenpapier hingleitet.

Zur Benutzung des Katenographen ist noch erforderlich, auf die Lenkstange bei dem Stift u (ein wenig seitlich von C) ein Gewicht M aufzusetzen (das wieder abgehoben wird, sobald der Apparat außer Tätigkeit ist). In der Fig. 4 erscheint es der besseren Sichtbarkeit der Details wegen abgehoben und an die Seite gerückt. Dieses Gewicht sorgt einerseits dafür, daß die Lenkstange mit ihrer Rille auf den Laufrollen rr fest aufliegt, wie es ja erforderlich ist (der Bügel b berührt dann die Lenkstange gar nicht). Andererseits aber gibt es den beiden Rollen R_1, R_2 diejenige Belastung, die sie zu ihrer richtigen Funktion nötig haben, d. h. wenn sie in das Zeichenpapier ein wenig einschneiden und stets nur in Richtung ihrer Drehungsebene rollen, nicht aber auf dem Papier irgendwie rutschen sollen.

Dabei hat die Änderung des Belastungsverhältnisses der beiden Rollen, welche bei Bewegungen des Apparates nach dem Hebelgesetz eintritt, ihren bestimmten Zweck. Benutzt man nämlich den Apparat als Kettenlinienzeichner, indem man den Fahrstift F längs einer Geraden führt, so erleidet die Rolle R_1, wenn sie verhältnismäßig weit vom Scheitel der Kettenlinie entfernt ist (also bei gespreiztem Storchschnabel), einen starken seitlichen Druck, sodaß durch eine größere Belastung der Rolle verhindert werden muß, daß sie rutscht. Die Rolle R_2 dagegen bedarf in dieser Lage einer besonders geringen Belastung.

Ein *kleines Gewicht* m ist auf der Stange AE befestigt; es verhindert, daß der Apparat, wenn er das Gewicht M trägt, allzuleicht um die Gerade EF umkippt.

Die Reibung in den Gelenken, in den Rollenlagern usw. ist durch sorgfältige mechanische Ausführung auf ein Minimum reduziert. Die Stütze s trägt unten eine hochglanzpolierte Stahlkuppe, die beim Gleiten auf dem Papier einen so geringen Reibungswiderstand findet, daß die Wirkung der scharfrandigen Rollen nicht beeinträchtigt wird.

Sollen übrigens die zu erzeugenden Kurven (die Kettenlinien sowie ihre Evoluten) von den scharfrandigen Rollen nicht bloß in das Zeichenpapier eingedrückt, sondern auch farbig aufgezeichnet werden, so betupft man vor dem Gebrauch des Apparates den Rand der Rollen (mittels eines Korkes oder eines Stempelkissens) mit ein wenig Stempelfarbe, — ein praktisches Verfahren, das sauber gezeichnete Kurven liefert.

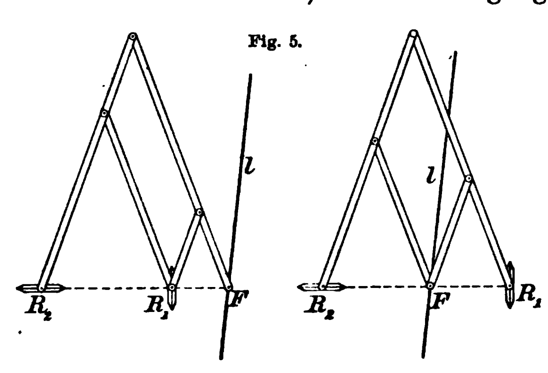
3. Hinweis auf weitere Anwendungen des obengenannten Prinzips.

Im vorhergehenden haben wir das unter 1 angegebene Prinzip der Rollenkoppel in ganz spezieller Durchführung angewendet. Wir haben

unsere Rollenkoppel mit einem Storchschnabel verbunden, bei dem der Abstand der beiden Rollen R_1, R_2 durch den Fahrstift F äußerlich in dem konstanten Verhältnis geteilt wird

$$\varkappa = \frac{\overline{R_1 F}}{\overline{F R_2}} = -\tfrac{1}{2}.$$

In ähnlicher Weise läßt sich nun jeder beliebige Teilpunkt F, der den Abstand der Rollen R_1, R_2 in konstantem Verhältnis $\varkappa$ innerlich oder äußerlich teilt, mittels eines geeigneten Storchschnabels kinematisch realisieren (Fig. 5). Führt man an einem derartigen, hier im Schema angegebenen Apparat den Punkt F längs einer geraden Linie, so beschreibt die Rolle R_1 eine sog. Ribaucoursche Kurve[1]), d. h. eine Kurve von der Eigenschaft: daß in jedem Punkte ihr Krümmungsradius ϱ proportional ist dem Stück n der Normalen, das zwischen der Kurve und einer festen Geraden l liegt.



In der zweiparametrigen Schar der Ribaucourschen Kurven — kongruente Kurven je nur als eine einzige gezählt — sind außer der einparametrigen Schar der Kettenlinien ($\varkappa = -\frac{1}{2}$) bekanntlich auch die einparametrige Schar der gemeinen Parabeln ($\varkappa = -\frac{1}{3}$) und die der gemeinen Zykloiden ($\varkappa = +1$) enthalten. Auf Grund des angegebenen Prinzips läßt sich also wie der Katenograph ebenso ein Parabolograph und ein Zykloidograph konstruieren. Man könnte auch mittels eines verstellbaren Storchschnabels einen Universalapparat für beliebige Ribaucoursche Kurven herstellen. Nur der geringeren Einfachheit der technischen Ausführung wegen wurde darauf verzichtet. —

Unser Prinzip der Rollenkoppel gestattet indes noch weitere Ausblicke. Das Charakteristische der Rollenkoppel war, daß der Abstand der Rollen fortgesetzt den Krümmungsradius ϱ der von R_1 durchlaufenen Kurve realisierte. Durch den Storchschnabel wurde der Krümmungsradius mit einer anderen Ortsfunktion n der zu erzeugenden

1) G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven; Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von F. Schütte. Leipzig (Teubner) 1902, S. 521—530. Auch *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* III 3 D 4: G. Scheffers, Besondere transzendente Kurven (1903), 26f.

Kurve in einfache Verbindung gesetzt. Die Idee wird also sein, weitere solche Ortsfunktionen von Kurven heranzuziehen, die sich ebenfalls in bequemer Weise kinematisch realisieren lassen.

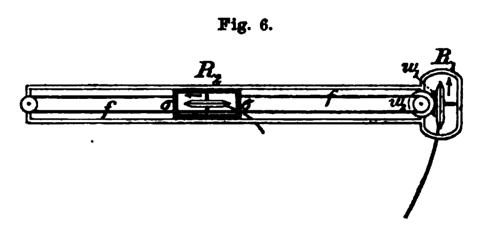
Dies ist z. B. mit der Bogenlänge s der Fall. Sie wird an der Rollenkoppel ohne weiteres durch den Drehungswinkel der Rolle R_1 (und ihren Radius) gegeben. Setzt man daher ϱ und s in eine bestimmte kinematische Beziehung, so gewinnt man einen Apparat zur Erzeugung aller der Kurven, für welche diese Abhängigkeit

$$\varrho = f(s)$$

charakteristisch ist. Hieraus erhellt, daß man auf diese Weise *kinematische Erzeugungsapparate für alle solche Kurven herstellen kann, deren natürliche Gleichung hinreichend einfach ist, bezw. sich durch einfache Mechanismen kinematisch darstellen läßt.*

Als einfachster Spezialfall sei die logarithmische Spirale angeführt, für welche $\varrho = \alpha s + \beta$ ist (α, β = const.). Wir können diese Abhängigkeit etwa so realisieren (Fig. 6).[1]) Die Drehung der Rolle R_1 um ihre horizontale Achse wird durch Anwendung zweier Winkelräder $w_1 w_2$ in eine Drehung um eine vertikale Achse verwandelt; und diese Drehung übersetzt sich dann einfach mittels eines Fadens ff in die Hin- und Herbewegung eines Schlittens $\sigma\sigma$, der die Rolle R_2 trägt. Der Schlitten wird in zwei Gleitschienen so geführt, daß die Ebene der Rolle R_2 beständig die Achse der Rolle R_1 in sich enthält. Ein nach diesem Schema konstruierter Apparat zeichnet offenbar logarithmische Spiralen von einem bestimmten α.

Fig. 6.



Mit diesen Andeutungen mögen wir uns hier begnügen.

Göttingen, Ostern 1905.

1) Freilich ist zu bemerken, daß der von Abdank-Abakanowicz (Die Integraphen usw., S. 8f.) angegebene Apparat zur Erzeugung logarithmischer Spiralen wesentlich einfacher erscheint.

Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion.

Von A. Timpe in Göttingen.

Einleitung.

Die elastischen Probleme, die in der vorliegenden Arbeit behandelt werden, sind gelöst auf Grund der folgenden fundamentalen Voraussetzungen:

1. Die Körper, mit deren Spannungszustand wir uns beschäftigen, sind vollkommen isotrop, ihr elastisches Verhalten wird bestimmt durch das Hookesche Gesetz.

2. Hinsichtlich der Verschiedenheit der wirklichen und der theoretischen Randbedingungen gilt das von de Saint-Venant aufgestellte und von Boussinesq noch mehr begründete Prinzip: „Zwei Systeme von Kräften, deren Angriffspunkte über ein kleines Stück ω der Begrenzung eines Körpers verteilt sind und die dieselbe Resultante besitzen, rufen in ihm, von „lokalen Störungen" in der Nähe von ω abgesehen, merklich den gleichen Spannungszustand hervor."

3. Hierzu tritt noch die schon in dem Titel der Arbeit zum Ausdruck gebrachte wichtige Beschränkung, daß es sich um sogenannte ebene Systeme[1]) handeln soll.

Was die praktische Brauchbarkeit der erhaltenen Lösungen insbesondere im Hinblick auf technische Anwendungen (Balken- und Gewölbeprobleme usw.) anbetrifft, so sind, von der Beschränkung auf das „ebene Problem" abgesehen, folgende Umstände wohl im Auge zu behalten:

1. Vom Eigengewicht, das jedenfalls bei Gewölben, Bogenträgern usw. für den Spannungszutand von primärer Bedeutung ist, ist überall abstrahiert.

2. Die Widerlager sind nicht, wie bei manchen Autoren üblich, als starr behandelt, sondern es ist die Fiktion gemacht, daß (etwa durch Symmetriebetrachtungen und ähnliche Überlegungen) die auf

---

1) Vgl. die Anmerkung S. 5.

die einzelnen Widerlager übertragenen Kräfte bekannt sind. Nimmt ein Widerlager nur ein kleines Stück der Begrenzung des ebenen Systems ein, so genügt, dem Saint-Venantschen Prinzip zufolge, die Kenntnis der Resultante besagter Kräfte. — Immerhin ist im Auge zu behalten, daß in der Regel die Bedingung des Gleichgewichts in der Annahme der einzelnen Resultanten noch Spielraum läßt; bei den gegebenen speziellen Lösungen z. B. handelt es sich also nur um eine statisch mögliche Beanspruchung der Widerlager, von der zweifelhaft bleibt, ob sie in der Natur verwirklicht ist.

Die Beschränkung auf das „ebene Problem“ ist für die anzuwendende Methode von entscheidender Bedeutung: sie ermöglicht die Einführung der Airyschen Spannungsfunktion und damit die Zurückführung aller Probleme auf die Integration einer einzigen linearen Differentialgleichung. Diese Methode, die merkwürdigerweise noch ziemlich unbekannt zu sein scheint und auf die ich von meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. F. Klein hingewiesen wurde, erweist sich als äußerst fruchtbar. Insbesondere gestattet sie, wie J. H. Michell[1]) gelehrt hat, ähnlich einem bekannten Verfahren der Elektrizitätslehre, die Heranziehung des Prinzips der Inversion, vermöge dessen aus jeder erhaltenen Lösung ohne weiteres neue gewonnen werden können. — Um den Gang der Entwicklungen nicht zu häufig mit Erläuterungen unterbrechen zu müssen, erscheint es angezeigt, in einem ersten, hauptsächlich referierenden Teil der Arbeit einige für die Airysche Funktion in Betracht kommenden Tatsachen zusammen zu stellen. Im weiteren verweise ich dabei auf die Abhandlung von F. Klein und K. Wieghardt, „Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme ....“ im Archiv. d. Math. u. Phys., 8. Bd., 1. u. 2. Heft. (1904.)

I. Teil.

Eigenschaften der Airyschen Funktion.

§ 1. Einführung der Spannungsfunktion; Differentialgleichung.

In der Elastizitätstheorie ist es Brauch, auch dann, wenn die Randbedingungen sich auf die Kräfte beziehen, nicht mit den Spannungen, sondern mit den Verzerrungen zu operieren. Der Grund hierfür dürfte darin zu suchen sein, daß sich bei dieser Methode durch Einführung der Verschiebungen die Zahl der Variabeln verringern läßt.

---

1) „The inversion of plane stress“, Lond. M. S. Proc. 34 (1901/02).

Beim „ebenen Problem“[1]) bietet sich nun aber, wie zuerst Airy[2]) gezeigt hat, auf dem andern Wege eine viel hervorragendere Vereinfachung dar, die auf der eleganten Darstellung der drei Spannungskomponenten P, Q, U[3]) durch eine einzige Funktion F, die von Maxwell[4]) sogenannte Airysche Spannungsfunktion, beruht. In der Tat folgt aus den statischen Gleichungen bei fehlender Massenkraft:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

ohne weiteres:

$$(2)\qquad \begin{aligned} P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\; Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \\ U = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Kombiniert man nun (2) mit den „stress-strain-Gleichungen“

$$(3)\qquad \begin{aligned} P &= (\lambda' + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \\ Q &= \lambda' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda' + 2\mu) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \\ U &= \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$(4)\qquad \Delta\Delta F = 0,$$ [5])

wo $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. — Nun gehorcht bekanntlich die Verrückung w der senkrecht zu ihrer Ebene gebogenen Platte derselben Differential-

---

1) Das „ebene Problem“ liegt bekanntlich in zwei wohl zu unterscheidenden Fällen vor:
a) beim unendlich langen Zylinder, der jede seiner Erzeugenden entlang gleichmäßig zu ihr senkrecht beansprucht wird;
b) bei der unendlich dünnen Scheibe.

Im Fall a) gelten die Gl. (3) für $\lambda' = \lambda$, im Falle b) für $\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$.

2) Brit. Assoc. Report, Cambridge, 1862, S. 82 und Philos. Transactions 1863, S. 49.

3) In der Bezeichnungsweise schließe ich mich an den „Treatise on the Theory of Elasticity“ von A. E. H. Love an.

4) „Scientific Papers“, vol. II, p. 102. Zu den Maxwellschen Untersuchungen vergleiche man den bereits zitierten Aufsatz von F. Klein und K. Wieghardt.

5) J. H. Michell, „On the direct determination of stress in an elastic solid“, Lond. M. S. Proc. 31 (1899).

gleichung. Somit gewinnen wir mit Hilfe der Airyschen Funktion ein äußerst anschauliches Bild von dem in unserem ebenen System herrschenden Spannungszustande

Unterwerfen wir eine Lamelle den für F in einem bestimmten Falle geltenden Randbedingungen, so biegt sie sich von selbst zu der der Airyschen Fläche $z = F(xy)$ eignenden Form; die Krümmungen an einer Stelle der Lamelle repräsentieren die Spannungen in dem entsprechenden Punkte des ebenen Systems. Außerdem stimmt die in letzterem herrschende potentielle Energie bis auf einen konstanten Faktor überein mit der (gleichsam fühlbaren) Energie der Biegung an der entsprechenden Stelle der Lamelle.

Letzteres folgt ohne weiteres durch Vergleich der betreffenden aus Rayleighs „Theory of Sound" und A. E. H. Loves „Treatise on the Theory of Elasticity" zu entnehmenden Ausdrücke bei Berücksichtigung der Relationen (2).

§ 2. Die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ als Spannungsfunktionen.

Wie wir gesehen haben, ist die Lösung des allgemeinen ebenen Spannungsproblems gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$. Mit der Theorie dieser Gleichung und ihren Anwendungen beschäftigt sich eine umfangreiche Literatur, von der im Anhang eine Zusammenstellung gegeben ist, auf welche die im folgenden in Klammern beigefügten Nummern Bezug nehmen. Es wird gezeigt (Nr. 15, Nr. 12), daß die in einem beliebigen Gebiete überall reguläre Lösung von $\Delta\Delta F = 0$ eindeutig bestimmt ist, sofern auf dem Rande die Werte von F und $\frac{\partial F}{\partial n}$ vorgeschrieben sind. In unserm Falle lassen sich nun tatsächlich die Randwerte $\overline{F}$ und $\overline{\frac{\partial F}{\partial n}}$ aus den gegebenen Komponenten G und H der am Rande angreifenden Kräfte ermitteln; nach Michell (Nr. 17) ist:

$$(5)\quad \begin{aligned} \overline{F} &= \int_0^s \left(G_0^s \cdot \frac{dy}{ds} - H_0^s \cdot \frac{\partial x}{ds} \right) ds + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ \overline{\frac{\partial F}{\partial n}} &= G_0^s \cdot \frac{dx}{ds} + H_0^s \cdot \frac{dy}{ds} - \alpha \frac{dy}{ds} + \beta \frac{dx}{ds}, \end{aligned}$$ [1]

---

1) Zur Bestimmung der Konstanten α, β, γ an jedem Rande dienen drei Bedingungen, die Michell (Nr. 17) aus der Forderung der Eindeutigkeit der Verschiebungen ableitet.

wo s die Bogenlänge und $G_0^s = \int_0^s G ds$; $H_0^s = \int_0^s H ds$. Jedoch ist die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ allgemein erst für eine beschränkte Anzahl von Gebieten gelöst, nämlich für den Kreis (Nr. 1, Nr. 11), den Kreisring (Nr. 6, Nr. 17), die durch eine Gerade begrenzte Halbebene (Nr. 1, Nr. 12) und für die durch Polynome auf den Kreis konform abbildbaren Gebiete, wie z. B eine Klasse von Epizykloiden (Nr. 4, Nr. 5). Wollen wir darüber hinaus die Methode der Airyschen Funktion bei ebenen Spannungsproblemen anwenden, so sind wir darauf angewiesen, gewissermaßen einen umgekehrten Weg einzuschlagen, nämlich: bekannte partikuläre Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ (und deren gibt es eine ziemlich große Zahl) als Spannungsfunktionen zugrunde zu legen und zu versuchen, ob bei geeigneter Kombination derselben sich Randwerte erzielen lassen, die den in der Praxis vorkommenden Belastungsfällen möglichst genau entsprechen. Man könnte diesen Weg, als Gegenstück zu der semiinversen Methode de Saint-Venants bei seinem bekannten Balkenproblem, geradezu als die inverse Methode bezeichnen.

Mehr oder minder versteckte Anwendungen derselben liefern bereits die Arbeiten Michells „Elementary Distributions of plane Stress" (Nr. 18) und „The Inversion of plane Stress" (Nr. 19); den dort behandelten interessanten Spannungsverteilungen liegen Airysche Funktionen zugrunde, die im Gebiete selbst eine Singularität aufweisen und so zu „konzentrierten" Kräften[1]) Anlaß geben. — Allgemein sind als Lösungen der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ bezw. als für die Definition von Spannungszuständen geeignete Funktionen zu nennen:

1. Die Grundlösungen: const., $\lg r$, r^2, $r^2 \lg r$ und die daraus abgeleiteten „zweiten Potentiale" $\int\int \varrho(x_1, y_1) \cdot \frac{r^2}{4}(1 - \lg r) dx_1 dy_1$ an den Stellen von der Dichte $\varrho = 0$ (Nr. 16), analog natürlich alle logarithmischen Potentiale.

2. Die Funktionen von der Form $(ax + by) \cdot \varphi(x, y)$ oder $(x^2 + y^2) \cdot \varphi(x, y)$, wo $\varphi(x, y)$ eine beliebige Lösung von $\Delta\varphi = 0$ (Nr. 6).

---

1) Man spricht von einer konzentrierten Kraft in einem Punkte, wenn daselbst die Spannung bezogen auf die Längeneinheit unendlich groß, ihre Resultante aber endlich ist. Für die physikalische Realisierung hat man natürlich die Umgebung eines solchen Punktes auszusondern bezw. durch eine starre Füllung zu ersetzen.

3. Die trigonometrischen Lösungen (Nr. 20)

$$r^n \cos n\theta,\ r^n \sin n\theta;\ r^{n+2}\cos n\theta,\ r^{n+2}\sin n\theta;$$
$$\frac{\cos n\theta}{r^n},\quad \frac{\sin n\theta}{r^n};\quad \frac{\cos n\theta}{r^{n-2}},\quad \frac{\sin n\theta}{r^{n-2}}.$$

(bezw. die entsprechenden einfachen rationalen Funktionen von x, y), sowie θ, $r^2\theta$ (Nr. 19). Wir notieren beiläufig, daß umgekehrt jede Lösung von $\Delta\Delta F = 0$ sich darstellen läßt:

1. als Summe eines logarithmischen und eines zweiten Potentials;
2. in der Form $(ax + by)\varphi(x, y) + \psi(x, y)$
   oder $(x^2 + y^2)\cdot\varphi(x, y) + \psi(x, y)$

wo $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ Lösungen von $\Delta\varphi = 0$ bezw. $\Delta\psi = 0$.

3. Demgemäß im Kreise und Kreisringe durch trigonometrische Reihen.

§ 3. Inversion von Spannungsverteilungen.

Von großer Bedeutung ist schließlich noch die von Levi-Civita (Nr. 14) und Michell (Nr. 19) bewiesene Tatsache, daß die Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ gegenüber der Substitution

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2};\quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2};\quad F' = \frac{F}{x^2 + y^2} \tag{6}$$

invariant ist, daß man also aus jeder Airyschen Funktion F vermöge obigen Inversionsprozesses eine neue Spannungsfunktion F' ableiten kann. Wie Michell weiter beweist, ist der Zusammenhang der beiden durch F und F' definierten Spannungszustände äußerst einfach.

Legt man nämlich Polarspannungskomponenten $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ zugrunde, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} && \text{(radiale Normalspannung)},\\
\mathfrak{Q} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} && \text{(peripherische „)},\\
\mathfrak{U} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) && \text{(Schubspannung)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Die radiale Verschiebung $\mathfrak{u}$ und die peripherische Verschiebung $\mathfrak{v}$ sind mit den Spannungen durch die Formeln verknüpft:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= (\lambda' + 2\mu)\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial r} + \lambda'\cdot\left(\frac{\mathfrak{u}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \theta}\right),\\
\mathfrak{Q} &= \lambda'\cdot\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial r} + (\lambda' + 2\mu)\cdot\left(\frac{\mathfrak{u}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \theta}\right)\\
\mathfrak{U} &= \mu\cdot\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \theta} - \frac{\mathfrak{v}}{r}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Es zeigt sich nun, daß die aus der Funktion F' abgeleiteten Spannungen $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}', \mathfrak{U}'$ mit den $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ durch die Formeln zusammenhängen:

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
\mathfrak{P}' &= r^2 \cdot \mathfrak{P} + 2M, \\
\mathfrak{Q}' &= r^2 \cdot \mathfrak{Q} + 2M, \\
\mathfrak{U}' &= -r^2 \cdot \mathfrak{U}.
\end{aligned}
$$

Hier hat $M = F - r\frac{\partial F}{\partial r} = -r^2 \cdot \left(F' - r'\frac{\partial F'}{\partial r'}\right)$ den Wert des resultierenden Moments der Spannungen, die längs einer beliebigen von einem festen Punkte bis zu (r, θ) erstreckten Kurve herrschen. — In Worten lautet (9):

Sieht man von einer hydrostatischen (d. h. an einer Stelle allseitig gleichen) Spannung $2M$ ab, so verhält sich der stress bei der Inversion invariant: auf korrespondierende Linienelemente ds und $ds' = \frac{ds}{r^2}$ wirkt die gleiche Spannung in korrespondierender Richtung; die Spannungstrajektorien gehen in Spannungstrajektorien über.

Zudem wird bewiesen:

Ein gleichförmig gespannter, z. B. spannungsfreier Rand geht bei der Inversion stets wieder in einen gleichförmig gespannten Rand über.

Wir werden von diesen Sätzen im zweiten Teil der Arbeit eine Reihe wichtiger Anwendungen machen.

II. Teil.

Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen.

1. Kapitel: Der gerade Streifen und der von sich berührenden Kreisen begrenzte krumme Streifen.

A. Die Hauptlösungen.

Bemerkung. Als Hauptlösungen für einen Streifen bezeichnen wir jene Spannungsverteilungen, bei welchen nur seine beiden Schmalseiten von äußeren Kräften beansprucht werden, während die beiden Langseiten frei sind.[1])

1) Von einer „uneigentlichen" Hauptlösung wollen wir beim krummen Streifen sprechen, wenn die Langseiten je unter gleichmäßiger Spannung stehen.

§ 4. Zug oder Druck an den Schmalseiten.

a) Die Spannungsfunktion

$$F = \frac{\varkappa}{2} \cdot y^2 \tag{1}$$

liefert in kartesischen Komponenten:

$$P = \varkappa,\quad Q = 0,\quad U = 0. \tag{1'}$$

Dies entspricht dem an den Schmalseiten $x = a$ und $x = -a$ gleichförmig auf Zug oder Druck beanspruchten geraden Streifen. (Fig. 1.)

Als einfachste Verallgemeinerung sei erwähnt:

$$F = \frac{\varkappa}{2} y^2 + \frac{\varkappa'}{2} x^2$$

$$\mathfrak{P} = \varkappa,\quad \mathfrak{Q} = \varkappa',\quad \mathfrak{U} = 0. \tag{2}$$

Für $\varkappa = \varkappa'$ erhalten wir den Fall der gleichmäßigen Spannung $\varkappa$.

b) Wir wollen nun den durch (1) definierten Spannungszustand invertieren. Bei Anwendung von Polarkoordinaten erhält man offenbar:

$$F' = \frac{\varkappa}{2} \sin^2 \theta'; \tag{3}$$

$$\mathfrak{P}' = \frac{\varkappa \cos 2\theta'}{r'^2},\quad \mathfrak{Q}' = 0,\quad \mathfrak{U}' = \frac{\varkappa}{2} \frac{\sin 2\theta'}{r'^2}. \tag{3'}$$

Spannungstrajektorien sind jetzt (vgl. § 3) die aus den Geraden $y = \text{const.}$ und $x = \text{const.}$ hervorgegangenen Kreisscharen η und ξ, die die Achse $y = 0$ bez. $x = 0$ in O zur gemeinsamen Tangente haben; längs jedes dieser Kreise herrscht konstante Spannung. Haben z. B. die als Begrenzung gewählten η-Kreise 1 und 2 die Durchmesser d_1 und d_2, so wirkt normal auf ihnen die Spannung $-\frac{\varkappa}{d_1^2}$ bezw. $-\frac{\varkappa}{d_2^2}$. Wir können nun durch Überlagerung einer konstanten Spannung $\frac{\varkappa}{d_2^2}$ den Kreis 2 spannungsfrei machen; die Lösung ist dann:

Fig. 1.

$$F = \frac{\varkappa}{2}\left(\sin^2\theta' + \frac{r'^2}{d_2^2}\right); \tag{4}$$

$$\mathfrak{P}' = \frac{\varkappa \cos 2\theta'}{r'^2} + \frac{\varkappa}{d_2^2},$$

$$\mathfrak{Q}' = \frac{\varkappa}{d_2^2}, \tag{4'}$$

$$\mathfrak{U}' = \frac{\varkappa \sin 2\theta'}{2r'^2}.$$

Die Beanspruchung des Kreises 1 ist pro Längeneinheit:

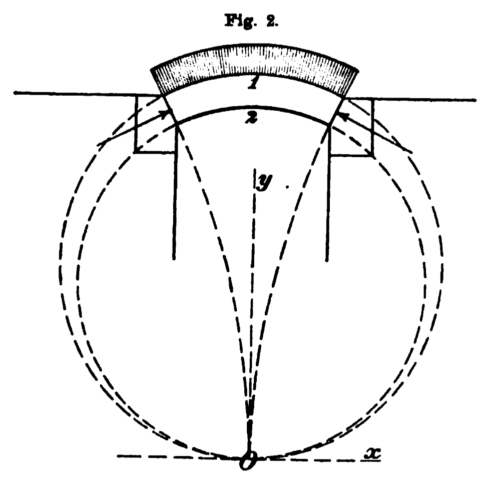
$$W = \varkappa\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right). \tag{5}$$

Wählen wir rechts und links als Begrenzung Stücke von zwei (symmetrischen oder unsymmetrischen) ξ-Kreisen, so üben diese auf ihre Widerlager pro Längeneinheit die normal gerichtete Kraft

$$D = \frac{\varkappa \cos 2\theta'}{r'^2} + \varkappa\left(\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_1^2}\right) \tag{6}$$

aus, wo r', θ' sich auf die auf 1 gelegene Ecke beziehen. Damit haben wir die Lösung für einen krummen Streifen, der längs seiner einen Langseite senkrecht zu ihr gleichmäßig gespannt wird (Fig. 2). — Eine interessante Ausartung erhalten wir, wenn wir als Kreis 1 die X-Achse wählen und aus dem von 1 und 2 begrenzten Gebiet an der Einschnürungsstelle O ein Stück herausschneiden. Offenbar wird dann in O eine konzentrierte Kraft $K = \frac{\varkappa}{d_2}$ übertragen (wovon man sich am einfachsten durch Zurückgehen auf den Parallelstreifen überzeugt). Nehmen wir den Fall, daß Kreis 2 spannungsfrei ist, die X-Achse aber eine gleichförmige vertikale Last W trägt, so gelten die Gleichungen (4), (4'), (6) für $d_1 = \infty$:

Fig. 2.



$$\mathfrak{P}' = W\left(1 + \frac{d_2^2}{r'^2}\cdot\cos 2\theta'\right),$$

$$\mathfrak{Q}' = W, \tag{7}$$

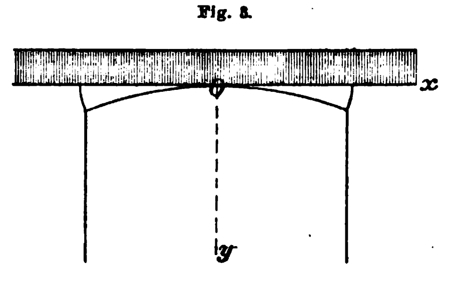
$$\mathfrak{U}' = \frac{W}{2}\cdot\frac{d_2^2}{r'^2}\cdot\sin 2\theta';$$

$$D = W\left(1 + \frac{d_2^2}{l^2}\right), \tag{7'}$$

wenn $2l$ die Spannweite auf der X-Achse. Die zugehörigen radialen und peripherischen Verschiebungen sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{W}{(2\lambda' + \mu)}\left(r' - \frac{\lambda' + 2\mu}{2\mu} \cdot \frac{d_2^2}{r'} \cdot \cos 2\theta'\right), \\ \mathfrak{v} &= \frac{W}{4\mu} \cdot \frac{d_2^2}{r'} \cdot \sin 2\theta'. \end{aligned} \tag{8}$$

Fig. 3.

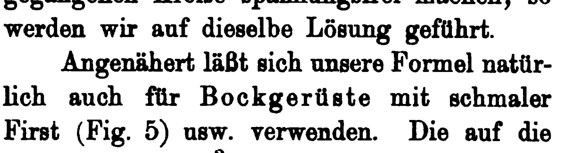


Diese Lösung entspricht in etwa einem vollwandigen **Bogenträger mit Scharnier**, der eine gleichmäßige Vertikallast W trägt (Fig. 3). Die Kämpferfugen sind so geschnitten, daß in ihnen keine Schubspannungen entstehen. Schneiden wir dagegen gerade und vertikal im Abstand $+l$ und $-l$ ab, so werden die Reaktionen:

$$\begin{aligned} (xx) &= W \cdot \left[1 + \frac{d_2^2}{l^2} \cdot \cos^2\theta' \cdot (\cos^2\theta' - 3\sin^2\theta')\right], \\ (xy) &= \frac{W}{2}\frac{d_2^2}{l^2}\cos^2\theta' \cdot \sin 4\theta'. \end{aligned} \tag{9}$$

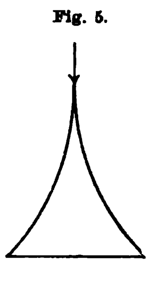
Endlich möge noch erwähnt werden, daß damit zugleich das Problem der „geschärften[1]) Schneide" (Fig. 4) erledigt ist. In der Tat, wenn wir den Parallelstreifen invertieren, der von den Geraden $y = \frac{1}{d^2}$ und $y = -\frac{1}{d^2}$ begrenzt wird, und sodann durch Überlagerung der gleichförmigen Spannung $\frac{\varkappa}{d_2^2}$ die aus jenen hervorgegangenen Kreise spannungsfrei machen, so werden wir auf dieselbe Lösung geführt.

Fig. 4.



Angenähert läßt sich unsere Formel natürlich auch für **Bockgerüste** mit schmaler First (Fig. 5) usw. verwenden. Die auf die Spitze wirkende Kraft $K = \frac{2\varkappa}{d_2}$ bewirkt eine Reaktion des Bodens vom Betrage:

Fig. 5.



$$\text{Normalreaktion} = \frac{K}{2d_2}\left[1 + \frac{d_2^2}{l^2}\cos^2\theta'(\cos^2\theta' - 3\sin^2\theta')\right],$$

$$\text{Schubkraft} = \frac{K}{4}\frac{d_2}{l^2}\cos^2\theta' \sin 4\theta',$$

1) Bezüglich der konvexen und der geraden Schneide vgl. Michell (Nr. 18).

wo die Normalreaktion jedenfalls solange mit K gleichen Zeichens ist als $\theta' < 30^0$.

§ 5. Reine Biegung des geraden Streifens und Inversion derselben.

a) Die Spannungsfunktion

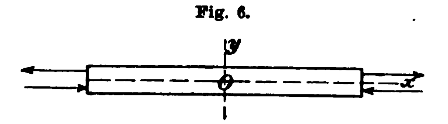
$$F = \frac{\varkappa}{6} y^3 \tag{10}$$

liefert in kartesischen Komponenten:

$$\begin{aligned} P &= \varkappa y, \\ Q &= 0, \\ U &= 0. \end{aligned} \tag{10'}$$

Nehmen wir einen von den Geraden $y = +b$ und $y = -b$ begrenzten Streifen, so resultiert über jeden Querschnitt die Kraft 0 und das konstante Moment $\mathsf{M} = \frac{2}{3}\varkappa b^3$. Demnach haben wir den Fall der reinen Biegung des geraden Streifens vor uns (Fig. 6); es gilt das lineare Spannungsgesetz, d. h. das in der technischen Literatur so bezeichnete Gesetz, daß die Normalspannungen über einen Querschnitt linear verteilt sind. Die Verschiebungen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ sind wieder nach Einsetzen von (10′) in die stress-strain-Gleichungen durch einfache Quadraturen zu berechnen. Nehmen wir die beiden Geraden $y = c + b$ und $y = c - b$ als Begrenzung, so kommt zu dem konstanten Moment M noch eine in der Mittellinie ($y = c$) wirkende Resultante $K = 2\varkappa \cdot bc$ hinzu.

Fig. 6.



b) Wir führen nun Polarkomponenten ein und invertieren den durch (10) bestimmten Spannungszustand:

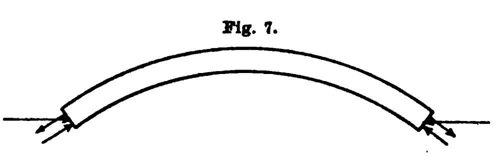
$$F' = \frac{\varkappa}{6} \frac{\sin^3 \theta'}{r'}; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}' &= \frac{\varkappa}{3 r'^3}(3 \sin\theta' \cdot \cos^2\theta' - 2 \sin^3\theta'), \\ \mathfrak{Q}' &= \frac{\varkappa}{3 r'^3} \cdot \sin^3\theta', \\ \mathfrak{U}' &= \frac{\varkappa}{r'^3} \sin^2\theta' \cdot \cos\theta'. \end{aligned} \tag{11'}$$

Spannungstrajektorien sind natürlich wieder die beiden Kreisscharen ξ und η, und zwar findet man leicht, daß auf den η-Kreisen mit den Durchmessern d die konstanten Spannungen $-\frac{2}{3}\frac{\varkappa}{d^3}$ herrschen. Somit können wir (vgl. § 4, b) das Problem des etwa auf der Oberseite gleichmäßig

beanspruchten krummen Streifens lösen, wenn dieser an den Schmalseiten durch ein Moment und eine jener Beanspruchung korrespondierende Kraft angegriffen wird; letztere wird im allgemeinen nicht mehr in die Mittellinie des Streifens fallen. Nun wollen wir diejenige Verteilung (4), (4′) überlagern, die mit der vorliegenden Lösung kombiniert den oberen Rand gleichfalls spannungsfrei macht. Wir erhalten dann die Lösung für den unbelasteten, auf Biegung beanspruchten krummen Streifen, an dessen Enden noch zwei gleiche und entgegengesetzte horizontale Kräfte angreifen. (Letzteres lehrt die statische Betrachtung). (Fig. 7)

Fig. 7.



$$(12)\qquad F' = \frac{\varkappa}{6}\frac{\sin^3\theta}{r'} + \frac{1}{3}\frac{\varkappa}{d_2^3} - \frac{\varkappa}{8}\frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}\left(\sin^2\theta' + \frac{r'^2}{d_2^2}\right);$$

$$\mathfrak{P}' = \frac{\varkappa}{8 r'^3}\cdot(3\sin\theta'\cos^2\theta' - 2\sin^3\theta') + \frac{2}{3}\frac{\varkappa}{d_2^3}$$

$$- \frac{2}{3}\varkappa\frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}\cdot\left(\frac{\cos 2\theta'}{r'^2} + \frac{1}{d_2^2}\right),$$

$$(12')\qquad \mathfrak{Q}' = \frac{\varkappa}{8 r'^3}\sin^3\theta' - \frac{2}{3}\varkappa\frac{1}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)},$$

$$\mathfrak{U}' = \frac{\varkappa}{r'^3}\sin^2\theta'\cos\theta' - \frac{\varkappa}{8}\frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}\cdot\frac{\sin 2\theta'}{r'^2}.$$

Die horizontalen Resultanten haben den Betrag:

$$(13)\qquad K = \frac{\varkappa}{6}\frac{(d_1 - d_2)^3}{d_1 + d_2}\frac{1}{d_1^2 d_2^2}.$$

Das Moment beträgt an der höchsten Stelle:

$$(14)\qquad \mathsf{M} = \frac{\varkappa}{12}\frac{(d_1 - d_2)^3}{d_1^2 d_2^2}.$$

Allgemein ist das Moment über einen Querschnitt gleich dem Produkte aus K und dem Abstand des Mittelpunktes von der X-Achse.

§ 6. Das de Saint-Venantsche Problem des geraden Streifens und Inversion desselben.

a) Ein an einem Ende $x = 0$ eingeklemmter Streifen[1]) von der Höhe $2b$ wird an der Stirnfläche $x = a$ mit der Kraft K belastet

1) Ein Streifen heißt im Punkte $x = y = 0$ eingeklemmt, wenn dort die Befestigungsbedingungen $u = v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ erfüllt sind.

(Fig. 8). Die Airysche Funktion, die dem dadurch hervorgerufenen Spannungszustand entspricht, muß folgenden Bedingungen genügen: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ müssen für $y = \pm b$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ muß für $x = a$ verschwinden. Man verifiziert, daß diese Bedingungen nebst der Differentialgleichung $\varDelta\varDelta F = 0$ erfüllt werden von

$$F = \varkappa \cdot (y^3 - 3b^2 y)(a - x)^{1)}. \tag{15}$$

$$\begin{aligned} P &= 6\varkappa y\,(a - x), \\ Q &= 0, \\ U &= 3\varkappa\,(y^2 - b^2). \end{aligned} \tag{15'}$$

In der Tat sind der obere und untere Rand spannungsfrei; über jeden Schnitt $x = \text{const.}$ resultiert aus den Normalspannungen, für die das lineare Gesetz gilt, ein Moment $M = b^3 4\varkappa \cdot (a - x)$ und eine Vertikalkraft $K = -4b^3 \cdot \varkappa$. Nach dem Saint-Venantschen Prinzip realisiert eine am freien Ende angebrachte Kraft K den diskutierten Spannungszustand, wenn von lokalen Störungen abgesehen wird. — Führt man die gefundenen Werte der Spannungen in die stress-strain-Gleichungen ein, so erhält man durch bloße Quadraturen das Saint-Venantsche Resultat für die Verschiebungen, falls die Balkenbreite verschwindend klein genommen wird.

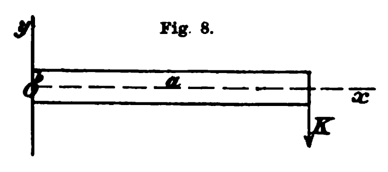


Fig. 8.

b) Invertieren wir diese Lösung, so erhalten wir z. B. den Fall des auf Biegung beanspruchten krummen Streifens, dessen obere Kante gleichmäßig gespannt ist, während für die freie Stirnfläche sich eine im allgemeinen nicht in die Richtung der Mittellinie fallende Resultante ergibt. Kombinieren wir nun die uneigentlichen Hauptlösungen b) der §§ 4, 5 und 6 mit einer konstanten gleichmäßigen Spannung, so können wir für unseren krummen Streifen offenbar die (vier) Bedingungen aufstellen, daß die beiden Ränder eine vorgeschriebene gleichförmige Spannung erfahren und an der freien Stirnfläche das Moment einen bestimmten Betrag, die durch den Mittelpunkt gehende Resultante eine vorgeschriebene Richtung habe. Soll letztere auch eine bestimmte Größe haben, so müssen wir etwa die Stärke der gleichmäßigen Spannung des einen Randes disponibel lassen.

1) S. Abhandlung von F. Klein und K. Wieghardt (Nr. 9).

B. Die Lösungen für den stetig belasteten Streifen.[1])

Bemerkung: Bei den folgenden Lösungen ist das Augenmerk stets nur auf die Befriedigung der auf den beiden Langseiten vorgeschriebenen Bedingungen gerichtet. Die an den Schmalseiten geforderte Beanspruchung ist dann stets gemäß dem Saint-Venantschen Prinzip durch Überlagerung der Hauptlösungen zu realisieren. Beim geraden Streifen nämlich, der ev. eine vertikale Last trägt, können, wie die statische Betrachtung zeigt, nur folgende vier Elementarfälle hinsichtlich der Bedingungen an den Schmalseiten vorliegen:

a) zwei gleiche und entgegengesetzte horizontale Resultanten;

b) zwei gleiche und entgegengesetzte Momente;

c) zwei vertikale Resultanten gleicher Richtung;

d) eine vertikale Resultante einerseits, eine gleiche und entgegengesetzte vertikale Resultante nebst einem equilibrierenden Moment andererseits.

a) und b) lassen sich immer mit Hilfe der ersten und zweiten Hauptlösung regulieren, während c) und d) sowohl beim beiderseitig unterstützten als auch beim einseitig eingeklemmten Streifen durch die dritte Hauptlösung den gegebenen Bedingungen angepaßt werden. — Bei dem durch Inversion erhaltenen krummen Streifen müssen wir noch eine vierte uneigentliche Hauptlösung hinzunehmen, die aus der in § 7 a) gegebenen Lösung durch Inversion hervorgeht. Durch Heranziehung einer gleichmäßigen konstanten Spannung können wir dann in der Tat außer der Bedingung der Spannungsfreiheit der beiden Langseiten noch die drei Bedingungen an der einen Schmalseite: Resultante nach Richtung und Größe und gegebenes Moment, befriedigen. Wenn aber das superponierte Hauptlösungssystem für die Erfüllung der Vorschriften auf der einen Schmalseite Sorge trägt, so muß aus statischen Gründen am andern Ende die richtige Beanspruchung von selbst eintreten.

§ 7. Der gerade Streifen unter gleichmäßiger, linear oder quadratisch wachsender Belastung.

a) Die Funktion

$$F = \frac{\varkappa}{2} \cdot x^2 (y^3 - 3b^2 y - 2b^3) - \frac{\varkappa}{10} \cdot y^3 (y^2 + 5a^2) \tag{16}$$

genügt der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ und definiert folgenden Spannungszustand:

1) In die Almansischen Arbeiten über Balkenprobleme, von denen ich kurz vor Drucklegung dieser Arbeit erfuhr, konnte ich leider nicht mehr Einsicht nehmen.

$$(16') \qquad \begin{aligned} P &= 3\varkappa \cdot y\,(x^2 - a^2) - 2\varkappa y^3, \\ Q &= \varkappa \cdot (y^3 - 3b^2 y - 2b^3), \\ U &= -3\varkappa \cdot x\,(y^2 - b^2) \end{aligned}$$

Für $y = \pm b$ verschwindet U, für $y = -b$ ist $Q = 0$; für $y = +b$ wird $Q = -4\varkappa \cdot b^3$. Unsere Lösung entspricht also dem eine gleichmäßige Last

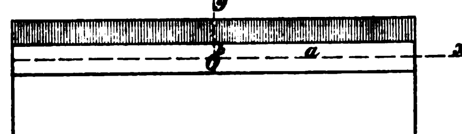


Fig. 9.

$$(17) \qquad W = -4\varkappa \cdot b^3$$

pro Längeneinheit tragenden geraden Streifen (Fig. 9). Das lineare Spannungsgesetz, das in der technischen Literatur für alle Belastungsfälle als richtig angenommen wird, gilt nur noch in erster Annäherung, insofern das Zusatzglied in y von dritter Ordnung ist.

Die Verschiebungen werden:

$$(18) \qquad \begin{aligned} u &= \frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \{xy[(\lambda'+2\mu)(x^2-3a^2)-(3\lambda'+4\mu)y^2+3\lambda' b^2]+2\lambda' b^3 x\}, \\ v &= \frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \Big\{(3\lambda'+2\mu)\frac{y^4}{3} - \tfrac{3}{2}y^2[(\lambda'+2\mu)b^2+\lambda'(x^2-a^2)] \\ &\quad -2(\lambda'+2\mu)b^3 y + \tfrac{3}{2}x^2[(\lambda'+2\mu)a^2+(3\lambda'+4\mu)b^2-(\lambda'+2\mu)\cdot\frac{x^4}{4}\Big\}, \end{aligned}$$

wobei als Befestigungsbedingungen $u = v = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ für $x = y = 0$ gewählt sind.

b) Die Funktion

$$(19) \qquad F = \varkappa \cdot \left\{\tfrac{1}{6}x^3y^3 - \tfrac{1}{10}xy^5 - \tfrac{1}{2}b^2 \cdot x^3 y + \frac{b^4}{2} \cdot xy - \frac{b^3}{3} \cdot x^3\right\}$$

genügt der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ und definiert folgenden Spannungszustand:

$$(19') \qquad \begin{aligned} P &= \varkappa \cdot xy(x^2 - 2y^2), \\ Q &= \varkappa \cdot x(y^3 - 3b^2y - 2b^3), \\ U &= \varkappa \cdot \{-\tfrac{3}{2}x^2(y^2 - b^2) + \tfrac{1}{2}(y^4 - b^4)\}. \end{aligned}$$

Für $y = \pm b$ verschwindet U. Für $y = -b$ wird $Q = 0$, für $y = +b$ wird $Q = -4\varkappa \cdot b^3 x$. Demnach stellt unsere Lösung den Spannungszustand in einem geraden Streifen dar, der eine stetige, linear wachsende Belastung trägt (Fig. 10). Wiederum

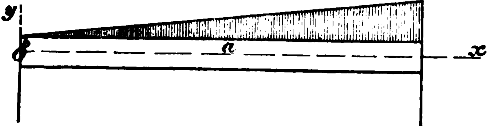


Fig. 10.

gilt das lineare Spannungsgesetz nur in erster Annäherung, insofern das Zusatzglied in y von dritter Ordnung ist.

Die Verschiebungen werden:

$$(20)\quad \begin{aligned} u &= \frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \Big\{(\lambda' + 2\mu) \cdot x^2 y \left(\tfrac{1}{4}x^2 - y^2\right) - \lambda' \frac{x^2}{2}(y^3 - 3b^2 y - 2b^3) \\ &\quad + (5\lambda' + 6\mu)\frac{y^5}{20} - 2(\lambda' + \mu)\, b^4 y + (\lambda' + 2\mu) b^2 y^2 \left(b + \frac{y}{2}\right)\Big\}, \\ v &= \frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \Big\{(\lambda' + 2\mu) x y \left(\tfrac{1}{4}y^3 - \tfrac{3}{2}b^2 y - 2b^3\right) - \frac{\lambda'}{2} x y^2 (x^2 - y^2) \\ &\quad + (3\lambda' + 4\mu) b^2 \cdot \frac{x^3}{2} - (\lambda' + 2\mu)\frac{x^5}{20}\Big\}, \end{aligned}$$

wobei wieder die Befestigungsbedingungen $u = v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ für $x = y = 0$ gewählt sind.

c) Die Funktion

$$(21)\quad F = \varkappa \cdot \left(\tfrac{1}{12}x^4 y^3 - \frac{b^2}{4} x^4 y - \frac{b^3}{6} x^4 - \tfrac{1}{10} x^2 y^5 + \frac{b^4}{2} x^2 y + \frac{b^3}{6} y^4 + \tfrac{9}{20} b^5 x^2 + \frac{b^2}{20} y^5 + \tfrac{3}{420} y^7\right)$$

genügt der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ und definiert folgenden Spannungszustand:

$$(21')\quad \begin{aligned} P &= \varkappa \cdot \left(\tfrac{1}{2} x^4 y - 2x^2 y^3 + 2b^3 y^2 + b^2 y^3 + \tfrac{3}{10} y^5\right), \\ Q &= \varkappa \cdot \left(x^2 y^3 - 3b^2 x^2 y - 2b^3 x^2 - \tfrac{1}{5} y^5 + b^4 y + \tfrac{9}{10} b^5\right), \\ U &= \varkappa \cdot \{-x^3(y^2 - b^2) + x(y^4 - b^4)\}. \end{aligned}$$

Für $y = \pm b$ verschwindet U; für $y = -b$ ist $Q = 0$, für $y = +b$ erhalten wir

$$(22)\quad Q = -4\varkappa \cdot b^3 x^2 + \tfrac{17}{10}\varkappa \cdot b^5.$$

Den konstanten Teil von Q können wir, wenn wir wollen, durch Überlagerung einer Lösung (16) zum Verschwinden bringen und haben dann die Lösung für einen geraden Streifen, der eine quadratisch wachsende stetige Belastung trägt (Fig. 11). Das lineare Spannungsgesetz kann noch als in erster Annäherung gültig bezeichnet werden, da das in y quadratische Glied mit dem Koeffizienten b^3 behaftet ist.

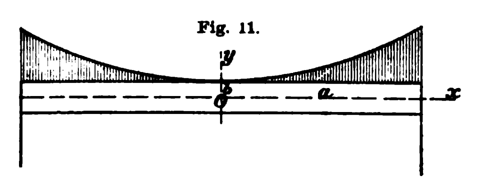


Fig. 11.

Die zu (22′) gehörigen Verschiebungen werden:

$$(23)\quad \begin{aligned} u &= \frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \Big\{\tfrac{1}{10}(\lambda' + 2\mu) x^5 y - \tfrac{1}{3}(3\lambda' + 4\mu) x^3 y^3 + \lambda' b^2 x^3 \left(y + \tfrac{2}{3} b\right) \\ &\quad + \left[\tfrac{1}{10}(5\lambda' + 6\mu) \cdot y^5 + (\lambda' + 2\mu) \cdot b^2 y^2 (y + 2b) - \lambda b^4 y - \tfrac{9}{10}\lambda b^5\right] \cdot x\Big\}, \\ v &= \frac{\varkappa}{4\mu(\lambda'+\mu)} \cdot \Big\{-\tfrac{1}{60}(\lambda' + 2\mu) x^6 + \tfrac{1}{4}(3\lambda' + 4\mu) \cdot b^2 x^4 - \frac{\lambda'}{4} x^4 y^2 \\ &\quad - (3\lambda' + 4\mu)\frac{b^4}{2} x^2 + \tfrac{1}{4}(3\lambda + 2\mu) x^2 y^4 - (\lambda' + 2\mu) b^2 x^2 y \cdot \left(\tfrac{3}{2} y + 2b\right) \\ &\quad - (5\lambda' + 4\mu) \cdot \frac{y^6}{60} - \lambda'\left(\frac{b^2}{4} y^4 + \tfrac{2}{3} b^3 y^3\right) + (\lambda' + 2\mu) y \cdot \left(\frac{b^4}{2} y + \tfrac{9}{10} b^5\right)\Big\} \end{aligned}$$

bei den Befestigungsbedingungen $u = v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ für $x = y = 0$.

§ 8. Der gerade oder krumme Streifen unter beliebiger Beanspruchung.

a) Wir nehmen an, daß sich die beliebige normale Belastung eines geraden Streifens in Form einer Fourier-Entwicklung darstellen lasse. Dementsprechend setzen wir zunächst F als Produkt eines allgemeinen Sinusgliedes in x, $\sin \omega x$, und einer reinen Funktion Y von y an und sehen zu, in welche Bedingung für Y dann die Differentialgleichung $\varDelta\varDelta F = 0$ übergeht. Wir erhalten die Gleichung:

$$\omega^4 \cdot Y - 2\omega^2 \cdot Y'' + Y'''' = 0$$

deren allgemeine Lösung gegeben ist durch $Y = \varkappa_1 e^{\omega y} + \varkappa_2 e^{-\omega y} + \varkappa_3 y e^{\omega y} + \varkappa_4 y e^{-\omega y}$. Somit erhalten wir:

$$(24)\quad F = \sin \omega x \cdot \{\varkappa_1 e^{\omega y} + \varkappa_2 e^{-\omega y} + \varkappa_3 y e^{\omega y} + \varkappa_4 y e^{-\omega y}\};$$

$$P = \sin \omega x \cdot \{\varkappa_1 \omega^2 e^{\omega y} + \varkappa_2 \omega^2 e^{-\omega y} + 2\varkappa_3 \omega e^{\omega y} - 2\varkappa_4 \omega e^{-\omega y} + \varkappa_3 \omega^2 y e^{\omega y} + \varkappa_4 \omega^2 y e^{-\omega y}\},$$

$$(24')\quad \begin{aligned} Q &= -\omega^2 \cdot \sin \omega x \cdot \{\varkappa_1 e^{\omega y} + \varkappa_2 e^{-\omega y} + \varkappa_3 y e^{\omega y} + \varkappa_4 y e^{-\omega y}\}, \\ U &= -\omega \cdot \cos \omega x \cdot \{\varkappa_1 \omega e^{\omega y} + \varkappa_2 \omega e^{-\omega y} + \varkappa_3 e^{\omega y} + \varkappa_4 e^{-\omega y} + \varkappa_3 \omega y e^{\omega y} \\ &\quad - \varkappa_4 \omega y e^{-\omega y}\}. \end{aligned}$$

Schreibt man nun die Randbedingungen: $U = 0$ für $y = 0$ und $y = 2b$ und $Q = 0$ für $y = 0$, $Q = \text{const.} \sin \omega x$ für $y = +2b$ vor, so erhält man für die Konstanten die Werte:

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2 = c,$$

$$\varkappa_3 = c\omega \cdot \frac{-1 + 4\omega b + e^{4\omega b}}{1 - 2\omega b - (1 + 2\omega b)e^{4\omega b}},$$

$$\varkappa_4 = c\omega \cdot \frac{-1 + e^{4\omega b} + 4\omega b\, e^{4\omega b}}{1 - 2\omega b - (1 + 2\omega b)e^{4\omega b}}.$$

Ist nun die Belastung des Streifens (Fig. 12) von der Länge $2a$ dargestellt etwa durch die Reihe $W = \sum_1^\infty A_i \sin \omega_i x$, wo $\omega_i = \frac{i\pi}{2a}$, so lautet die Lösung:

$$(25)\quad F = \sum_{i=1}^\infty c_i \sin \omega_i x \cdot \{e^{\omega_i y} - e^{-\omega_i y} + \gamma_1 \omega_i y e^{\omega_i y} + \gamma_2 \omega_i y \cdot e^{-\omega_i y}\};$$

$$P = \sum_{i=1}^\infty c_i \omega_i^2 \sin \omega_i x \{e^{\omega_i y} - e^{-\omega_i y} + \gamma_1 \cdot (2e^{\omega_i y} + \omega_i y e^{\omega_i y}) + \gamma_2(\omega_i y e^{-\omega_i y} - 2e^{-\omega_i y})\},$$

$$(25')\quad Q = -\sum_{i=1}^\infty c_i \omega_i^2 \sin \omega_i x \{e^{\omega_i y} - e^{-\omega_i y} + \gamma_1 \omega_i y e^{\omega_i y} + \gamma_2 \omega_i y e^{-\omega_i y}\},$$

$$U = -\sum_{i=1}^\infty c_i \omega_i^2 \cos \omega_i x \cdot \{e^{\omega_i y} + e^{-\omega_i y} + \gamma_1 (1 + \omega_i y) e^{\omega_i y} + \gamma_2 (1 - \omega_i y) e^{-\omega_i y}\}.$$

Dabei ist gesetzt:

$$c_i = -\frac{A_i}{\omega_i^2} : \{e^{2\omega_i b} - e^{-2\omega_i b} + \gamma_1 \cdot 2\omega_i b \cdot e^{2\omega_i b} + \gamma_2 \cdot 2\omega_i b e^{-2\omega_i b}\}$$

und

$$\gamma_1 = \frac{-1 + 4\omega_i b + e^{4\omega_i b}}{1 - 2\omega_i b - (1 + 2\omega_i b)e^{4\omega_i b}},$$

$$\gamma_2 = \frac{-1 + e^{4\omega_i b} + 4\omega_i b \cdot e^{4\omega_i b}}{1 - 2\omega_i b - (1 + 2\omega_i b)e^{4\omega_i b}}.$$

Die Berechnung der Verschiebungen vermittels der stress-strain-Gleichungen bietet in einem speziellen Fall keine Schwierigkeiten dar, sodaß das Problem des eine beliebige normale Belastung tragenden Streifens als erledigt angesehen werden kann. — Man sieht übrigens, daß unser Verfahren gleichfalls zum Ziele führt, wenn Q auch auf der Geraden $y = 0$ und U auf $y = 0$ und $y = 2b$ beliebig vorgeschrieben ist, wenn also der allgemeinste Belastungsfall vorliegt.[1]) Dies deckt sich mit der Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ im Parallelstreifen. — Nebenbei bemerkt bedarf es zur Bewältigung des (außer dem diskutierten) in der Praxis wohl noch am häufigsten vorkommenden Falles, daß nämlich auch die Unterseite des Streifens eine beliebig verteilte normale Last trägt, keiner neuen Rechnungen mehr: wir haben dann nur zwei Lösungen vom Typus (26) zu überlagern.

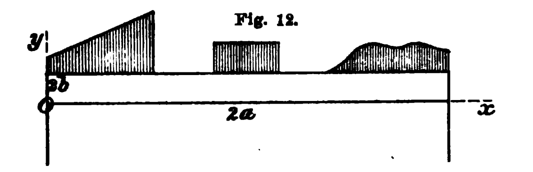


Fig. 12.

b) Um die Spannungsverteilung in dem mehrfach betrachteten krummen Streifen bei beliebiger Beanspruchung zu ermitteln, transformieren wir ihn durch Inversion in einen geraden Streifen; bezüglich der Umformung der durch die Beanspruchung vorgeschriebenen Randbedingungen sind die Sätze von § 3 anzuwenden. Da M und mithin die beiden Hauptspannungen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt sind, so haben wir zum Schluß, wenn wieder auf den krummen Streifen transformiert wird, eventuell noch eine gleichmäßige konstante Spannung zu überlagern.

---

1) In diesem Fall ist natürlich das in der Vorbemerkung, S. 361, über die Bedingungen an den Schmalseiten Gesagte zu modifizieren.

2. Kapitel: Der von sich nicht schneidenden, insbesondere von konzentrischen Kreisen begrenzte Streifen.

A. Die Hauptlösungen.

§ 9. Die reine Biegung des Kreisringsektors.

Um für den von konzentrischen Kreisen begrenzten Streifen die Hauptlösungen, d. h. diejenigen Lösungen zu erhalten, die die Kreisränder spannungsfrei lassen, greifen wir zunächst die Airyschen Funktionen heraus, die nicht vom Winkel θ abhängen und deshalb bei Benutzung von Polarkomponenten keine Schubspannungen liefern, also die Grundlösungen der Differentialgleichung $\varDelta\varDelta F = 0$.

Wir setzen an:

$$F = \varkappa_1 \cdot \lg r + \varkappa_2 \cdot r^2 \lg r + \varkappa_3 \cdot r^2. \tag{1}$$

Die zugehörigen radialen und peripherischen Verschiebungen werden:

$$\mathfrak{u} = -\frac{\varkappa_1}{2\mu r} + \left[\frac{\varkappa_3}{\lambda' + \mu} - \frac{\varkappa_2}{2\mu}\right] r + \frac{\varkappa_2}{\lambda + \mu} r \lg r,$$

$$\mathfrak{v} = \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu(\lambda' + \mu)} \varkappa_2 r \theta.$$

Da $\mathfrak{v}$ im Vollringe unendlich vieldeutig sein würde, so erkennen wir, daß wir den mit $\varkappa_2$ multiplizierten Term nur solange beibehalten dürfen, als wir es mit einem Ringsektor zu tun haben.

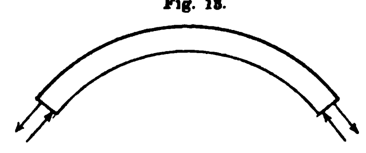
Wir bestimmen unter dieser Voraussetzung die Verhältnisse der Konstanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ so, daß auf den beiden Kreisrändern $r = a$ und $r = b$ die Normalspannungen verschwinden. Es ergibt sich:

$$F = \varkappa \cdot \left\{2a^2b^2 \frac{\lg a - \lg b}{a^2 - b^2} \lg r + r^2 \lg r - \left(\frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2} + \tfrac{1}{2}\right) r^2\right\}; \tag{2}$$

$$\mathfrak{P} = \varkappa \cdot \left\{\frac{2a^2b^2}{r^2} \frac{\lg a - \lg b}{a^2 - b^2} + 2 \lg r - 2 \frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2}\right\},$$

$$\mathfrak{Q} = \varkappa \cdot \left\{-\frac{2a^2b^2}{r^2} \frac{\lg a - \lg b}{a^2 - b^2} + 2(\lg r + 1) - 2 \frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2}\right\}, \tag{2'}$$

$$\mathfrak{U} = 0.$$

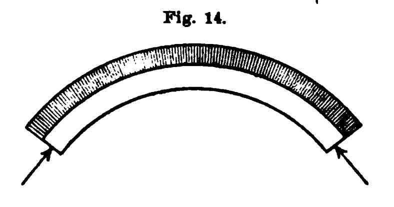

Fig. 13.

Wie die statische Betrachtung zeigt, muß uns (2), (2′) den Fall der reinen Biegung des Kreisringsektors (Fig. 13) repräsentieren, was durch Resultantenbildung über einen Querschnitt $\theta = \text{const.}$ in der Tat bestätigt wird. Für das Moment ergibt sich

$$\mathsf{M} = \varkappa \cdot \left\{2a^2b^2 \frac{(\lg a - \lg b)^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - b^2}{2}\right\}. \tag{3}$$

Daß wir bei unserm Ansatz eine von 0 verschiedene Hauptlösung erhielten, verdanken wir offenbar der Existenz von mehr als zwei Grundlösungen der Gleichung $\Delta\Delta F = 0$. Dementsprechend gibt es auch, wie hier nebenbei erwähnt sei, unendlich viele Lösungen von der Form (1), die dem Fall des ein- oder beiderseitig belasteten Ringsektors entsprechen. Erst wenn wir eine weitere Bedingung für die Schmalseiten vorschreiben, etwa daß kein Moment auftreten soll (Fig. 14), ist das Resultat eindeutig bestimmt. In dem bezeichneten Falle ergeben sich, falls die Seite $r = a$ unbelastet ist, für die Konstanten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ die Werte:

Fig. 14.



$$
(4)\quad
\begin{aligned}
\varkappa_1 &= -W\cdot\frac{b^2(\lg a - \lg b) + a^2 - b^2}{4(\lg a - \lg b)^2 - 2\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2 b^2}},\\
\varkappa_2 &= -W\,\frac{2(\lg a - \lg b) + \dfrac{a^2-b^2}{a^2}}{4(\lg a - \lg b)^2 - 2\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2 b^2}},\\
\varkappa_3 &= W\,\frac{2\lg a(\lg a - \lg b) + \dfrac{a^2\lg a - b^2\lg b + a^2 - b^2}{a^2}}{4(\lg a - \lg b)^2 - 2\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2 b^2}}.
\end{aligned}
$$

§. 10. Das de Saint-Venantsche Problem des Kreisringsektors.

Wie sich in § 11 bei Behandlung des allgemeinen Belastungsproblems für den Kreisring mit Hilfe der trigonometrischen Lösungen der Gleichungen $\Delta\Delta F = 0$ im Zusammenhang herausstellen wird, müssen die niedrigsten trigonometrischen Terme passend kombiniert gleichfalls eine Hauptlösung liefern. Machen wir jetzt einfach den Ansatz:

$$
(5)\qquad F = \left[\varkappa_1 r\lg r + \varkappa_2\cdot\frac{1}{r} + \varkappa_3 r^3\right]\cos\theta,
$$

wo $\Delta\Delta F = 0$ erfüllt ist. Die zugehörigen Verschiebungen werden:

$$
(5')\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{u} &= \varkappa_1\cdot\frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\theta\sin\theta + \left[\frac{\varkappa_1}{2(\lambda'+\mu)}\lg r + \frac{\varkappa_2}{2\mu r^2} + \frac{\mu-\lambda'}{2\mu(\lambda'+\mu)}\varkappa_3 r^2\right]\cos\theta,\\
\mathfrak{v} &= \varkappa_1\cdot\frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\theta\cos\theta + \left[\frac{-\varkappa_1}{2(\lambda'+\mu)}\lg r + \frac{\varkappa_2}{2\mu r^2} + \frac{3\lambda'+5\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\varkappa_3 r^2\right]\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Da die mit $\varkappa_1$ multiplizierten Terme im Vollringe unendlich vieldeutige Verschiebungen veranlassen würden, so ist dort immer $\varkappa_1 = 0$ zu setzen. Nur im Ringsektor kann $\varkappa_1 \neq 0$ beibehalten werden.

Wir bestimmen nun in letzterem die Konstanten so, daß die Schubspannungen über die Kreisränder $r = a$ und $r = b$ verschwinden; dann zeigt sich, daß dort gleichzeitig die Normalspannungen verschwinden, und man erhält:

$$F = \varkappa \frac{\cos\theta}{a^2+b^2}\cdot\left[(a^2+b^2)\cdot r\lg r + \frac{a^2b^2}{2r} - \frac{r^3}{2}\right]; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \varkappa \frac{\cos\theta}{a^2+b^2}\cdot\left[\frac{a^2+b^2}{r} - \frac{a^2b^2}{r^3} - r\right], \\ \mathfrak{Q} &= \varkappa \frac{\cos\theta}{a^2+b^2}\cdot\left[\frac{a^2+b^2}{r} + \frac{a^2b^2}{r^3} - 3r\right], \\ \mathfrak{U} &= \varkappa \frac{\sin\theta}{a^2+b^2}\cdot\left[\frac{a^2+b^2}{r} - \frac{a^2b^2}{r^3} - r\right].^{1)} \end{aligned} \tag{6'}$$

Die Resultante über die längs eines Schnittes $\theta = \theta_0$ wirkenden Schubspannungen ist

$$K_1 = K_0 \cdot \sin\theta_0, \tag{7}$$

die über die Normalspannungen

$$K_2 = K_0 \cdot \cos\theta_0, \tag{8}$$

$$\text{wo } K_0 = \varkappa\cdot\left[\lg b - \lg a - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right].$$

Beide gehen durch den Mittelpunkt des Ringes. Für $\theta_0 = 90^\circ$ erhält man den Fall einer senkrecht zur Achse des krummen Streifens angreifenden Kraft K_0 (Fig. 15). Soll auf der Außenseite $r = b$ eine konstante Normalspannung lasten, so haben wir nur etwa die Lösung

Fig. 15.

$$F' = \varkappa'\cdot\left(\lg r - \frac{r^2}{2a^2}\right) \tag{9}$$

mit $\varkappa' = W\cdot\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$ zu überlagern und denjenigen Querschnitt zu bestimmen, für den jetzt die Resultante der Normalspannungen verschwindet. Man erhält:

$$\cos\theta_0 = -\frac{b\cdot W}{\varkappa\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \lg b - \lg a\right)}. \tag{10}$$

---

1) Diese Lösung findet sich bereits, auf völlig anderem Wege abgeleitet, in dem noch unveröffentlichten Manuskript des Herrn Prof. Prandtl („Spannungszustand eines gekrümmten Stabes nach der strengen Elastizitätstheorie"), in das ich schon vor längerer Zeit durch die gütige Vermittlung von Herrn Prof. Klein Einsicht erhielt. Es ist jene Abhandlung, auf die Föppl in seiner „Festigkeitslehre", 2. Aufl., § 70a (S. 452) Bezug nimmt. Wie ich nachträglich erfahre, ist Herr Prof. Prandtl auch bereits im Besitz einer Lösung für den Fall der reinen Biegung im Ringsektor.

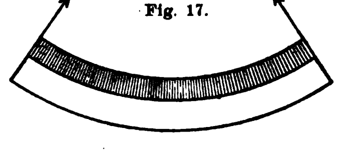
(Das außerdem auftretende Biegungsmoment wird durch Überlagerung einer Hauptlösung (2) entfernt.) Die Resultante der Schubspannungen über diesen Querschnitt ist

Fig. 16.

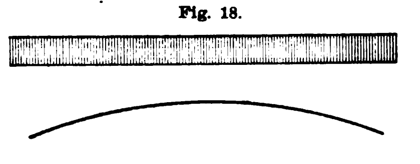
$$(11)\quad K_1 = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \lg a + \lg b\right)^2 K^2 - b^2 W^2}.$$

Gibt man K_1 und W vor, so ist $\varkappa$ und $\varkappa'$ zu berechnen. Damit ist das Problem des krahnähnlichen Streifens, der auf der Außenseite eine konstante Normalbeanspruchung erfährt und am Ende eine vertikale Last trägt (Fig. 16), gelöst.

Wählen wir beide Stirnflächen gemäß den zwei aus (10) zu entnehmenden Werten von θ_0, so erhalten wir den Fall des eine konstante radiale Beanspruchung erfahrenden Sektors, der an den Enden durch Transversalkräfte gehalten wird (Fig. 17).


Fig. 17.

Durch Inversion gelangen wir von hier zu einem Streifen, der auf der einen Seite von einer Geraden begrenzt ist, die eine gleichmäßige normale Spannung erfährt, während die Stirnflächen durch zwei symmetrische Kräfte gestützt werden. Wir haben damit in etwa die Lösung für ein Gewölbe unter gleichmäßiger vertikaler Belastung, also einen praktisch recht bedeutsamen Fall, gewonnen (Fig. 18). In der Tat stellen uns die Lösungen (1) und (6) im ganzen vier unabhängige Konstante zur Verfügung, so daß wir folgende vier Bedingungen erfüllen können:


Fig. 18.

die Unterseite des Gewölbes sei unbelastet, die Oberseite trage eine gleichmäßige normale Last W; an den Stirnflächen habe die Resultante durch den Mittelpunkt gegebene Richtung und das Moment einen gegebenen Betrag.

B. Die allgemeine Lösung.

Bemerkung. Das zuletzt behandelte Beispiel zeigt bereits, wie man auf Grund des Saint-Venantschen Prinzips durch Kombination einer den Bedingungen auf den Kreisrändern genügenden Lösung mit den Hauptlösungen (im eigentlichen und uneigentlichen Sinn) auch die für die Schmalseiten vorgeschriebenen Bedingungen befriedigt. Wie schon in unserer Bemerkung im 1. Kapitel (S. 361) hervorgehoben, genügt

es im allgemeinen, für die Realisierung der an der einen Schmalseite geforderten Beanspruchung Sorge zu tragen, da die entsprechende Lösung dann aus statischen Gründen den Vorschriften an der andern Schmalseite von selbst nachkommt. — Um nun hier die transversale Resultante zu regulieren, haben wir nur eine geeignete Hauptlösung (6) zu überlagern, für die an der betr. Schmalseite das Moment verschwindet. — Axiale Resultante und Moment werden durch Kombination einer Hauptlösung (2) und einer Hauptlösung (6) geliefert, welch letztere an der Schmalseite verschwindende Schubspannungen haben muß. — Auch für den durch Inversion erhaltenen allgemeinen krummen Streifen gilt Entsprechendes. Man transformiert ihn zunächst in einen von konzentrischen Kreisen begrenzten Streifen, wobei bezüglich der Umformung der Randbedingungen die Sätze von § 3 zu beachten sind, löst die Aufgabe in diesem Gebiete und geht dann auf den ursprünglichen Bereich zurück. Nunmehr überlagert man jene Kombination von Hauptlösungen, die an sich den unteren Rand spannungsfrei läßt und die Bedingungen an der Schmalseite realisiert. Um die damit hereinkommende konstante normale Spannung des oberen Randes zu eliminieren, ist man genötigt, von vornherein ein einer gleichmäßigen Beanspruchung des oberen Randes entsprechendes Zusatzglied mit unbestimmtem Koeffizienten hinzuzufügen und letzteren zum Schluß so zu bestimmen, daß nach Überlagerung der Hauptlösungen sich der tatsächliche Belastungsfall ergibt.

§ 11. Der Kreisring und der Kreisringsektor unter beliebiger Beanspruchung.

Wir gehen aus von der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ für den Kreisring[1]):

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad F = {} & a_0 \lg r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \lg r + \alpha_0 \theta \\
& + \frac{a_1}{2} r\theta \cdot \sin\theta + (b_1 r^3 + \alpha_1 r^{-1} + \beta_1 r \lg r)\cos\theta \\
& - \frac{c_1}{2} r\theta \cdot \cos\theta + (d_1 r^3 + \gamma_1 r^{-1} + \delta_1 r \lg r)\sin\theta \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} (a_i r^m + b_i r^{m+2} + \alpha_i r^{-m} + \beta_i r^{-m+2}) \cos m\theta \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} (c_i r^m + d_i r^{m+2} + \gamma_i r^{-m} + \delta_i r^{-m+2}) \sin m\theta .
\end{aligned}
$$

1) S. Nr. 17.

Setzen wir F als Spannungsfunktion an, so würde sich ergeben:

$$
(12')\quad
\begin{cases}
\mathfrak{P} = \frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(2\lg r + 1) \\
\quad + \left(\frac{a_1 + \beta_1}{r} + 2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3}\right)\cos\theta \\
\quad + \left(\frac{c_1 + \delta_1}{r} + 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right)\sin\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[m(1-m)a_m r^{m-2} + (m+2-m^2)b_m r^m \\
\qquad - m(1+m)\alpha_m r^{-m-2} - (m-2+m^2)\beta_m r^{-m}]\cos m\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[m(1-m)c_m r^{m-2} + (m+2-m^2)d_m r^m \\
\quad - m(1+m)\gamma_m r^{-m-2} - (m-2+m^2)r^{-m}]\sin m\theta, \\
\mathfrak{Q} = -\frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(2\lg r + 3) \\
\quad + \left(6b_1 + \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r}\right)\cdot\cos\theta \\
\quad + \left(6d_1 + \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r}\right)\cdot\sin\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[(m-1)m\cdot a_m r^{m-2} + (m+1)(m+2)b_m r^m \\
\quad + m(m+1)\alpha_m\cdot r^{-m-2} + (m-2)(m-1)\beta_m r^{-m}]\cos m\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[(m-1)m\cdot c_m r^{m-2} + (m+1)(m+2)\cdot d_m r^m \\
\qquad + m(m+1)\cdot\gamma_m\cdot r^{-m-2} + (m-2)(m-1)\,\delta_m r^{-m}]\sin m\theta, \\
\mathfrak{U} = \frac{\alpha_0}{r^2} + \left(2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r}\right)\sin\theta \\
\quad - \left(2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r}\right)\cos\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty}[(m-1)m a_m r^{m-2} + m(m+1)b_m r^m \\
\quad - m(m+1)\alpha_m r^{-m-2} - m(m-1)\beta_m r^{-m}]\sin m\theta \\
\quad - \sum_{m=2}^{\infty}[(m-1)m c_m r^{m-2} + m(m+1)d_m r^m \\
\quad - m(m+1)\gamma_m r^{-m-2} - (m-1)m\cdot\delta_m r^{-m}]\cos m\theta.
\end{cases}
$$

Seien nun andererseits die Spannungen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}$ auf den Rändern $r = a$ und $r = b$ vorgegeben durch die Entwicklungen:

$$(13)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{P} &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m\theta.\\ \overline{\mathfrak{U}} &= C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin m\theta;\end{aligned}$$

$$(13')\qquad \begin{aligned}\overline{\mathfrak{P}'} &= A_0' + \sum_{m=1}^{\infty} A_m' \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} B_m' \sin m\theta,\\ \overline{\mathfrak{U}'} &= C_0' + \sum_{m=1}^{\infty} C_m' \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_m' \sin m\theta.\end{aligned}$$

Setzt man nun die aus (12′) sich für $r = a$ und $r = b$ ergebenden Werte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}$ gleich mit (13) und (13′) und identifiziert die Koeffizienten entsprechender trigonometrischer Terme, so erhält man ein unendliches System von achtköpfigen Gleichungsfamilien zur Bestimmung der $a_m, b_m, c_m, d_m, \alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \delta_m$. Diese Bestimmung gelingt ohne weiteres für alle $m \geqq 2$. Für $m = 0$ und $m = 1$ dagegen treten exzeptionelle Fälle ein.

a) Was den Fall $m = 0$ angeht, so sondern sich die vier Gleichungen in zwei, die nur a_0, b_0, c_0 enthalten, und zwei, in denen nur α_0 vorkommt. Die letzteren beiden sind mit einander verträglich, da aus den statischen Bedingungen für den Ring (Verschwinden der Drehmomente um O) folgt: $a^2 C_0 = b^2 C_0'$. Das erste Paar ist unterbestimmt; die damit gegebene Willkür wird, wie wir weiter unten sehen werden, beseitigt durch die Forderung, daß die Verschiebungen im Ringe eindeutig resultieren müssen.

b) Was den Fall $m = 1$ angeht, so haben die beiden Gleichungsquadrupel nur dann Lösungen, wenn $a(A_1 - D_1) = b(A_1' - D_1')$ und $a(B_1 + C_1) = b(B_1' + C_1')$. Das sind aber gerade die beiden weiteren aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Ring folgenden Relationen. Es wird:

$$a_1 = a(A_1 - D_1),$$
$$c_1 = a(B_1 + C_1).$$

Wenn z. B. an jedem Rande für sich die angreifenden Spannungen im Gleichgewicht stehen bezw. ein Kräftepaar ergeben, so ist $A_1 = D_1$, $B_1 = -C_1$, folglich $a_1 = c_1 = 0$. — Für die Bestimmung der Konstantentripel b_1, α_1, β_1 und d_1, γ_1, δ_1 verbleiben dann nur noch je zwei Gleichungen; hierzu treten aber wieder die Bedingungen, die aus dem Verlangen nach Eindeutigkeit der Verschiebungen entspringen.

J. H. Michell hat diese bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten zu berücksichtigenden Bedingungen allgemein diskutiert (Nr. 17). Wir

wollen einfach die den einzelnen Elementarlösungen entsprechenden Verschiebungen frischweg berechnen und hinterher die Koeffizienten der mehrdeutigen Glieder gleich Null setzen. Wir erhalten:

(14) Radialverschiebung $\mathfrak{u} = -\frac{a_0}{2\mu r} + \left[\frac{b_0}{\lambda' + \mu} - \frac{c_0}{2\mu}\right] r$

$$+ \frac{c_0}{\lambda'+\mu}\cdot r \lg r + \left(\frac{a_1}{4(\lambda'+\mu)} + \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\beta_1\right)\theta\sin\theta$$

$$-\left(\frac{c_1}{4(\lambda'+\mu)} + \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\right)\cdot\theta\cos\theta$$

$$+\left[\left(\frac{\lambda'+2\mu}{4\mu(\lambda'+\mu)}a_1 + \frac{\beta_1}{2(\lambda'+\mu)}\right)\lg r + \frac{\mu-\lambda'}{2\mu(\lambda'+\mu)}b_1 r^2 + \frac{\alpha_1}{2\mu r^2} + A\right]\cos\theta$$

$$+\left[\left(\frac{\lambda'+2\mu}{4\mu(\lambda'+\mu)}c_1 + \frac{\delta_1}{2(\lambda'+\mu)}\right)\lg r + \frac{\mu-\lambda'}{2\mu(\lambda'+\mu)}d_1 r^2 + \frac{\gamma_1}{2\mu r^2} + B\right]\sin\theta$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\left[-\frac{m}{2\mu}a_m r^{m-1} - \frac{m\lambda'+(m-2)\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}b_m r^{m+1}\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2\mu}\cdot\alpha_m r^{-m-1} + \frac{m\lambda'+(m+2)\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\beta_m r^{-m+1}\right]\cos m\theta$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\frac{m}{2\mu}c_m r^{m-1} - \frac{m\lambda'+(m-2)\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}d_m r^{m+1}\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2\mu}\cdot\gamma_m r^{-m-1} + \frac{m\lambda'+(m+2)\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_m r^{-m+1}\right]\sin m\theta.$$

(15) Peripherische Verschiebung $\mathfrak{v} = Cr - \frac{\alpha_0}{2\mu r}$

$$+\frac{\lambda'+2\mu}{\mu(\lambda'+\mu)}c_0 r\theta + \left(\frac{a_1}{4(\lambda'+\mu)} + \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\beta_1\right)\cdot\theta\cos\theta$$

$$+\left(\frac{c_1}{4(\lambda'+\mu)} + \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\right)\theta\sin\theta$$

$$+\left[\left(-\frac{\lambda'+2\mu}{4\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\alpha_1 - \frac{\beta_1}{2(\lambda'+\mu)}\right)\lg r - \frac{a_1}{4\mu} + \frac{3\lambda'+5\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}b_1 r^2 + \frac{\alpha_1}{2\mu r^2} - A\right]\sin\theta$$

$$+\left[\left(\frac{\lambda'+2\mu}{4\mu(\lambda'+\mu)}\cdot c_1 + \frac{\delta_1}{2(\lambda'+\mu)}\right)\lg r + \frac{c_1}{4\mu} - \frac{3\lambda'+5\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\cdot d_1 r^2 - \frac{\gamma_1}{2\mu r^2} + B\right]\cos\theta$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{m}{2\mu}a_m r^{m-1} + \frac{(m+4)(\lambda'+2\mu)+\lambda' m}{4\mu(\lambda'+\mu)}b_m r^{m+1}\right.$$

$$\left.+\frac{m}{2\mu}\cdot\alpha_m r^{-m-1} + \frac{(m-4)(\lambda'+2\mu)+\lambda' m}{4\mu(\lambda'+\mu)} - \beta_m r^{-m+1}\right]\sin m\theta$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\left[-\frac{m}{2\mu}\cdot c_m r^{m-1} - \frac{(m+4)(\lambda'+2\mu)+\lambda' m}{4\mu(\lambda'+\mu)}d_m r^{m+1}\right.$$

$$\left.-\frac{m}{2\mu}\cdot\gamma_m r^{-m-1} - \frac{(m-4)(\lambda'+2\mu)+\lambda' m}{4\mu(\lambda'+\mu)}\delta_m r^{-m+1}\right]\cos m\theta,$$

unter A, B, C Integrationskonstanten verstanden, die durch die Befestigungsbedingungen zu bestimmen sind. — Damit alle Terme eindeutig werden, muß man setzen:

(16) $$c_0 = 0$$

(17) $$\beta_1 = -\frac{\mu}{2(\lambda' + \mu)} \cdot a_1$$
$$\delta_1 = -\frac{\mu}{2(\lambda' + \mu)} \cdot c_1.$$

In dem besonderen Fall, daß die Spannungen längs jedes Randes im Gleichgewicht sind oder ein Kräftepaar ergeben, wird $a_1 = c_1 = 0$ und daher auch $\beta_1 = \delta_1 = 0$. Wir haben damit das wichtige Resultat gewonnen:

Satz: Beim geschlossenen Ringe fällt aus dem Ausdruck (12) für die Spannungsfunktion F das Glied $c_0 r^2 \lg r$ stets ganz heraus. Die Koeffizienten der Terme $r\theta \sin\theta$, $r \lg r \cos\theta$; $r\theta \cos\theta$, $r \lg r \sin\theta$ sind durch die die Elastizitätsmoduln enthaltenden Relationen (17) mit einander verknüpft, sodaß sich der Spannungszustand im Vollringe im allgemeinen als von den elastischen Konstanten abhängig erweist. Nur in dem Falle, wo die äußeren Kräfte längs jedes Randes im Gleichgewicht sind oder ein Kräftepaar liefern, besteht eine solche Abhängigkeit nicht.

Diese Ergebnisse bestätigen Michells allgemeine Sätze.

Künstliche Selbstspannungen.[1])

Die Beschränkungen, die infolge der bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten zu berücksichtigenden Bedingungen in den Formeln (14), (15) bez. (12) eintreten, fallen natürlich beim ungeschlossenen Ringe fort. Dies wird von höchster Bedeutung dann sein, wenn es möglich ist, das nicht geschlossene Ringgebiet in einen Vollring zu deformieren; denn dann eröffnet sich für letzteren die Möglichkeit wesentlich neuartiger Spannungszustände. — Es genügt offenbar zu untersuchen, welche Arten von Selbstspannungen man durch einen derartigen Prozeß im Ringe herstellen kann; die diesen entsprechende Lösung F^0 kann man dann stets im allgemeinen Falle über die durch die Randkräfte bestimmte Lösung superponieren.

Die Funktion

(18) $$F = a_0 \lg r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \lg r$$

definiert die Spannungen

(18′) $$\mathfrak{P} = \frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(2\lg r + 1),$$
$$\mathfrak{Q} = -\frac{a_0}{r^2} + 2b_0 + c_0(2\lg r + 3),$$
$$\mathfrak{U} = 0$$

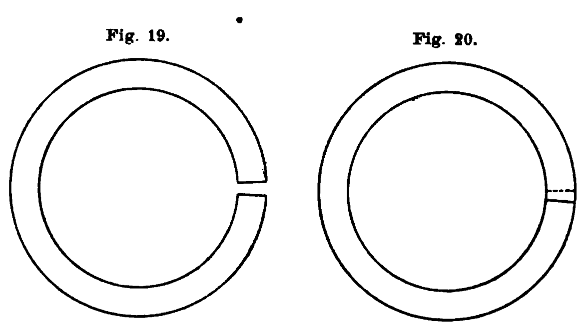
---

1) Nach Abschluß dieser (als Dissertation vom 14. Dez. 1904 datierenden) Arbeit erschien eine eingehende Untersuchung über Selbstspannungen von V. Volterra, Atti Acc. Linc. Rend. (5) vol. 14 (1905).

und die Verschiebungen:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= -\frac{a_0}{2\mu r} + \left(\frac{b_0}{\lambda' + \mu} - \frac{c_0}{2\mu}\right) r + \frac{c_0}{\lambda' + \mu}\, r \lg r, \\ \mathfrak{v} &= \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu(\lambda' + \mu)}\, c_0 r \theta. \end{aligned}$$

Alle Querschnitte $\theta = \text{const.}$ bleiben eben und werden um einen mit θ proportionalen Winkel gedreht. Ein nicht ganz geschlossener Ring (Fig. 19) bezw. ein solcher mit einander etwas überdeckenden Enden (Fig. 20) wird sich daher in einen Vollring deformieren lassen. Wir wollen die Kreisränder spannungsfrei nehmen; dann bestimmen sich (vgl. § 9) die Verhältnisse der Konstanten a_0, b_0, c_0 so, daß wir für F erhalten:


Fig. 19. Fig. 20.

$$(20)\qquad F_1^0 = \varkappa \left\{ 2a^2b^2 \frac{\lg a - \lg b}{a^2 - b^2} \lg r + r^2 \lg r - \left(\frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2} + \tfrac{1}{2} \right) r^2 \right\}.$$

Der Sektor sei begrenzt von den Schnitten $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi - \varepsilon$, wo ε von der Größenordnung der Verschiebungen sein soll. Die Stirnfläche $\theta = 2\pi - \varepsilon$ wird bei der Deformation gedreht um

$$-\varkappa \cdot \left(\frac{a^2 \lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2} + \tfrac{1}{2} \right) \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu(\lambda' + \mu)} (2\pi - \varepsilon).$$

Wählen wir $\varkappa$ so, daß dieser Ausdruck $= \varepsilon$ wird, so geht der Sektor durch die Deformation in einen Vollring über. In der Berührungslinie $\theta = 0$ müssen zu beiden Seiten Element für Element entgegengesetzt gleiche Spannungen herrschen. Die radialen Verschiebungen sind beiderseits gleich. Denken wir uns aber jetzt die beiden Stirnflächen mit einander befestigt (verlötet oder vernietet), so erhalten wir einen geschlossenen Ring, in dem die durch (20) definierten Selbstspannungen herrschen. Wir schließen:

In einem Vollring kann der durch (20) definierte sogenannte konzentrische Selbstspannungszustand herrschen.

Die Funktion

$$(21)\qquad F = (d_1 r^3 + \gamma_1 r^{-1} + \delta_1 r \lg r) \sin \theta$$

definiert die Spannungen:

$$\mathfrak{P} = \left(\frac{\delta_1}{r} + 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right)\sin\theta,$$

$$\mathfrak{Q} = \left(\frac{\delta_1}{r} + 6d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right)\sin\theta,$$

$$\mathfrak{U} = -\left(\frac{\delta_1}{r} + 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right)\cos\theta$$

und die Verschiebungen:

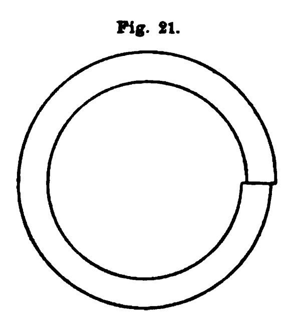
$$(22)\quad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= \left(\frac{\delta_1}{2(\lambda'+\mu)}\cdot \lg r + \frac{\mu-\lambda'}{2\mu(\lambda'+\mu)} d_1 r^2 + \frac{\gamma_1}{2\mu r^2}\right)\sin\theta - \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta\cos\theta, \\ \mathfrak{v} &= \left(\frac{\delta_1}{2(\lambda'+\mu)} \lg r + \frac{3\lambda'+5\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)} d_1 r^2 - \frac{\gamma_1}{2\mu r^2}\right)\cos\theta + \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta\sin\theta. \end{aligned}$$

Sind speziell die Ränder spannungsfrei, so lautet die Lösung:

$$(23)\qquad F_2^0 = \varkappa\,\frac{\sin\theta}{a^2+b^2}\left[(a^2+b^2)r\lg r + \frac{a^2b^2}{2r} - \frac{r^3}{2}\right].$$

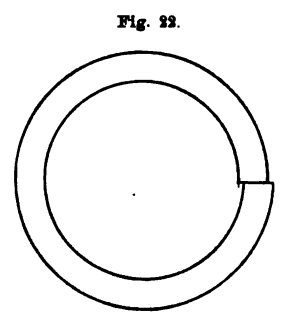
Spannungen und Verschiebungen nehmen für $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ gleiche Werte an, mit Ausnahme von $\mathfrak{u}$. Der an dieser Stelle aufgeschnittene Ring wird also so deformiert, daß die Schnittflächen zwar an und für sich auf einander passen, aber an einander verschoben sind (Fig. 21). Diese Diskontinuität rührt her von den Termen $\mathfrak{u} = -\frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta\cos\theta$; $\mathfrak{v} = \frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta\sin\theta$, die eine Translation jedes Schnittes $\theta = \text{const.}$ parallel X um $-\frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\cdot\delta_1\theta$ repräsentieren.

Fig. 21.



Wir machen nun folgende Überlegung. Nach den Grundvoraussetzungen der Elastizitätstheorie sind die Verschiebungen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ als unendlich klein gegen die Dimensionen des deformierten Gebiets anzusehen. Wir können daher die für den Kreisringsektor geltenden Formeln anwenden auf ein von dieser Form in demselben Sinne unendlich wenig abweichendes Gebiet; dabei werden wir für die Spannungen einen Fehler erhalten, der gegen diese selbst von erster Ordnung unendlich klein ist, für die Verschiebungen einen Fehler, der gegenüber den Dimensionen des Gebiets von zweiter Ordnung unendlich klein ist. — Wenden wir dies an, indem wir statt des Kreisringsektors ein Gebiet nehmen, das aus jenem durch Translation der Schnitte $\theta = \text{const.} \parallel X$ um $\frac{\lambda'+2\mu}{2\mu(\lambda'+\mu)}\delta_1\theta$ erhalten wird (Fig. 22). Die

Fig. 22.



beiden Stirnflächen $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ werden dann nach der Deformation, von unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung abgesehen, auf einander passen und sich gegen einander legen. Die Spannungen beiderseits werden Element für Element entgegengesetzt gleich sein, wenn von unendlich kleinen Größen erster Ordnung abgesehen wird. Wenn wir also jetzt die beiden Stirnflächen mit einander vernieten oder verlöten, so erhalten wir einen Vollring, in dem sich alle Spannungen und Verschiebungen eindeutig und bis auf unendlich kleine Sprünge stetig verhalten. Wir erhalten somit das Resultat:

In einem Vollring kann der durch (23) definierte sogenannte diametrale Selbstspannungszustand herrschen, bei dem entlang $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ nur Schubspannungen auftreten.

Der diametrale Selbstspannungszustand, bei dem entlang $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\theta = \frac{3\pi}{2}$ nur Schubspannungen herrschen, ist natürlich definiert durch:

$$F_3^0 = \varkappa \frac{\cos\theta}{a^2 + b^2} \cdot \left[(a^2 + b^2) r \lg r + \frac{a^2 b^2}{2r} - \frac{r^3}{2}\right]. \tag{24}$$

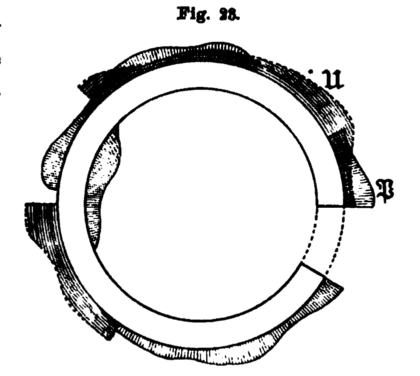
Im ganzen erhalten wir für den geschlossenen Ring ∞^3 Selbstspannungen, entsprechend der Funktion

$$F^0 = F_1^0 + F_2^0 + F_3^0. \tag{25}$$

Dies Ergebnis bildet genau das Analogon zu dem Resultat, das von F. Klein und K. Wieghardt für mehrfach zusammenhängende Fachwerke erhalten wurde (Nr. 9).

Kreisringsektor. Wir haben schließlich noch das Problem des Ringsektors zu erledigen, der längs der Kreisränder beliebige Normal- und Schubspannungen erleidet (Fig. 23). Um auch hier in den exzeptionellen Fällen $m = 0$ und $m = 1$ die Bestimmung der Unbekannten zu ermöglichen, haben wir nur an die entsprechenden Ausführungen für den Vollring anzuknüpfen. Demgemäß haben wir die Randspannungen an dem fehlenden Ringstücke, wo sie durch die Aufgabe nicht definiert sind, so festzusetzen, daß für den Vollring ein Gleichgewichtssystem resultiert. — Die überzähligen Konstanten werden hier durch die hinzutretenden Bedingungen an den Schmalseiten des Sektors bestimmt (vgl. Vorbemerkung).

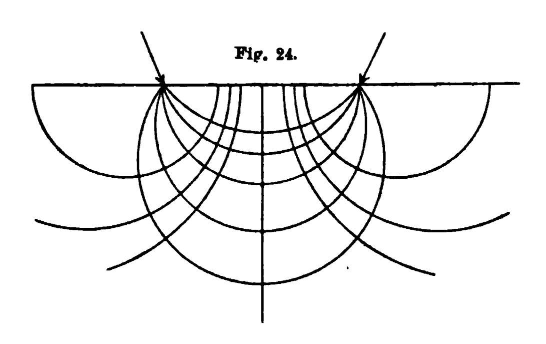
Fig. 23.



3. Kapitel: Der von sich schneidenden Kreisen begrenzte Streifen.

§ 12. Zentrische Verteilungen.

Nachdem die Spannungsprobleme für sich berührende und sich nicht schneidende Kreise erledigt sind, erscheint es naturgemäß, nun auch für das von sich schneidenden Kreisen begrenzte Gebiet eine Lösung zu versuchen. Da aber für den einfachsten Bereich, in den jenes durch Inversion übergeführt werden kann, nämlich den Keil, eine einwandfreie Lösung der Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ z. Z. meines Wissens nicht vorliegt[1]), so müssen wir uns darauf beschränken, auf einige spezielle hierher gehörige Airysche Funktionen von Interesse hinzuweisen. Zunächst stellen wir den unmittelbar einleuchtenden Satz auf:


Fig. 24.

Bei einem Spannungszustand, der aus einer zentrischen Verteilung durch Inversion von einem beliebigen nicht mit dem Zentrum derselben zusammenfallenden Punkte O' aus abgeleitet wird, sind Spannungstrajektorien die beiden durch O' und den Bildpunkt O'' von O als Grundpunkte definierten Kreisbüschel (Fig. 24).

Als zentrische Verteilungen bezeichnen wir dabei die durch die Airyschen Funktionen $F = \frac{\varkappa}{2} r\theta \sin\theta$; $F = \varkappa r^2 \lg r$[2]) und $F = \varkappa \lg r$ bestimmten Spannungszustände, bei denen die Spannungstrajektorien von den Systemen der konzentrischen Kreise und der Radien gebildet werden, und die im Zentrum zu einer konzentrierten Kraft Anlaß geben.

---

1) Zu der Lösung Venskes in den Göttinger Nachrichten 1891 bemerkt Levi-Civita (Nr. 14): „Tale (sc. una soluzione completa) non può dirsi certamente quella abozzata dal sig. Venske loc. cit., tanto più che, per il caso dello spazio angolare l'autore si appoggia sopra la asserzione inesatta che certa funzione W (p. 29) sia armonica."

2) Bei beiden Funktionen darf, wie wir im 2. Kap. gesehen haben, das in Betracht gezogene Gebiet den 0-Punkt nicht umschließen, wenn die Verschiebungen eindeutig resultieren sollen; dies ist besonders bei der Inversion zu beachten.

Für die sog. „einfache radiale Verteilung" $F = \frac{\varkappa}{2} r\theta \sin\theta$ hat bereits Michell (Nr. 18, 19) obigen Satz in zwei speziellen Fällen ausgesprochen. Da bei ihr die Radien spannungsfrei sind, so geht durch Inversion aus ihr offenbar eine Lösung hervor, bei der die in den beiden Grundpunkten sich schneidenden Kreise unter gleichmäßiger Spannung stehen. Diese liefert uns in Verbindung mit einer konstanten gleichförmigen Spannung den Fall eines auf der einen Seite unbelasteten, auf der andern gleichmäßig gespannten krummen Streifens, dessen Schmalseiten symmetrisch beansprucht werden (Fig. 25). Die beiden andern zentrischen Verteilungen führen durch Inversion offenbar zu künstlichen Belastungsfällen besagten krummen Streifens. Als künstlich zu bezeichnen ist auch die in Fig. 26 angedeutete Kombination von drei in den Ecken eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks entspringenden einfachen radialen Verteilungen, bei der die drei Seiten zwar Spannungstrajektorien sind, aber nicht unter gleichmäßiger Spannung stehen.

Fig. 25.

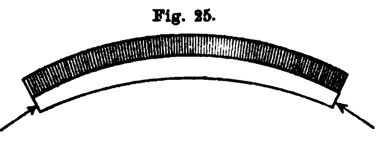
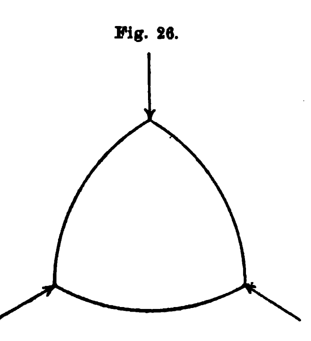


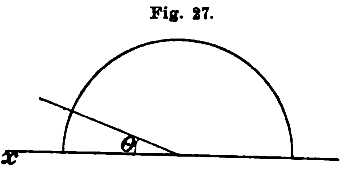
Fig. 26.



§ 13. Lösung für zwei auf einander senkrecht stehende Kreise.

Von zwei zu einander senkrechten Kreisen soll der eine beliebig vorgeschriebene Spannungen erleiden, während von dem andern nichts weiter verlangt wird, als daß er nur Normalspannungen überträgt. — Wir invertieren das von den Kreisen begrenzte Gebiet in einen Halbkreis, dessen Durchmesser wir zur x-Achse machen (Fig. 27). Wir nehmen an, daß die längs dieses Durchmessers vorgeschriebenen Spannungen durch Potenzreihen darstellbar seien:

Fig. 27.



$$\overline{\mathfrak{O}} = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots \qquad (1)$$
$$\overline{\mathfrak{U}} = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \cdots$$

Andererseits setzen wir als Spannungsfunktion an:

$$F = b_0 r^2 + b_1 r^3 \cos\theta + d_1 r^3 \sin\theta \qquad (2)$$
$$+ \sum_{m=2}^{\infty} [a_m r^m + b_m r^{m+2}] \cos m\theta$$
$$+ \sum_{m=2}^{\infty} [c_m r^m + d_m r^{m+2}]] \sin m\theta,$$

woraus sich ergibt:

$$
(2') \begin{cases}
\mathfrak{P} = 2b_0 + 2b_1 r\cos\theta + 2d_1 r\sin\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty} [(1-m)m a_m r^{m-2} + (m+2-m^2) b_m r^m] \cos m\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty} [(1-m)m c_m r^{m-2} + (m+2-m^2) d_m r^m] \sin m\theta, \\
\mathfrak{Q} = 2b_0 + 6b_1 r\cos\theta + 6d_1 r\sin\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty} [(m-1)m a_m r^{m-2} + (m+1)(m+2) b_m r^m] \cos m\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty} [(m-1)m c_m r^{m-2} + (m+1)(m+2) d_m r^m] \sin m\theta, \\
\mathfrak{U} = 2b_1 r\sin\theta - 2d_1 r\cos\theta \\
\quad + \sum_{m=2}^{\infty} [(m-1)m a_m r^{m-2} + m(m+1) b_m r^m \sin m\theta \\
\quad - \sum_{m=2}^{\infty} [(m-1)m \cdot c_m r^{m-2} + m(m+1) d_m r^m] \cos m\theta.
\end{cases}
$$

Nun soll $\mathfrak{U}$ für $r = R$ verschwinden; daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$
(3) \quad \begin{array}{rr}
b_1 = 0 & d_1 = 0 \\
2a_2 + 6b_2 R^2 = 0 & 2c_2 + 6d_2 R^2 = 0 \\
\text{— — — — — —} & \text{— — — — — —} \\
(m-1)a_m + (m+1)b_m R^2 = 0 & (m-1)c_m + (m+1)d_m R^2 = 0
\end{array}
$$

Andererseits gehen Q und U für $\theta = 0$ und $\theta = 180^0$ über in:

$$
\mathfrak{Q} = 2(b_0 + a_2) + 6(b_1 + a_3)x + \cdots + (m+1)(m+2)(b_m + a_{m+2})x^m + \cdots
$$

$$
\mathfrak{U} = -2c_2 - 2(d_1 + 3c_2 - 3(2d_2 + 4c_4)x^2 + \cdots + (m+1)[m d_\alpha + (m+2)c_{m+2}]x^m + \cdots
$$

Identifizieren wir diese Reihen mit den gegebenen Potenzentwicklungen (1), so erhalten wir das Gleichungssystem:

$$
(4) \quad \begin{array}{rr}
2(b_0 + a_2) = k_0 & -2c_2 = l_0 \\
6(b_1 + a_3) = k_1 & -2(d_1 + 3c_3) = l_1 \\
12(b_2 + a_4) = k_2 & -3(d_2 + 4c_4) = l_2 \\
\text{— — — — —} & \text{— — — — —} \\
(m+1)(m+2)(b_m + a_{m+2}) = k_m & -(m+1)[m d_m + (m+2)c_{m+2}] = l_m
\end{array}
$$

Aus (3) und (4) folgen die Rekursionsformeln:

$$(5) \qquad a_m = \frac{k_{m-2}}{m(m-1)} - b_{m-2}; \qquad b_m = -\frac{m-1}{m+1}\frac{a_m}{R^2},$$

ausgehend von $b_1 = 0$ und $a_2 = \text{const.}$,

$$(6) \qquad c_m = -\frac{l_{m-2}}{m(m-1)} - \frac{m-2}{m} d_{m-2}; \qquad d_m = -\frac{m-1}{m+1}\frac{c_m}{R^2},$$

ausgehend von $d_1 = 0$ und $c_2 = -\frac{l_0}{2}$.

Daß die damit für $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{U}$ erhaltenen Reihen konvergieren, folgt unter Voraussetzung der absoluten Konvergenz der gegebenen Potenzreihen (1) ohne weiteres aus der Tatsache, daß sich zu den nach den Vorzeichen zusammengefaßten Partialreihen stets konvergente (dem Argument $\theta = 0$ entsprechende) Majoranten angeben lassen.

Schluß.

Durch geeignete Kombination bezw. ev. Spaltung der diskutierten Spannungsfunktionen, verbunden mit dem wichtigen Hilfsmittel der Inversion würden sich natürlich noch mancherlei Lösungen von größerem oder geringerem praktischen Interesse ableiten lassen. Allerdings wird unsere inverse Methode auch oft zu „künstlichen“ Verteilungen führen. Als Beispiel hierfür sei erwähnt, daß die Funktion $F = \frac{1}{12}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$ einen Zustand definiert, bei dem die beiden Orthogonalsysteme der gleichseitigen Hyperbel die Spannungstrajektorien repräsentieren, während die Spannung selbst dem Quadrat des Abstandes vom 0-Punkte proportional ist. Die Lösungen $F = \theta$ und $F = r^2\theta$ (natürlich nur für ein den 0-Punkt nicht umschließendes Gebiet brauchbar) liefern als Spannungstrajektorien die Systeme logarithmischer Spiralen $r \cdot e^{\theta} = \text{const.}$ und $r \cdot e^{-\theta} = \text{const.}$, während die Hauptspannungen in dem einen Falle mit dem Quadrat der Entfernung abnehmen, im andern Fall mit $2\theta - 1$, bezw. $2\theta + 1$ proportional sind. Dagegen gewinnt man, wie Michell (Nr. 19) gezeigt hat, durch Überlagerung zweier Lösungen $r^2\theta$ mit verschiedenem Koordinatenanfang unmittelbar eine praktisch bedeutsame Lösung: die Verteilung in einer von einer Geraden begrenzten Halbebene, die eine über ein Stück der Grenzgeraden gleichmäßig verteilte normale Last trägt. Von hier gelangt man übrigens direkt zur Darstellung des Falls beliebiger normaler Belastung W der Halbebene durch den Ansatz $F = \frac{1}{2\pi}\int^{x} r_1^2\theta_1 \cdot \frac{dW}{dx} \cdot dx$. Man sieht jedenfalls, daß das Studium der Lösungen der Differential-

gleichung $\varDelta\varDelta F = 0$ noch manche interessante Anwendungen auf ebene elastische Probleme verspricht.

Es erscheint mir nun nicht zweifelhaft, daß eine in ähnlicher Weise durchgeführte Untersuchung der Lösungen der Laméschen Relationen für die Verschiebungen, $\varDelta\varDelta u = 0$, $\varDelta\varDelta v = 0$, $\varDelta\varDelta w = 0$[1]) gleichfalls sich als recht lohnend erweisen würde. So leuchtet z. B. ein, daß sich mit Leichtigkeit mögliche Formen verbogener Platten angeben lassen, wenn die Begrenzung von Kurven nicht zu hoher Ordnung gebildet wird. Bei elliptischer Begrenzung z. B. können die Niveaukurven durch $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \text{const.}$ gegeben sein[2]), bei lemniskatischer Begrenzung durch $x^2 + y^2 - 2c^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \text{const.}$, bei Begrenzung durch Kreis und gleichseitige Hyperbel durch $(x^2 + y^2 - R_1^2)(x^2 - y^2 - R_2^2) = \text{const.}$ usw.

Anhang.

Literatur zur Differentialgleichung $\varDelta\varDelta F = 0$ (Theorie und Anwendungen).

1. E. Almansi, „Sull' integrazione dell' equazione $\varDelta^2\varDelta^2 u = 0$", Atti della R. Acc. di Torino XXXI (1895/96).
2. —, „Sulla deformazione della sfera elastica", Memorie di Torino XLVII (1897).
3. —, „Sulla integrazione dell' equazione $\varDelta^2\varDelta^2 u = 0$", Atti della R. Acc. di Torino XXXIV (1898/99).
4. —, „Sull' integrazione dell' equazione differenziale $\varDelta^2\varDelta^2 = 0$", Atti della R. Acc. dei Lincei, Rendiconti, Roma Ser. 5, vol 8, 1 (1899).
5. —, „Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un' area semplicemente connessa per date condizioni al contorno", Reudiconti del Circolo Matem. di Palermo XIII (1899).
6. —, „Sull' integrazione dell' equazione differenziale $\varDelta^{2n} = 0$", Annali di Matematica 3, II (1899).
7. —, „Integrazione della doppia equazione di Laplace", Atti della R. Acc. dei Lincei, Rendiconti, Roma Ser. 5, vol 9, 1 (1900).
8. Goursat, „Sur l'équation $\varDelta\varDelta u = 0$", Bull. de la Soc. Mathém. de France XVI (1898).
9. F. Klein und K. Wieghardt, „Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten", Archiv d. Math. u. Phys. 3. Reihe VIII (1904).

---

1) Bezw. der dafür eintretenden gleichen Relationen für die erzeugenden Funktionen Somiglianas (Nr. 20, 21).

2) $w = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 \cdot \text{const.}$ liefert offenbar den Fall der gleichmäßig belasteten, am Rande horizontal eingeklemmten elliptischen Platte ($\varDelta\varDelta w = c$, am Rande $\overline{w} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial n} = 0$).

10. Lamé, „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides", Paris 1866.
11. G. Lauricella, „Integrazione dell' equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$ in un campo di forma circolare", Atti della R. Acc. di Torino XXXI (1895/96).
12. —, „Sull' equazione delle vibrazioni delle placche incastrate", Mem. di Torino 2, XLVI (1896).
13. F. Levi Civita, „Sull' integrazione dell' equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$", Atti della R. Acc. di Torino XXXIII (1897/98).
14. —, „Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$", Venezia 1898 (Tip. Ferrari).
15. E. Mathieu, „Sur le mouvement vibratoire des plaques", Journal de Math. 2, XIV (1869).
16. —, Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide", Journal de Math. 2, XIV (1869).
17. J. H. Michell, „On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates", Proc. Lond.. M. Soc. 31 (1899).
18. —, „Elementary distributions of plane stress", Proc. Lond. M. Soc. 32 (1900).
19. —, „The Inversion of plane stress", Proc. Lond. M. Soc. 34 (1901/02).
20. Somigliana, „Sulle equazioni della elasticità", Annali di Mat. 2, XVIII (1889/90).
21. —, „Sopra gli integrali della equazioni della isotropia elastica", Nuovo Cimento 3, XXXVI (1894).
22. O. Venske, „Zur Integration der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$, Gött. Nachr. 1891.
23. K. Wieghardt, Über ein Verfahren, verwickelte theoretische Spannungsverteilungen auf experimentellem Wege zu finden. Vortrag im Aachener Bezirksverein deutscher Ingenieure 3. Mai 1905.

Über die elastische Deformation eines kreisförmigen Rings.

Von TH. WEITBRECHT in Tübingen.

Ein kreisförmiger Ring, dessen Querschnitt gegenüber seinem Radius sehr klein und zur Mittelebene des Rings symmetrisch sein möge, werde von Kräften angegriffen, die in dieser Ebene wirken. Das Material des Rings setzen wir als homogen voraus. Das Problem ist damit auf ein ebenes beschränkt. An einem solchen Ring denken wir uns, gleichförmig verteilt, zahlreiche homogene radiale Zugstangen angebracht, die auf einer Nabe im Mittelpunkt aufsitzen und in einen Zustand der Spannung versetzt sind, so daß der Ring nach ihrer Anspannung einen etwas kleineren Radius erhält, als in seinem natürlichen Zustand. Die Anzahl der Zugstangen wollen wir so groß annehmen, daß sich die Summe ihrer Wirkungen auf ein endliches Stück des Rings durch das Integral über ein diesem Ringstück entsprechendes

Intervall ersetzen läßt. Diese gespannten Zugstangen, die sich bei der Deformation des Rings verlängern bezw. verkürzen, bedingen einen gewissen Zustand der Starrheit des ganzen Systems, so daß nur kleine Deformationen desselben in Betracht zu ziehen sind. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Verlängerungen und Verkürzungen der Zugstangen in dem Ring selbst beträchtliche Kräfte hervorrufen, welche Komponenten in der Richtung der Tangente an die kreisförmige Achse des Rings besitzen. Sie veranlassen Längenänderungen der Achse, die gegenüber der geringen Änderung der Krümmung nicht von vornherein zu vernachlässigen sind. Man darf daher auf das vorliegende Problem nicht ohne weiteres die gewöhnlichen Biegungsformeln für gekrümmte Stäbe anwenden. Wohl aber sind gewisse zuerst von Winkler[1]) für gekrümmte Stäbe angegebene Beziehungen zwischen den in einem Querschnitt wirkenden Kräften und den Formänderungen, die sie hervorrufen, auch auf unser Problem anwendbar. Diese Formeln dienen zur Herstellung der Differentialgleichungen für die Verschiebungsgrößen der Punkte der Ringachse. Wir werden diese zunächst für den Fall ermitteln, daß der Kreisring an den Endpunkten eines Durchmessers von zwei gleich großen in der Richtung nach dem Mittelpunkt wirkenden Kräften angegriffen wird. Dann werden wir den Fall untersuchen, daß ein Druck von der Nabe aus nach einem festgehaltenen Punkt der Peripherie hin wirkt, so daß der Ring in derselben Weise beansprucht wird, wie etwa ein Fahrrad beim Gebrauch.

Das Nachfolgende ist die Umarbeitung einer Preisschrift, welche 1904 der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen vorgelegt war; meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor von Brill, sage ich meinen herzlichsten Dank für die mannigfaltige Anregung und Förderung, die ich von seiner Seite erfahren durfte.

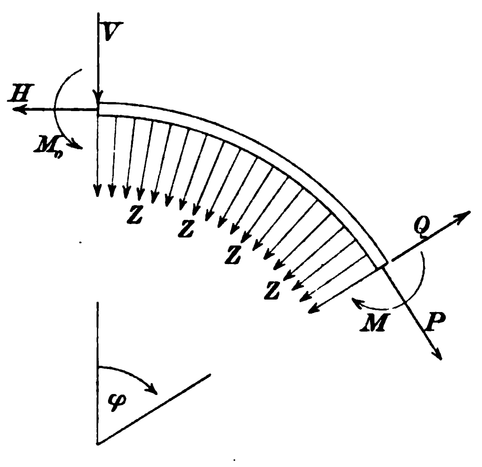
§ 1. Herleitung der Differentialgleichungen.

Der Mittelpunkt des Kreisrings sei der Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems (r, φ); $\varphi = 0$ entspreche dem obersten Punkt der Ringachse, φ wachse im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers. Wir denken uns, nachdem durch äußere Kräfte, die etwa im Zentrum oder an der Peripherie wirken, die Deformation eingetreten ist, aus dem aus Ring und Zugstangen bestehenden System durch zwei Querschnitte an der Stelle $\varphi = 0$ und an der beliebigen Stelle φ ein endliches Ringstück mit Teilen der daran befestigten Zugstangen herausgeschnitten; die vor dem Durchschneiden an den durchschnittenen Stellen wirkenden Drucke

1) Winkler, Elastizität und Festigkeit § 283.

ersetzen wir durch Kräfte, die in den Schwerpunkten der nun frei gewordenen Querschnitte angreifen, und durch Kräftepaare, welche die Krümmung der Ringachse an diesen Stellen zu vergrößern streben.

An dem Querschnitt bei $\varphi = 0$ bringen wir eine nach dem Mittelpunkt gerichtete Kraft V an; senkrecht zu ihr, in der Richtung der Ringachse, den horizontalen Zug H, dazu ein Kräftepaar M_0. An dem Querschnitt in φ wirke in der Richtung der Tangente an die Ringachse der Zug P, senkrecht dazu die Kraft Q, und das Kräftepaar M. Die Deformation eines an der Stelle φ befindlichen Ringelements, das wir uns durch zwei senkrecht auf der Ringachse stehende, einen sehr kleinen Winkel einschließende Ebenen begrenzt denken, hängt ab von den an dieser Stelle wirkenden Kräften P und Q und dem Kräftepaar M; der Einfluß der an dem Element angebrachten Zugstangen auf die Deformation ist gegen die Wirkung von P, Q und M zu vernachlässigen. Nach dem Vorgang von Kirchhoff[1]) wollen wir statt des gekrümmten Ringelements das eines ursprünglich zylindrischen Stabes untersuchen, und an der gefundenen Formel nachträglich eine der ursprünglichen Krümmung des Rings entsprechende Veränderung anbringen.



P ist die Resultante der zur Ringachse parallel wirkenden Spannungen N der zur Achse parallelen Fasern pro Flächeneinheit des Querschnitts φ. Da das Hookesche Gesetz gilt, so setzen wir

$$N = E \frac{\Delta d s_y}{d s};$$

dabei bedeutet $\frac{\Delta d s_y}{d s}$ die Verlängerung der betrachteten Faser pro Längeneinheit, y ihren Abstand von einer zur Ringebene senkrechten, die Achse des Elements enthaltenden Ebene, wo die y von der Innennach der Außenseite des Rings wachsen mögen, E den Elastizitätsmodul des Rings. Ferner gilt bei sehr kleinen Querschnitten die Beziehung[2])

$$\text{(A)} \qquad \frac{\Delta d s_y}{d s} = \frac{\Delta\, d s}{d s} + \frac{y}{\varrho},$$

1) Kirchhoff, Mechanik, 28. Vorl. § 2 a. E.

2) Grashof, Elast. u. Festk. Nr. 36. Winkler, § 283.

wo $\frac{\Delta ds}{ds}$ die relative Verlängerung der Achse, $\frac{1}{\varrho}$ ihre Krümmung nach der Deformation bedeutet. Diese Formel drückt aus, daß die Längsänderungen der Fasern so vor sich gehen, als ob ursprünglich ebene Querschnitte bei der Deformation eben blieben. Man geht zu einem Ring mit der ursprünglichen Krümmung $\frac{1}{r}$ über, indem man die Annahme macht, daß auch für diesen jede zur Achse parallele Faser für sich jenem Gesetz folgt, daß also nur an die Stelle von $\frac{1}{\varrho}$ die *Änderung* der Krümmung, $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}$ tritt[1]), für die man $\frac{\Delta d\varphi}{ds}$ setzen kann, wo $r\,d\varphi = ds$ ist. Für einen Ring von der ursprünglichen Krümmung $\frac{1}{r}$ ist

$$ds_y = ds\frac{r+y}{r}$$

und wegen $N = E\frac{\Delta ds_y}{ds_y}$ geht (A) dann über in

$$N = E\left(\frac{\Delta ds}{ds} + y\frac{\Delta d\varphi}{ds}\right)\frac{r}{r+y}.$$

Bildet man nun[2])

$$P = \int N df \quad \text{und} \quad M = \int N y df,$$

wo df ein Element des Querschnitts bedeutet und die Integration sich über den ganzen Querschnitt erstreckt, und berücksichtigt man dabei, daß die Achse des Ringelements durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht, sowie daß y klein gegen r ist, so erhält man, wenn man die so entstehenden Gleichungen nach $\frac{\Delta ds}{ds}$ und $\frac{\Delta d\varphi}{ds}$ auflöst und dabei

$$\int df = F, \quad \int y^2 df = W$$

setzt:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\Delta ds}{ds} &= \frac{P}{EF} + \frac{M}{EFr}, \\ \frac{\Delta d\varphi}{ds} &= \frac{P}{EFr} + \frac{M}{EFr^2} + \frac{M}{EW}. \end{aligned}$$

Dies sind die Winklerschen Formeln.[3]) Sie verwandeln sich in die Differentialgleichungen des Problems, indem man für s, φ Polarkoordinaten und für P, M die der Annahme über die Zugstangen und die äußeren Kräfte entsprechenden Werte einsetzt.

Die Ringachse denken wir uns zunächst durch die Zugstangen gespannt, aber immer noch kreisförmig. Ein Punkt derselben, (r, φ),

---

1) Kirchhoff l. c. 2) Winkler, § 63.
3) Winkler, § 283; Grashof Nr. 168.

werde dann durch die Deformation an den Ort $\left(r+q,\ \varphi+\frac{p}{r}\right)$ versetzt, so daß also q die Zunahme des Radius Vektor, $\frac{p}{r}$ die Zunahme des Winkels φ bedeutet. Die Deformation des Rings ist vollkommen beschrieben, wenn p und q als Funktionen von φ bekannt sind. Zunächst sind also die linken Seiten der Gleichungen (1) als Funktionen von p, q und φ auszudrücken. Nennt man die Bogenlänge der undeformierten (aber gespannten) Achse des Rings s, die der deformierten s', von $\varphi = 0$ an gerechnet, so läßt sich mit Vernachlässigung von Ausdrücken zweiter Ordnung in p und q und ihren Ableitungen nach φ setzen

$$\Delta ds = (r+q)\,d\left(\varphi+\frac{p}{r}\right) - r d\varphi = q d\varphi + p' d\varphi,$$

wo der Akzent eine Differentiation nach φ bedeutet; hieraus

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{q+p'}{r}. \tag{2}$$

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{p'-q''}{r^2} \tag{3}$$

ist.

Weiter sind die Größen P und M als Funktionen des Winkels φ und gewisser Konstanten (Belastung, ursprünglicher Spannung, Abmessungen und Materialkonstanten des Rings) auszudrücken.

Die Zugstangen denken wir uns, bevor die äußeren Kräfte angebracht werden, also vor Eintritt der Deformation, bereits in gespanntem Zustand derart, daß sie (senkrecht) auf die Längeneinheit der Ringachse den Zug Z_0 ausüben, während der hierdurch in der Richtung der Längsachse des Ringes hervorgerufene Gesamtdruck P_1 sein möge. Es ist nun leicht zu sehen, daß

$$P_1 = -Z_0 r$$

ist. Ein durch die Querschnitte $-\varphi$ und $+\varphi$ begrenztes Stück des Rings nämlich ist in diesem gespannten Zustand nur dann im Gleichgewicht, wenn

$$2P_1\sin\varphi = -\int_{-\varphi}^{+\varphi} Z_0\cos\varphi r\,d\varphi = -2Z_0\sin\varphi\cdot r$$

ist. Der gesamte Druck P' an einer Stelle φ nach der Deformation setzt sich zusammen aus P_1 und dem durch die Deformation hervorgerufenen Druck P, sodaß man hat

$$P' = P + P_1.$$

Da die Deformation des Rings als sehr klein vorausgesetzt wird, so werden die Kräfte Z, welche die Zugstangen auf den Ring ausüben, auch nach der Deformation noch senkrecht auf den Ringelementen stehen und den Verlängerungen der Zugstangen proportional sein, sodaß man hat

$$Z = Z_0 + aq.$$

Die Bedeutung der Größe a ergibt sich folgendermaßen. Der Ring werde dadurch in den gespannten Zustand versetzt, daß die Speichen, die ursprünglich, vom Mittelpunkt des Rings aus gerechnet, die Länge $r_2 < r$ besaßen, an dem Ring mit dem ursprünglichen Radius $r_1 > r$ befestigt wurden, wobei sie sich sämtlich auf die Länge r verlängerten, während sich der Ring zusammenzog. Die Nabe im Mittelpunkt des Rings habe den Radius ϱ, der Ringquerschnitt bilde etwa ein Quadrat von der Seitenlänge b, derjenige der Zugstangen sei ein schmales Rechteck, dessen größere Seite ebenfalls die Länge b haben möge. Nennt man nun den Querschnitt einer Zugstange m, die Anzahl der an der Längeneinheit der Peripherie angreifenden Zugstangen n, und denkt man sich dieselben auf der Nabe so befestigt, daß sich je zwei längs der Seite b berühren, so hat man, wenn E_1 der Elastizitätsmodul der Zugstangen ist,

$$Z_0 = m \cdot n \cdot E_1 \frac{r - r_2}{r_2 - \varrho}.$$

Werden nun äußere Kräfte angebracht, so erfolgt eine Deformation des Rings, durch welche Z_0 in Z, r in $r + q$ und n in $\frac{n \cdot r}{r + q}$ oder, da q gegen r sehr klein ist, wieder in n übergeht, und man hat aus

$$Z = Z_0 + aq,$$

$$a = \frac{m \cdot n \cdot E_1}{r_2 - \varrho}.$$

Nun ist $\frac{m}{b} \cdot n = \frac{\varrho}{r}$, daher $a = \frac{\varrho \cdot E_1 \cdot b}{r(r_2 - \varrho)}$.

Setzt man jetzt die Kräfte, die an dem von den Querschnitten $\varphi = 0$ und φ begrenzten Ringstück und an den (stetig verteilt gedachten) Speichen wirken, ins Gleichgewicht, zuerst hinsichtlich der Richtung P', so erhält man

$$P' + V \sin\varphi - H \cos\varphi + \int_0^{\varphi} Z \sin(\varphi - \psi)\, r\, d\psi = 0,$$

wo ψ einen veränderlichen Winkel zwischen 0 und φ bedeutet. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$P_1 = - Z_0 r,$$

sowie auf die Beziehungen

$$P' = P_1 + P \quad \text{und} \quad Z = Z_0 + aq$$

wird

$$(4)\qquad \begin{aligned} P = H\cos\varphi - V\sin\varphi + Z_0 r\cos\varphi + ar\cos\varphi\int_0^\varphi q\sin\varphi d\varphi \\ - ar\sin\varphi\int_0^\varphi q\cos\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der Momente ergibt

$$M = M_0 + Vr\sin\varphi + Hr(1-\cos\varphi) + \int_0^\varphi Zr^2 d\psi \sin(\varphi - \psi),$$

oder

$$\begin{aligned} M = M_0 + Vr\sin\varphi + Hr(1-\cos\varphi) + Z_0 r^2(1-\cos\varphi) \\ + ar^2\left[\sin\varphi\int_0^\varphi q\cos\varphi d\varphi - \cos\varphi\int_0^\varphi q\sin\varphi d\varphi\right]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der in (4) und (5) angegebenen Werte von P und M ergibt sich aus (1) und (2)

$$(6)\qquad (q + p')EF = M_0 + Hr + Z_0 r^2.$$

Multiplizieren wir die Gleichung (3) mit r und subtrahieren sie von (2), so erhalten wir mit Rücksicht auf (1)

$$(q + q'')EW = -Mr^2.$$

Differenziert man diese Gleichung zweimal nach φ und addiert, so erhält man mit Rücksicht auf (5)

$$(q + 2q'' + q^{\mathrm{IV}})\frac{EW}{r^2} = -(M_0 + Hr + Z_0 r^2 + ar^2 q);$$

und hieraus, wenn man

$$\frac{ar^4}{EW} + 1 = a_1$$

setzt, durch nochmalige Differentiation

$$(7)\qquad a_1 q' + 2q''' + q^{\mathrm{V}} = 0.$$

Aus dieser Differentialgleichung und den Gleichungen (5) und (6) lassen sich p und q als Funktionen von φ berechnen. Sie gilt für jede Deformation eines mit gespannten Zugstangen versehenen Rings; wenn an mehreren Stellen äußere Kräfte angreifen, so ist sie für jedes freie Ringstück besonders anzusetzen. Dem Fall, daß keine Zugstangen wirken, entspricht $a_1 = 1$. In diesem Fall wird die Längenänderung

der Achse außerordentlich klein sein; setzt man also in (2) $\Delta ds = 0$, so wird

$$q = -p',$$

und (7) geht über in

$$p'' + 2p^{IV} + p^{VI} = 0.$$

Diese einem Reif *ohne* Zugstangen entsprechende Differentialgleichung hat schon Herr Lamb[1]) aufgestellt und behandelt.

§ 2. Erste Anwendung.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall, daß der Ring in den Punkten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ von zwei gleich großen entgegengesetzt gerichteten radialen Drucken $2V$ angegriffen wird. Dann ist

$$q_0' = 0; \qquad q'_{\frac{\pi}{2}} = 0; \qquad q'_\pi = 0;$$
$$p_0 = 0; \qquad p_{\frac{\pi}{2}} = 0; \qquad p_\pi = 0.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$q' = e^{t\varphi}$$

erhält man zunächst aus (7)

$$t = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{-\frac{ar^4}{EW}}};$$

setzt man $\sqrt{-1 + i\sqrt{\frac{ar^4}{EW}}} = \alpha + i\beta$, so kommt

$$(8) \qquad \alpha^2 - \beta^2 = -1; \qquad 2\alpha\beta = \sqrt{\frac{ar^4}{EW}}$$

und hieraus

$$\alpha = \sqrt{-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{ar^4 + EW}{4EW}}}; \qquad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{ar^4 + EW}{4EW}}}.$$

Die vier Werte von t sind

$$t_1 = \alpha + i\beta; \quad t_2 = \alpha - i\beta; \quad t_3 = -\alpha + i\beta; \quad t_4 = -\alpha - i\beta.$$

Dem Fall eines von Zugstangen *freien* Rings entspricht $\alpha = 0$. Dann werden je zwei Werte von t einander gleich. Um trotzdem die nötige Zahl von Konstanten zu erhalten, setzen wir

$$q' = e^{\alpha\varphi}(c \cdot e^{i\beta\varphi} + d \cdot e^{-i\beta\varphi}) + \frac{e^{\alpha\varphi} - e^{-\alpha\varphi}}{2\alpha}(f \cdot e^{i\beta\varphi} + g \cdot e^{-i\beta\varphi}),$$

wo c, d, f und g willkürliche Konstanten sind. Wegen $q_0' = 0$ ergibt sich hieraus mit Hilfe neuer Konstanten A, C, D:

$$(9) \qquad q' = A \cdot e^{\alpha\varphi} \sin\beta\varphi + \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi}{\alpha}[C\cos\beta\varphi + D\sin\beta\varphi],$$

1) Proc. Lond. Math. Soc. XIX, 1888, pag. 369 f.

und hieraus wegen $q'_{\frac{\pi}{2}} = 0$ und $q'_{\pi} = 0$

$$C = -\frac{A \cdot \alpha \sin \beta\pi}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}; \quad D = \frac{A \cdot \alpha\,(\cos \beta\pi - e^{\alpha\pi})}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha^2 + \beta^2 = t^2 \quad \text{und} \quad \alpha = t \cos \tau;\ \beta = t \sin \tau,$$

und berücksichtigt, daß

$$\int e^{\alpha\varphi} \sin \beta\varphi\, d\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \sin(\beta\varphi - \tau)$$

und
$$\int e^{\alpha\varphi} \cos \beta\varphi\, d\varphi = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \cos(\beta\varphi - \tau)$$

ist, so erhält man durch Integration von (9)

$$\begin{aligned} q = {} & A\frac{e^{\alpha\varphi}}{t} \sin(\beta\varphi - \tau) + \frac{C}{\alpha t^2}(\alpha \cos \beta\varphi\, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi + \beta \sin \beta\varphi\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi) \\ & + \frac{D}{\alpha t^2}(\alpha \sin \beta\varphi\, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi - \beta \cos \beta\varphi\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi) + C', \end{aligned} \tag{11}$$

wo C' eine noch zu bestimmende Integrationskonstante bedeutet. Dieser Ausdruck geht mit Hilfe von Beziehungen wie:

$$\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi \cdot e^{\alpha(\pi - \varphi)} - \mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) \cdot e^{\alpha\pi} = -\mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi$$

in die Form über

$$\begin{aligned} q = {} & \frac{-A}{t^2\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}[\alpha(\sin \beta\varphi\, \mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) + \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi \sin \beta(\pi - \varphi)) \\ & + \beta(\mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi \cos \beta(\pi - \varphi) + \cos \beta\varphi\, \mathfrak{Sin}\, \alpha(\pi - \varphi))] + C'. \end{aligned} \tag{11a}$$

Für p finden wir mit Rücksicht auf (6)

$$p = \frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF}\varphi - \int q\, d\varphi - \frac{2D'\alpha\beta}{t^4},$$

wo D' eine neue Konstante bedeutet. Diese bestimmt sich mit Rücksicht auf $p_0 = 0$, sowie auf (10) und (11) zu:

$$D' = A\frac{\cos \beta\pi - \mathfrak{Cof}\, \alpha\pi}{\mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}.$$

Mit Hilfe derselben Beziehungen, welche auf Gleichung (11a) führten, erhält nun p die Form

$$\begin{aligned} p = {} & \left(\frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF} - C'\right)\varphi - \frac{2A\alpha\beta}{t^4\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}(\cos \beta\pi - \mathfrak{Cof}\, \alpha\pi) \\ & - \frac{A}{t^2\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\pi}\Big[\frac{2\alpha\beta}{t^2}(\mathfrak{Cof}\, \alpha(\pi - \varphi) \cos \beta\varphi - \cos \beta(\pi - \varphi)\, \mathfrak{Cof}\, \alpha\varphi) \\ & - \mathfrak{Sin}\, \alpha(\pi - \varphi) \sin \beta\varphi + \sin \beta(\pi - \varphi)\, \mathfrak{Sin}\, \alpha\varphi\Big], \end{aligned} \tag{12}$$

wo die Konstanten M_1, H, C', A noch zu bestimmen sind. Die Bedingungen $p_{\frac{\pi}{2}} = 0$ und $p_\pi = 0$ führen beide auf die Gleichung

$$(13)\qquad \left(\frac{M_1 - Hr - Z_1 r^2}{EF} - C'\right)\pi + \frac{4\alpha\beta A}{r^2\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi}\left(\mathfrak{Cos}\,\alpha\pi - \cos\beta\pi\right) = 0.$$

Bildet man die Gleichung

$$(q + q'')\,EW = -Mr^2$$

für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pi$, so erhält man

$$(14)\qquad -M_0 = C'\frac{EW}{r^2} + \frac{2A\cdot\alpha\beta}{r^2}\cdot\frac{EW}{r^2}\cdot\frac{\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi - \beta\sin\beta\pi}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi}.$$

Berücksichtigt man weiter, daß

$$q_0 = q_\pi \quad \text{und} \quad q_0'' = q_\pi'' \text{ ist,}$$

und subtrahiert man die eine der beiden für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ gebildeten Gleichungen von der andern, so kommt

$$(15)\qquad 2H + 2Z_0 r + ar\int_0^\pi q\sin\varphi\,d\varphi = 0.$$

Da

$$\int_0^\pi q\sin\varphi\,d\varphi = q_\pi + q_0 + \int_0^\pi q'\cos\varphi\,d\varphi$$

ist, so ist zunächst das Integral

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\,d\varphi$$

zu berechnen. Zu dem Zweck führen wir die Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned}
\int e^{\alpha\varphi}\sin\beta\varphi\sin\varphi\,d\varphi &= X,\\
\int e^{\alpha\varphi}\sin\beta\varphi\cos\varphi\,d\varphi &= Y,\\
\int e^{\alpha\varphi}\cos\beta\varphi\sin\varphi\,d\varphi &= X',\\
\int e^{\alpha\varphi}\cos\beta\varphi\cos\varphi\,d\varphi &= Y',\\
\int e^{\alpha\varphi}\sin\beta\varphi\,d\varphi &= U,\\
\int e^{\alpha\varphi}\cos\beta\varphi\,d\varphi &= U',
\end{aligned}$$

wo

$$U = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t}\sin(\beta\varphi - \tau),$$

$$U' = \frac{e^{\alpha\varphi}}{t}\cos(\beta\varphi - \tau)$$

ist. Durch partielle Integration der Ausdrücke X bis Y' erhalten wir Beziehungen wie:

$$X = U\sin\varphi - \int U\cos\varphi\, d\varphi,$$

welche auf die Relationen führen:

$$\begin{array}{rrrrl} X & +\frac{\alpha}{t^2}Y & & -\frac{\beta}{t^2}Y' & = U\sin\varphi \\ -\frac{\alpha}{t^2}X & +Y & +\frac{\beta}{t^2}X' & & = U\cos\varphi \\ & \frac{\beta}{t^2}Y & +X' & +\frac{\alpha}{t^2}Y' & = U'\sin\varphi \\ -\frac{\beta}{t^2}X & & -\frac{\alpha}{t^2}X' & +Y' & = U'\cos\varphi. \end{array}$$

Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich mit Rücksicht auf (8)

$$X = U\sin\varphi - U\cos\varphi\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} + \frac{U'\sin\varphi}{2\alpha\beta} + \frac{U'\cos\varphi}{2\beta};$$

$$Y = U\cos\varphi + U\sin\varphi\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} + \frac{U'\cos\varphi}{2\alpha\beta} - \frac{U'\sin\varphi}{2\beta};$$

$$X' = U'\sin\varphi - U'\cos\varphi\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} - \frac{U\sin\varphi}{2\alpha\beta} - \frac{U\cos\varphi}{2\beta};$$

$$Y' = U'\cos\varphi + U'\sin\varphi\frac{t^4+1}{4t^2\alpha\beta^2} - \frac{U\cos\varphi}{2\alpha\beta} + \frac{U\sin\varphi}{2\beta}.$$

Nun läßt sich $\int\limits_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$ in der Form schreiben

$$\int\limits_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi = A[Y]_0^\pi + \frac{C}{2\alpha}[Y']_0^\pi - \frac{C}{2\alpha}[Y'_{-\alpha}]_0^\pi + \frac{D}{2\alpha}[Y]_0^\pi - \frac{D}{2\alpha}[Y_{-\alpha}]_0^\pi,$$

wo der Index $-\alpha$ bedeutet: gebildet für $-\alpha$ statt für α, und die eckigen Klammern mit den angesetzten Grenzen die Differenzen für die obere und untere Grenze bedeuten. Berechnet man diese aus den angegebenen Ausdrücken, so erhält man mit Rücksicht auf (10) den einfachen Ausdruck

$$\int\limits_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi = \frac{A}{\alpha\beta\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi}(\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi + \beta\sin\beta\pi).$$

Gleichung (15) erhält daher die Form

$$H = -Z_0 r - ar(A\lambda + C'), \tag{15a}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\beta \sin \beta\pi - \alpha \operatorname{Sin} \alpha\pi}{2\alpha\beta t^2 \operatorname{Sin} \alpha\pi} = \lambda$$

gesetzt wurde.

Andererseits findet sich durch Elimination von M_0 aus (13) und (14)

$$H = -Z_0 r - A\mu + C'\left(\frac{EW}{r} + \frac{EF}{r}\right), \tag{16}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{4\alpha\beta EF}{\pi r t^4 \operatorname{Sin} \alpha\pi}(\operatorname{Cof} \alpha\pi - \cos\beta\pi) - \frac{2\alpha\beta EW}{r^3 t^2 \operatorname{Sin} \alpha\pi}(\alpha \operatorname{Sin} \alpha\pi - \beta \sin \beta\pi) = \mu$$

gesetzt wurde. Die Elimination von H aus (15a) und (16) liefert

$$C' = \frac{Ar^3(\mu - ar\lambda)}{ar^4 + EW + EFr^2} = \frac{4\alpha\beta r^2 EFA(\operatorname{Cof} \alpha\pi - \cos\beta\pi)}{(ar^4 + EW + r^2EF)\pi t^4 \operatorname{Sin} \alpha\pi}.$$

Es ist noch A als Funktion von V zu bestimmen. Aus der Gleichung

$$(q + q'')EW = -Mr^2$$

folgt mit Rücksicht auf $q_0' = 0$

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)_{\varphi=0} = -q_0''' \cdot \frac{EW}{r^3};$$

nun findet man aber aus (5)

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)_{\varphi=0} = V,$$

ferner ist nach (9) mit Rücksicht auf (10)

$$q_0''' = 2\alpha\beta A \frac{\cos\beta\pi - \operatorname{Cof} \alpha\pi}{\operatorname{Sin} \alpha\pi},$$

daher

$$A = \frac{Vr^3}{2EW\alpha\beta} \cdot \frac{\operatorname{Sin} \alpha\pi}{\operatorname{Cof} \alpha\pi - \cos\beta\pi}.$$

Die Größen p und q stellen sich somit folgendermaßen dar:

$$(17)\quad \begin{aligned} q = \frac{Vr^3}{EWt^2}\Big\{&\frac{1}{2\alpha\beta(\cos\beta\pi - \operatorname{Cof} \alpha\pi)}[\alpha(\sin\beta\varphi \operatorname{Cof} \alpha(\pi-\varphi) + \operatorname{Cof} \alpha\varphi \sin\beta(\pi-\varphi)) \\ &+ \beta(\operatorname{Sin} \alpha\varphi \cos\beta(\pi-\varphi) + \cos\beta\varphi \operatorname{Sin} \alpha(\pi-\varphi))] + \frac{EFr^2}{(ar^4 + EW + EFr^2)\pi t^2}\Big\} \\ p = \frac{Vr^3}{EWt^4}\Big\{&\frac{1}{2\alpha\beta(\cos\beta\pi - \operatorname{Cof} \alpha\pi)}[2\alpha\beta(\operatorname{Cof} \alpha(\pi-\varphi)\cos\beta\varphi - \cos\beta(\pi-\varphi) \operatorname{Cof} \alpha\varphi) \\ &- t^2(\operatorname{Sin} \alpha(\pi-\varphi)\sin\beta\varphi - \sin\beta(\pi-\varphi) \operatorname{Sin} \alpha\varphi)] - \frac{2\varphi}{\pi} + 1\Big\}. \end{aligned}$$

Da die Gleichungen (4) und (5) nur für ein Ringstück gelten, an dem außer V keine äußeren Kräfte angreifen, so gelten auch die gefundenen Ausdrücke für p und q nur für Werte von φ zwischen 0 und π. Offenbar aber würde man für die Deformation des andern Halbrings genau dieselben Ausdrücke in ψ erhalten, wenn man $\varphi - \pi = \psi$ setzte, also den Anfangsradius nach $\varphi = \pi$ legte. Die Größen p und q für Werte von φ zwischen π und 2π gehen also aus (17) hervor durch Vertauschung von φ mit $\varphi - \pi$.

Daß die Ausdrücke (17) als Funktionen von φ nicht die Periode 2π besitzen, ist ein Mangel, den sie bekanntlich mit den Lösungen aller derjenigen elastischen Probleme teilen, welche diskontinuierlich wirkende endliche Kräfte, wie hier die auf die Peripherie wirkende Angriffskraft $2V$, voraussetzen.[1] Die Diskontinuität, die an den Stellen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ auftritt[2], macht sich übrigens erst bei q''' und p^{IV} bemerklich. Es wird

$$[q''']_{2\pi}^{0} = -\frac{2Vr^3}{EW} \quad \text{und} \quad [p^{IV}]_{2\pi}^{0} = +\frac{2Vr^3}{EW}.$$

§ 3. Zweite Anwendung.

Wir behandeln noch die Deformation eines Rings, auf den im Punkte $\varphi = 0$ eine Last $2V$ gegen die Nabe hin drückt, während diese festgehalten wird und keine weiteren Kräfte angreifen.

Weil wieder

$$q_0' = 0$$

ist, wird:

$$q' = A \cdot e^{\alpha\varphi} \sin\beta\varphi + \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi}{\alpha}[C\cos\beta\varphi + D\sin\beta\varphi].$$

Statt $q'_{\frac{\pi}{2}} = 0$ und $q'_{\pi} = 0$ hat man jetzt

$$q'_{\pi} = 0 \quad \text{und} \quad q'_{2\pi} = 0,$$

und es wird

$$C = \frac{-A \cdot \alpha \sin 2\beta\pi}{\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}; \quad D = \frac{A\alpha\left(\cos 2\beta\pi - e^{2\alpha\pi}\right)}{\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}.$$

Mit Rücksicht auf diese Werte erhält man

$$q = \frac{-A}{t^2\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}[\alpha(\sin\beta\varphi\,\mathfrak{Cos}\,\alpha(2\pi-\varphi) + \mathfrak{Cos}\,\alpha\varphi\sin\beta(2\pi-\varphi))$$
$$+ \beta(\mathfrak{Sin}\,\alpha\varphi\cos\beta(2\pi-\varphi) + \cos\beta\varphi\,\mathfrak{Sin}\,\alpha(2\pi-\varphi))] + C',$$

wo C' noch zu bestimmen ist. Ferner ergibt sich aus

$$p = \frac{M_0 + Hr + Z_0 r^2}{EF}\varphi - \int q\,d\varphi - \frac{2D'\alpha\beta}{t^4}.$$

1) cfr. z. B. Love, treatise on the theory of elasticity II, arts. 219 f.

2) cfr. Grashof, Nr. 48.

wegen $p_1 = 0$:

$$D = A \frac{[illegible]}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}.$$

Die Bedingungen

$$p_\pi = 0 \quad \text{und} \quad p'_\pi = 0$$

liefern sowie in der Gleichung

$$(18) \qquad (M_1 - Hr - Z_1 r^2)\frac{[illegible]}{EW} - C' \cdot \pi - \frac{[illegible]}{r^2} = 0.$$

Zur Bestimmung der Konstanten M_1, H, C' und A bilde man wie beim vorigen Problem die Gleichung

$$(q + q'')EW = -Mr^2$$

für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \pi$. Berechnet man mit Hilfe der für q' und q gefundenen Ausdrücke die Größen q_0, q''_0, q_π und q''_π, so erhält man für $\varphi = 0$

$$(19) \qquad C' - \frac{2\alpha\beta}{r^2\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi} A(\beta\sin 2\beta\pi - \alpha\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi) = -\frac{M_1 r^2}{EW}$$

und für $\varphi = \pi$

$$(20) \qquad -(q_\pi + q''_\pi)\frac{EW}{r^2} = M_0 - 2Hr + 2Z_0 r^2 + ar^2\int_0^\pi q\sin\varphi\, d\varphi.$$

Da nun

$$\int_0^\pi q\sin\varphi\, d\varphi = q_\pi + q_0 + \int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$$

ist, so haben wir zunächst das Integral

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$$

zu berechnen. Wir verfahren so wie im vorigen Fall und erhalten mit Benutzung der Werte von C und D

$$\int_0^\pi q'\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{A}{\alpha\beta\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi}\left[\beta\sin\beta\pi\,\mathfrak{Cos}\,\alpha\pi + \alpha\cos\beta\pi\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\pi + \tfrac{1}{2}(\alpha\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha\pi + \beta\sin 2\beta\pi)\right].$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$4EW \cdot \alpha^2\beta^2 = ar^4$$

geht nun Gleichung (20) über in

$$(20a)\quad \begin{aligned} &M_0 + 2Hr + 2Z_0r^2 + C'\frac{2ar^4 + EW}{r^2} \\ &+ \frac{Aar^2}{2\alpha\beta t^2 \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}(\beta \sin 2\beta\pi - \alpha \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi) = 0. \end{aligned}$$

Aus (18) findet man

$$H = \left(A\frac{\lambda}{\pi} + C'\right)\frac{EF}{r} - \frac{M_0}{r} - Z_0 r,$$

wo zur Abkürzung

$$\lambda = \frac{2\alpha\beta}{t^4 \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}(\cos 2\beta\pi - \mathfrak{Cof}\, 2\alpha\pi)$$

gesetzt wurde. Trägt man H in (20a) ein und eliminiert M_0 aus (20a) und (19), so erhält man

$$C' = \frac{2\alpha\beta r^2 EFA(\mathfrak{Cof}\, 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi)}{(ar^4 + EW + r^2EF)\pi t^4 \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}.$$

Zur Bestimmung von A bilden wir wieder

$$-q_0''' \frac{EW}{r^3} = V$$

und finden

$$A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\pi}{\mathfrak{Cof}\, 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi}.$$

Man erhält schließlich für p und q Ausdrücke, die aus den entsprechenden Ausdrücken (17) dadurch hervorgehen, daß man 2π an die Stelle von π setzt.

§ 4. Diskussion der Resultate.

Um ein Bild von den Deformationen unserer Kreisringe zu gewinnen, und um den Einfluß der Zugstangen beurteilen zu können, wollen wir zunächst die Resultate des § 2 auf den Fall anwenden, daß keine Zugstangen vorhanden sind. In diesem Falle ist

$$Z_0 = 0; \quad a = 0; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1,$$

und man erhält nach Ausführung einiger einfacher Grenzübergänge für $0 < \varphi < \pi$

$$q = -\frac{2Vr^3}{EW}\left(\frac{\sin\varphi}{4} + \frac{\cos\varphi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{r^2F}{\pi(r^2F + W)}\right),$$

$$p = +\frac{2Vr^3}{EW}\left(\frac{\varphi}{\pi} - \frac{\sin\varphi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \frac{1 - \cos\varphi}{2}\right).$$

Für $\pi < \varphi < 2\pi$ ist in diesen Ausdrücken $\varphi - \pi$ an Stelle von φ zu setzen. Speziell wird[1])

1) Winkler, § 369.

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
q_0 &= -\frac{2Vr^3}{EW}\,\frac{(\pi^2-8)r^2F+\pi^2 W}{8\pi(r^2F+W)};\\
q_{\frac{\pi}{2}} &= -\frac{2Vr^3}{EW}\cdot\frac{(4-\pi)r^2F-\pi W}{4\pi(r^2F+W)}.
\end{aligned}
$$

Wir wollen an einem Zahlenbeispiel diese Größen, welche die größte Verlängerung und die größte Verkürzung eines Radius darstellen, vergleichen mit denjenigen, welche die Formeln des § 2 liefern. Wir wählen für den Ring ein solches Material, daß seine elastische Reaktion auf Zug und Druck durch denselben Elastizitätsmodul charakterisiert ist, etwa Stahl. Ferner müssen wir den Voraussetzungen der Rechnung gemäß den Radius des Rings sehr groß wählen gegen die Dimensionen des Querschnitts. Wir setzen dementsprechend

$$
r = 1000\text{ mm};\quad b = 1\text{ mm};\quad \varrho = 10\text{ mm};\quad F = 1;\quad W = \tfrac{1}{12};
$$
$$
E = 24\,000\text{ kgmm}^{-2};\quad E_1 = 20\,000\text{ kgmm}^{-2}.
$$

Was die Festsetzung der ursprünglichen Spannung der Zugstangen betrifft, so machen wir die Annahme, das Material des Rings sei so beschaffen, daß eher die Deformation der Zugstangen als die des Rings die Proportionalitätsgrenze[1]) überschreite; wir haben dann bei der Festsetzung der oberen Grenze dieser Spannung nur die Proportionalitätsgrenze der Zugstangen zu berücksichtigen. Wir nehmen sie zu 10 kgmm^{-2} an.[2]) Setzen wir

$$
E_1\frac{r-r_2}{r_2-\varrho} = 10,
$$

so wird $r - r_2 = 0{,}495$ mm, woraus sich als obere Grenze für a

$$
a = 0{,}20212126
$$

ergibt. Die untere Grenze für a ergibt sich aus $r = r_2$:

$$
a = \frac{mnE_1}{r-\varrho} = 0{,}20202020\ldots
$$

Wir wollen sehr nahe an beide Grenzwerte herangehen und noch für einen mittleren Wert die Deformation berechnen. Setzt man

$$
\begin{aligned}
a_{\min} &= 0{,}2020202021,\\
a &= 0{,}20207,\\
a_{\max} &= 0{,}20212125,
\end{aligned}
$$

so findet sich α und β annähernd gleich 71; infolgedessen sind die hyperbolischen Funktionen von $\alpha\pi$ nicht mehr von $\frac{1}{2}e^{\alpha\pi}$ zu unterscheiden;

1) Cfr. Bach, Elast. u. Festigk. § 2.

2) Bach, § 9 S. 31, Probestab IVc.

ihnen gegenüber dürfen endliche Größen als verschwindend klein angesehen werden. Dadurch vereinfacht sich die Rechnung bedeutend; es wird

$$q_0 = C' - \frac{A\beta}{t^2}; \quad q_{\frac{\pi}{2}} = C';$$

$$C' = \frac{4\alpha\beta r^2 EFA}{(ar^4 + EW + r^2 EF)\pi t^4}; \quad A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW}.$$

Die numerischen Werte der in der Rechnung auftretenden Größen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Urspr. Spannung	minimal	mittel	maximal
a	0,2020202021	0,20207	0,20212125
$r - r_2$	$4 \cdot 10^{-9}$	0,244	0,495
$Z_0 : mn$	$80{,}808081 \cdot 10^{-9}$	4,930508	10
α	70,8843	70,8895	70,8939
β	70,89139	70,8965	70,900957
$q_{\frac{\pi}{2}} : - q_0$	$9{,}5446 \cdot 10^{-4}$	$9{,}5418 \cdot 10^{-4}$	$9{,}5392 \cdot 10^{-4}$
$2V$	$22{,}8188 \cdot 10^{-9}$	1,39224	2,825

Die Längen sind in mm, die Kräfte in kg, die Drucke in kgmm^{-2} ausgedrückt. Die in der letzten Horizontalreihe angegebenen Gewichte $2V$ sind diejenigen, welche bei der jeweiligen ursprünglichen Spannung der Zugstangen genügen, um der Zugstange $\varphi = 0$ ihre ursprüngliche Länge r_2 wieder zu geben.

Fehlen dem Ring die Zugstangen, während alles übrige gleich bleibt, so ergibt sich aus (21)

$$q_{\frac{\pi}{2}} : - q_0 = 0{,}9183.$$

Dieses Verhältnis, beim Ring ohne Zugstangen nahezu gleich 1, wird also durch Anbringen der Zugstangen auf etwa $\frac{1}{1000}$ herabgedrückt.

Was die Größe der Gewichte betrifft, welche die Deformationen hervorrufen, so zeigt die folgende Tabelle, daß dieselbe Verkürzung q_0 bei den Ringen mit Zugstangen ca. $2 \cdot 10^5$mal größere Gewichte erfordert, als bei dem Ring ohne Zugstangen, und daß andererseits dasselbe Gewicht bei dem Ring ohne Zugstangen eine $2 \cdot 10^5$mal größere Verkürzung q_0 hervorbringt, als bei den Ringen mit Zugstangen.

	Ring ohne Zugst.	Ring mit Zugst.		urspr. Spannung
q_0	$0{,}849 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$2V = 22{,}8 \cdot 10^{-9}$	minimal
$2V$	$6{,}56 \cdot 10^{-6}$	1,392	$q_0 = 0{,}244$	mittel
$2V$	$13{,}31 \cdot 10^{-6}$	2,825	$q_0 = 0{,}495$	maximal

Auch bei der in § 3 behandelten Belastungsweise des Rings wird

$$q_0 = C' - \frac{A\beta}{t^2}; \quad q_\pi = C'; \quad A = \frac{Vr^3}{2\alpha\beta EW};$$

dagegen wird in diesem Fall

$$C' = \frac{2\alpha\beta r^2 EFA}{(ar^4 + EW + r^2 EF)\pi t^4}.$$

Die größte Verlängerung einer Zugstange (q_π) ist also nur halb so groß, wie im Fall des § 2 $\left(q_{\frac{\pi}{2}}\right)$, während die Verkürzung ($-q_0$) fast genau denselben Wert behält. Sie wird nur sehr wenig größer, als bei der früheren Belastungsweise. Infolgedessen werden die Gewichte $2V$, die der Zugstange $\varphi = 0$ ihre ursprüngliche Länge wieder geben, jetzt etwas kleiner sein, als früher. Sie erhalten die Werte

$$22{,}8075 \cdot 10^{-9}\ \text{kg}; \quad 1{,}3915\ \text{kg}; \quad 2{,}8236\ \text{kg}.$$

Obgleich wir die Diskussion unserer Resultate nur an einem Zahlenbeispiel durchgeführt haben, wird sich doch folgendes allgemein sagen lassen.

Die Tragfähigkeit eines Rades wird durch Anbringen von Zugstangen erheblich gesteigert, und ist, wenn der Druck im obersten Punkt der Peripherie wirkt, etwas größer, als wenn er an der Nabe angebracht wird; die Tragfähigkeit ist der ursprünglichen Spannung der Zugstangen nahezu proportional, wächst jedoch ein wenig rascher als diese. Die Deformation erfolgt, je stärker die Zugstangen angespannt werden, um so mehr in der Weise, daß sich der Durchmesser, der in die Druckrichtung fällt, verkürzt, ohne daß der Ring seitlich merklich ausweicht.

Nachtrag. Längere Zeit nach Beendigung des Manuskripts wurde ich auf einen Aufsatz von Herrn Linsemann aufmerksam gemacht über „Die elastische Linie von Drehstrommaschinen mit großen Durchmessern".[1]) Da auch bei diesem Problem die stetig über die Ring-

1) Elektrotechn. Zeitschrift. XXIII. Jahrg. 1902, S. 81 ff.

fläche verteilten magnetischen Zugkräfte lineare Funktionen der radialen Deformation q[1]) sind, die aber, zum Unterschied von den Kräften in den Zugstangen mit wachsendem q *abnehmen*, so werden die Differentialgleichungen für q bei beiden Problemen einander ähnlich. Doch gestalten sich, bei der gänzlichen Verschiedenheit der Aufgabe sowie bei den verschiedenen Integrationsbedingungen und wegen der von Herrn Linsemann gemachten Annahme, daß die Peripherie des Rings ihre ursprüngliche Länge behalte, die endlichen Ausdrücke für q durchaus verschieden.

Die vorteilhafteste Pfeilhöhe eines gleichmäßig belasteten symmetrischen Dreigelenkbogens mit kreisförmiger Mittellinie.

Von Dipl. Ing. B. J. W. Reuser in Goes (Niederlande).

In der folgenden Untersuchung sind:

l = die Spannweite des Bogens (horizontale Entfernung der Kämpfergelenke),
f = die Pfeilhöhe des Bogens (Höhe des Scheitelgelenks über den Kämpfergelenken),
R = der Halbmesser der kreisförmigen Bogenmittellinie,
J = das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes,
W = das Widerstandsmoment „ „
F = der Inhalt „ „
$\mathfrak{k} = \frac{W}{F}$ = der Kernstrahl „ „
N_x = die Längskraft für den Querschnitt X, positiv wenn Zugkraft,
M_x = das Moment „ „ „ „, „ „ rechtsdrehend.

Sonstige Benennungen sind aus der Figur 2 zu entnehmen.

Die erste Aufgabe ist, den Querschnitt zu finden, in welchem die Maximalspannung auftreten wird. Suchen wir dazu N_x und M_x für einen beliebigen Querschnitt X der rechten Bogenhälfte (vgl. Fig. 2):

$$N_x = -H\cos\delta - \int_0^\delta p\,da\sin\delta$$

$$M_x = H\cdot h - \int_0^\delta p\,da\,\lambda$$

---

1) Die radiale Deformation bezeichnet Herr Linsemann mit p, die zu q senkrechte Verschiebung p berechnet er nicht.

Fig. 1.

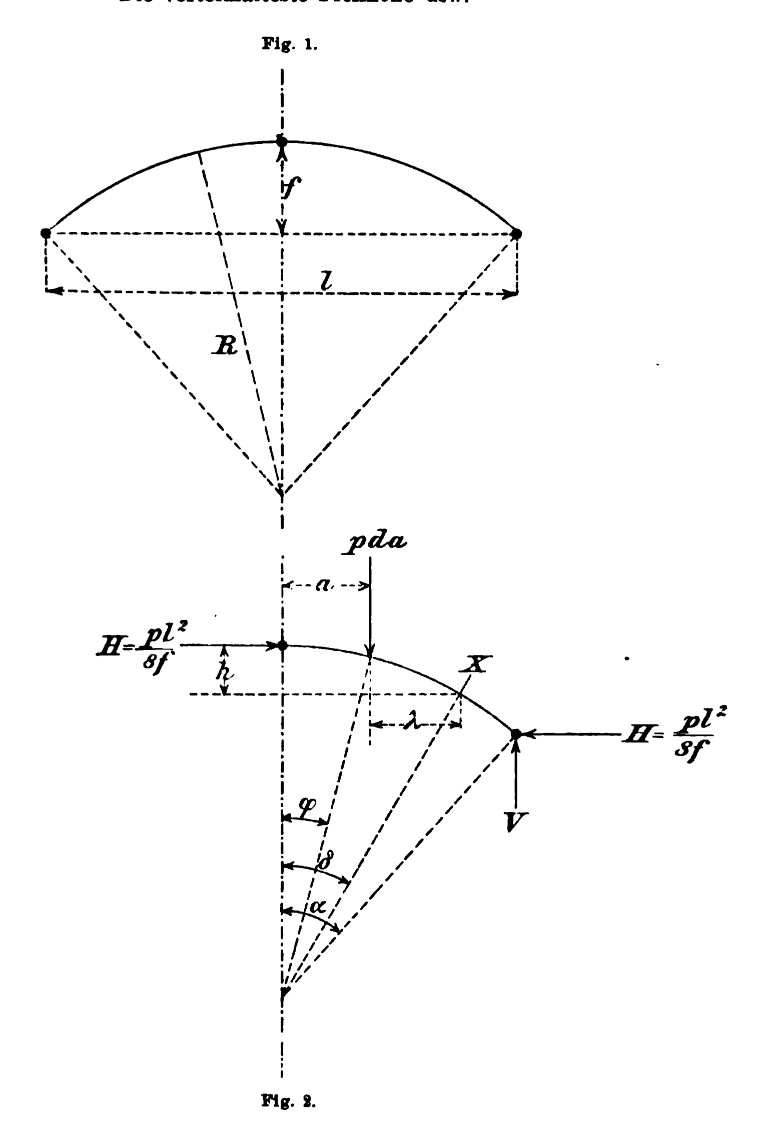


Fig. 2.

In diese Formeln ist einzusetzen:

$H = \frac{pl^2}{8f}$ (aus den Gleichgewichtsbedingungen folgend)

$a = R \sin \varphi$, und folglich $da = R \cos \varphi \, d\varphi$

$h = R(1 - \cos \delta)$

$\lambda = R(\sin \delta - \sin \varphi)$

Dann ergibt sich:

$$N_x = -\frac{pl^2}{8f}\cos\delta - \int_0^\delta pR\cos\varphi\sin\delta\,d\varphi$$

$$M_x = \frac{pl^2}{8f}R(1-\cos\delta) - \int_0^\delta pR^2\cos\varphi(\sin\delta-\sin\varphi)\,d\varphi\,.$$

Die Ausführung der Integration ergibt folgende Gleichungen:

(1)
$$N_x = -\frac{pl^2}{8f}\cos\delta - pR\sin^2\delta$$

$$M_x = \frac{pl^2}{8f}R(1-\cos\delta) - \tfrac{1}{2}pR^2\sin^2\delta\,.$$

Es wird zwar auch eine Querkraft Q auftreten; jedoch wollen wir die durch diese hervorgerufenen Schubspannungen vernachlässigen. Die Normalspannungen σ, welche durch N_x und M_x erzeugt werden, sind annähernd dieselben wie bei geraden Stäben, vorausgesetzt daß: 1^0 die Höhe des Querschnittes gering ist im Verhältnis zum Bogenhalbmesser; 2^0 daß der Stab symmetrisch ist in bezug auf die durch seine Mittellinie gelegte Ebene (vgl. z. B. Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen). Die größten Spannungen σ im betrachteten Querschnitte gehen aus der Formel:

$$\sigma = \frac{N_x}{F} \pm \frac{M_x}{W}$$

hervor, in welche die oben unter (1) und (2) gefundenen Werte eingesetzt werden müssen. N_x ist immer negativ. Es soll gezeigt werden, daß auch M_x negativ ist für *jeden* beliebigen Wert der veränderlichen Größe δ. Es ist

$$M_x \gtrless 0\,,\ \text{wenn}\ \frac{l^2}{8f}(1-\cos\delta) \gtrless \tfrac{1}{2}R\sin^2\delta\,.$$

(Der in bezug auf δ konstante Faktor pR ist fortgelassen);

$$M_x \gtrless 0\,,\ \text{wenn}\ \frac{l^2}{8f} - \frac{l^2}{8f}\cos\delta \gtrless \tfrac{1}{2}R - \tfrac{1}{2}R\cos^2\delta\,,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}R\cos^2\delta - \frac{l^2}{8f}\cos\delta \gtrless \tfrac{1}{2}R - \frac{l^2}{8f}\,,$$

$$\cos^2\delta - \frac{l^2}{4fR}\cos\delta \gtrless 1 - \frac{l^2}{4fR}\,,$$

oder (zu beiden Gliedern $\left(\frac{l^2}{8fR}\right)^2$ addiert)

$$\left(\cos\delta - \frac{l^2}{8fR}\right)^2 \gtrless \left(1 - \frac{l^2}{8fR}\right)^2.$$

Denkt man sich einen Augenblick diese Ungleichheit in der Form dargestellt: $p^2 \gtrless q^2$, dann kann man auch schreiben:

$$(p+q)(p-q) \gtrless 0;$$

das gibt:

$$M_x \gtrless 0; \text{ wenn } \left(\cos\delta + 1 - \frac{l^2}{4fR}\right)(\cos\delta - 1) \gtrless 0.$$

Die Bedingungen, unter welchen $M_x = 0$, lassen sich hieraus unmittelbar finden:

$M_x = 0$:

$$1^0 \text{ für } \cos\delta = -1 + \frac{l^2}{4fR} = -1 + \left(2 - \frac{f}{R}\right)^{1)} = \frac{R-f}{R}$$

oder $\delta = \alpha$ (Kämpfergelenk),

2^0 „ $\cos\delta = 1$ oder $\delta = 0$ (Scheitelgelenk).

(Diese beiden Ergebnisse hätte man sofort hinschreiben können: es ist selbstverständlich, daß bei Vernachlässigung der Reibung in den Gelenken keine Momente auftreten).

Für *jeden Wert von* $\cos\delta$ *zwischen* $\frac{R-f}{R}$ *und 1* ist folglich der erste Faktor positiv, und der zweite negativ; somit der ganze Ausdruck negativ.

Wir haben also festgestellt: M_x *ist negativ für jeden Querschnitt*. Ein negatives Moment ruft in der oberen Hälfte eines (horizontal) symmetrischen Querschnittes positive, in der unteren negative Spannungen hervor. Weil auch N_x negative Spannungen erzeugt, sind die maximalen Spannungen in einem Querschnitt Druckspannungen und lassen sich in absolutem Wert darstellen durch:

$$\sigma_{max} = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{W}.$$

In diesem Ausdruck sind die *absoluten* Werte der negativen Größen N_x und M_x einzusetzen, was ergibt:

$$(3) \qquad s = \sigma_{max} = \frac{\frac{pl^2}{8f}\cos\delta + pR\sin^2\delta}{F} + \frac{\frac{1}{2}pR^2\sin^2\delta - \frac{pl^2R}{8f}(1-\cos\delta)}{W}.$$

---

1) Weil die Bogenlinie kreisförmig ist, und die Bogensehne senkrecht zu dem vertikalen Durchmesser, ist $\frac{l}{2}$ das geometrische Mittel aus f und $2R-f$, $\frac{l^2}{4} = f(2R-f)$, folglich:

$$\frac{l^2}{4fR} = 2 - \frac{f}{R}.$$

Wir kennen jetzt den Wert der maximalen Spannung für einen bestimmten Querschnitt, ausgedrückt durch ein bestimmtes δ. Wir wollen jetzt untersuchen, für welchen Wert der veränderlichen Größe δ diese Spannung (gleich der zulässigen Druckspannung f'') ein Maximum wird. Führen wir die Größe ξ[1]) ein $\left(=\frac{W}{F}\right)$; dann können wir schreiben:

$$\text{(4)} \quad \frac{F}{p}s = f(\delta) = \frac{l^2}{8f}\cos\delta + R\sin^2\delta + \frac{1}{\xi}\left\{\frac{1}{2}R^2\sin^2\delta - \frac{l^2R}{8f}(1-\cos\delta)\right\}$$

$$\text{(5)} \quad f'(\delta) = -\frac{l^2}{8f}\sin\delta + 2R\sin\delta\cos\delta + \frac{1}{\xi}\left(R^2\sin\delta\cos\delta - \frac{l^2R}{8f}\sin\delta\right)$$

$$\text{(6)} \quad f''(\delta) = -\frac{l^2}{8f}\cos\delta + 2R\cos 2\delta + \frac{1}{\xi}\left(R^2\cos 2\delta - \frac{l^2R}{8f}\cos\delta\right).$$

Wird $f(\delta)$ ein Maximum, dann muß $f'(\delta)=0$ und zugleich $f''(\delta)$ negativ sein. Es wird

$$f'(\delta) = 0,$$

1°. wenn $\sin\delta = 0$ oder $\delta = 0$ (Scheitelgelenk).

Dann sind $\cos\delta$ und $\cos 2\delta = 1$ und wird $f''(\delta) = -\frac{l^2}{8f} + 2R + \frac{1}{\xi}\left(R^2 - \frac{l^2R}{8f}\right)$. Und weil $\frac{l^2}{8f} = R - \frac{f}{2}$, läßt sich der Ausdruck umändern in:

$$f''(\delta) = R + \frac{f}{2} + \frac{Rf}{2\xi}.$$

Weil dieser Ausdruck positiv, entspricht der Wert $\sin\delta = 0$ nicht einem Maximum, sondern einem Minimum.

2°. $$\text{wenn } -\frac{l^2}{8f} + 2R\cos\delta + \frac{R}{\xi}\left(R\cos\delta - \frac{l^2}{8f}\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung finden wir:

$$\text{(7)} \quad \cos\delta = \frac{l^2(\xi+R)}{8fR(2\xi+R)}.$$

Berechnet man hieraus den Wert für $\cos 2\delta\ (=2\cos^2\delta - 1)$, und setzt man die Größe in Gleichung 6 ein, dann ergibt sich nach kleiner Umrechnung:

$$f''(\delta) = \frac{R}{\xi(2\xi+R)}\left\{\left(1-\frac{f}{2R}\right)^2(2\xi^2+2\xi R+R^2) - (4\xi^2+4\xi R+R^2)\right\}.$$

1) Die Werte von ξ sind mit sehr großer Annäherung den nachstehenden Formeln zu entnehmen: (vgl. auch S. 406, Z. 1 v. u.)

$\xi = 0{,}30\ h + 0{,}01$ cm, für [-Eisen D. N. P. No. 8—30 } h = Profilhöhe in cm.
$\xi = 0{,}307\,h + 0{,}15$ cm, „ I-Eisen D. N. P. No. 8—40 }

Führt man ein: $1 - \frac{f}{2R} = \frac{l^2}{8fR} = \varkappa^2$, welche Größe < 1 und positiv ist; dann läßt sich der Ausdruck für $f''(\delta)$ umgestalten in:

$$f''(\delta) = -\frac{R}{\xi(2\xi + R)}\{2\xi^2(2-\varkappa^2) + 2\xi R(2-\varkappa^2) + R^2(1-\varkappa^2)\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist positiv, folglich ist $f''(\delta)$ *negativ und* $f(\delta)$ *ein Maximum.* Die Größe des Maximalwertes für $f(\delta)$ ermitteln wir jetzt, indem wir den Wert für $\cos\delta$ aus Formel (7) in die Gleichung (4) einsetzen. Bequemer ist es, diese etwas umzuändern ($\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta$):

$$\frac{F}{p}s = f(\delta) = \cos\delta\left(\frac{l^2}{8f} + \frac{l^2R}{8f\xi}\right) - \cos^2\delta\left(R + \frac{R^2}{2\xi}\right) + \left(R + \frac{R^2}{2\xi} - \frac{l^2R}{8f\xi}\right).$$

Führen wir die Substitution aus, und bedenken wir, daß die Beziehung $\frac{l^2}{8f} = R - \frac{f}{2}$ besteht, dann kommen wir zu der verhältnismäßig einfachen Formel:

$$\frac{F}{p}s_{max} = \{f(\delta)\}_{max} = \frac{(\xi + R)^2 f^2 - 4R\xi^2 f + 4R^2\xi(2R + 5\xi)}{8R\xi(2\xi + R)}. \tag{8}$$

Die Formel wird bedeutend vereinfacht, wenn man ξ gegen R, 5ξ gegen $2R$ und 2ξ gegen R vernachlässigt, was mit Rücksicht auf die Verhältnisse dieser Größen zulässig ist. Es ergibt sich dann:

$$\frac{F}{p}s_{max} = \frac{Rf^2 - 4\xi^2 f + 8R^2\xi}{8R\xi}.$$

Wird im Zähler das Glied $4\xi^2 f$ gestrichen, dann bekommt man:

$$\frac{F}{p}s_{max} = \frac{f^2}{8\xi} + R,$$

und weil $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$, so wird die Formel schließlich:

$$\frac{F}{p}s_{max} = \frac{f^2}{8\xi} + \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}. \tag{8a}$$

Aus dieser Formel wäre F zu bestimmen, wenn sich zwischen F und ξ eine Beziehung aufstellen ließe. Das ist aber unmöglich, weil Trägheitsmoment, Widerstandsmoment und damit $\xi = \frac{W}{F}$ von der Form des Querschnittes und folglich von der Einsicht des Konstrukteurs abhängen, und diese läßt sich nicht in funktionelles Gewand kleiden. Wir können uns aber helfen, wenn wir bedenken, daß in der Praxis *die Höhe des Querschnittes gewählt wird.* Bei den Trägerquerschnitten üblicher Form sind nach Müller-Breslau ξ und h_0, Kernstrahl und Höhe des Stehbleches, proportional, und zwar: $\xi \sim \frac{5}{12}h_0$.[1])

1) Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. I. S. 207.

Wir sind also imstande, F aus der Formel (8a) zu bestimmen als Funktion bekannter Größen und der Pfeilhöhe f:

$$F = \frac{p}{s_{max}}\left(\frac{f^2}{8\xi} + \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}\right). \tag{8b}$$

Setzen wir jetzt voraus, daß F *für die ganze Bogenlänge konstant sei,* dann ist die erforderliche Materialmenge:

$$\mathfrak{M} = \text{Bogenquerschnitt} \times \text{totale Bogenlänge}.$$

Die Bogenlänge ist $\frac{\pi R \alpha^0}{90^0}$. Hierin sind einzusetzen:

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \quad \text{und} \quad \alpha^0 = \text{Winkel} \sin\left(\frac{l}{2R}\right)$$

$$= \text{Winkel} \sin\left(\frac{l}{f + \frac{l^2}{4f}}\right)$$

$$= \text{Winkel} \sin\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right)$$

$$= \frac{180^0}{\pi} \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right).$$

Mithin ist die Bogenlänge:

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}\right) \times 2 \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right) \\ &= \left(f + \frac{l^2}{4f}\right) \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

In $\mathfrak{M} = F \times L$, die Werte aus (8b) und (9) einsetzend, bekommen wir:

$$\mathfrak{M} = \frac{p}{s_{max}}\left(\frac{f^2}{8\xi} + \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}\right)\left(f + \frac{l^2}{4f}\right) \operatorname{Arx} \sin\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right). \tag{10}$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch etwas umändern und vereinfachen. Die Multiplikation der beiden zwischen () stehenden Faktoren wird ausgeführt, und dürfen wir dabei die entstehenden Glieder mit $\frac{f^3}{8\xi}$ und $\frac{f^2}{2}$ streichen:

$$\mathfrak{M} = \frac{p}{s_{max}}\left(\frac{fl^2}{32\xi} + \frac{l^2}{4} + \frac{l^4}{32f^2}\right) \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{4fl}{4f^2 + l^2}\right)$$

$$= \frac{pl^2}{s_{max}}\left(\frac{f}{32\xi} + \frac{1}{4} + \frac{l^2}{32f^2}\right) \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{4\frac{f}{l}}{4\frac{f^2}{l^2} + 1}\right).$$

Führen wir jetzt ein: $\lambda = \frac{l}{\xi}$ (bekannte Größe) und $\eta = \frac{f}{l}$, dann wird unsere Formel:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{pl^2}{s_{max}}\left(\frac{\eta\lambda}{32} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32\eta^2}\right) \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right) \\ &= \frac{pl^2}{32 s_{max}}\left(\eta\lambda + 8 + \frac{1}{\eta^2}\right) \operatorname{Arc} \sin\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right). \end{aligned} \tag{10a}$$

$\mathfrak{M}$ läßt sich also in der Form schreiben:

$$\mathfrak{M} = \text{Konstante} \times f(\eta),$$

und hierin ist dann:

$$f(\eta) = \left(\eta\lambda + 8 + \frac{1}{\eta^2}\right) \text{Arc sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right). \tag{11}$$

Ist $\mathfrak{M}$ ein Minimum, dann ist auch $f(\eta)$ Minimum, und es muß $f'(\eta) = 0$ sein. Dabei braucht $f''(\eta)$ nicht untersucht zu werden, weil ein Maximum natürlich ausgeschlossen ist.

$$f'(\eta) = \left(\eta\lambda + 8 + \frac{1}{\eta^2}\right)\frac{4}{4\eta^2 + 1} + \left(\lambda - \frac{2}{\eta^3}\right) \text{Arc sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right) = 0. \tag{12}$$

Aus dieser Gleichung ist η zu bestimmen. Zu diesem Zweck habe ich sie umgeformt zu:

$$\text{Arc sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2 + 1}\right) = \frac{4\eta(\eta^3\lambda + 1 + 8\eta^2)}{2 - \eta^3\lambda + 8\eta^2}. \tag{13}$$ [1]

Nach Wahl eines bestimmten λ können für verschiedene Werte von η das erste und das zweite Glied der Gleichung berechnet werden. Stellt man diese Resultate in Tabellenform zusammen, dann läßt sich durch Interpolation bestimmen, welcher Wert für η der Gleichung genügt. Es hat natürlich keinen Zweck, den Lesern dieser Zeitschrift alle von mir berechneten Zahlen vor Augen zu führen. Ich will nur einen kurzen Auszug geben, und zwar für 3 verschiedene Werte von λ, nämlich $\lambda = 50$, 100 und 200.

		$\eta =$ 0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22
$\text{Arc sin}\left(\frac{4\eta}{4\eta^2+1}\right)$		0,471	0,546	0,618	0,692	0,762	0,830
$\frac{4\eta(\eta^3\lambda + 8 + 8\eta^2)}{2 - \eta^3\lambda + 8\eta^2}$ für $\lambda =$	50	—	—	—	—	0,717	0,918
	100	—	—	0,576	0,788	—	—
	290	0,392	0,588	—	—	—	—
Differenzen des ersten u. zweiten Gleichungsgliedes für $\lambda =$	50	—	—	—	—	+ 0,045	— 0,088
	100	—	—	+ 0,042	— 0,096	—	—
	200	+ 0,079	— 0,042	—	—	—	—

Die gesuchten Werte für η, bei denen $f'(\eta) = 0$ wird, ergeben sich durch Interpolation und betragen:

$\eta =$		$\lambda =$
0,208	wenn:	50
0,170 $\sim \frac{1}{6}$		100
0,134		200

1) Im Nenner ist das vernachlässigbare Glied $-4\eta^5\lambda$ gestrichen.

In dem folgenden Auszug sind einige Werte für $f(\eta)$ zusammengestellt, berechnet aus Formel (11). Die Zahlen müssen noch mit $\frac{pl^2}{32 s_{max}}$ multipliziert werden, um nach Formel (10a) die Werte für $\mathfrak{M}$ zu liefern, sie sind aber proportional damit.

	$\eta =$	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24
$f(\eta)$ für $\lambda =$	50	44,6	39,3	36,1	34,1	33,2	**32,8**	32,9	33,5
	100	46,5	42,2	39,8	**39,1**	**39,8**	40,3	—	—
	200	50,1	**47,7**	**47,5**	49,0	51,8	55,6	—	—

Zwei wichtige Folgerungen lassen sich hieraus ziehen:

1° bei abnehmenden Werten von λ, oder $\left(\text{weil } \lambda = \frac{l}{\xi}\right)$ bei *zunehmenden Werten von* ξ, wächst das Verhältnis $\eta = \frac{f}{l}$, bei dem der Materialverbrauch ein Minimum wird, und *kann also der Pfeil größer werden.*

2° Trotzdem der Pfeil und damit die Länge des Bogens größer werden, wird *der Materialverbrauch kleiner.* (Vgl. die fettgedruckten Zahlen für $f(\eta)$).

Die von Konstrukteuren befolgte Wahl einer möglichst großen Querschnittshöhe ist hiermit als eine durchaus richtige erwiesen (vgl. S. 406).

Schlüsse. Der Wert von $\eta = \frac{f}{l}$, für den der Materialverbrauch ein Minimum wird, ist zwar für jeden Fall ein anderer, weil abhängig von $\lambda = \frac{l}{\xi}$; jedoch läßt sich bemerken, daß, wie es sich aus den von mir angegebenen Zahlen zeigt, der Wert von $f(\eta)$ sich in der Nähe des Minimums praktisch nur sehr wenig ändert und man schließen darf:

Bei einem gleichmäßig belasteten symmetrischen Dreigelenkbogen mit kreisförmiger Mittellinie und konstantem Querschnitt ist die günstigste Pfeilhöhe $f \sim \frac{1}{6}$ von der Spannweite l.

In einem folgenden Aufsatz werde ich untersuchen, wie es sich bei demselben Bogenträger verhält im Falle einer *mobilen* gleichmäßigen Belastung, welche weit ungünstigere Spannungen erzeugt.

Goes, Juli 1905.

Über eine Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie auf Größen, welche sich nicht rein zufällig ändern.

Von G. Holtsmark in Aas (Norwegen).

Bei den Feldversuchen mit Ackergewächsen, Düngung usw. wird gewöhnlich ein größeres Feld in kleinere Parzellen geteilt; diese werden mit den verschiedenen Versuchsgegenständen beschickt, und schließlich werden die Ernten der einzelnen Parzellen miteinander verglichen. Mehrere Versuchsfehler werden sich dabei geltend machen. Erstens werden die Parzellen nicht vollständig gleichmäßig besät, zweitens werden bei der Ernte beim Einsammeln und Wägen des Ertrages Fehler unterlaufen, drittens ist die Ausmessung der Parzellen mit Fehlern behaftet, und endlich sind die Böden und überhaupt die natürlichen Wachstumsbedingungen auf den einzelnen Parzellen etwas verschieden. Erfahrungsgemäß sind die Fehler, welche die letzterwähnte Ursache haben, die bedeutendsten. Andererseits macht sich hier die Nachbarschaft der Parzellen in der Art geltend, daß zwei Parzellen, die unmittelbar aneinander grenzen oder sich in relativ kleinem Abstand voneinander befinden, sich weniger in den Wachstumsbedingungen unterscheiden, als zwei solche, die relativ weit voneinander entfernt sind.

Will man zwei Versuchsgegenstände so vergleichen, daß man sie auf je einer Parzelle prüft, so darf man natürlich diese Parzellen unmittelbar nebeneinander wählen, damit die Bodenverschiedenheiten möglichst wenig einwirken. Gewöhnlich wird man aber, um einen sichereren Vergleich zu erlangen, die zwei Versuchsgegenstände nicht auf je einer, sondern auf mehreren Parzellen prüfen und somit durch Wiederholung den Fehler vermindern; außerdem wird man in Praxi gewöhnlich eine größere Anzahl von Gegenständen gleichzeitig auf einem größeren Felde miteinander vergleichen. Je größer das Feld nun wird, um so mehr werden die einzelnen Parzellen durchschnittlich voneinander entfernt. Und will man dann mit Hilfe der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie ein Maß für die Genauigkeit der Versuchsresultate ermitteln, so tritt die Schwierigkeit auf, daß die Abweichungen der einzelnen Parzellen von dem Mittelwerte nicht rein zufällig, sondern zu einem gewissen Grade von der geometrischen Verteilung der Parzellen abhängig sind, wodurch die direkte Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie unzulässig wird. Diese setzt nämlich voraus, daß die Verteilung der Elemente, deren Abweichung von einem soge-

nannten wahren Werte in Rechnung gezogen wird, eine rein zufällige ist, dann wird man denselben mittleren Fehler finden, ob dieser aus einer kleineren oder einer größeren Anzahl von einzelnen Elementen berechnet wird. Dagegen wird in dem von uns betrachteten Falle der berechnete mittlere Fehler um so kleiner ausfallen, je kleiner das Versuchsfeld und damit die Anzahl der Parzellen ist. Wie der mittlere Fehler mit der Ausdehnung des Feldes wächst, werde ich in dieser Arbeit untersuchen. Außerdem werde ich theoretisch eine Methode begründen, durch welche man bei Versuchen auch auf größeren Feldern angenähert dieselbe Genauigkeit zu erreichen vermag, wie auf kleineren. Diese Methode ist schon längst von meinem Kollegen Herrn Bastian R. Larsen, dem Leiter der norwegischen staatlichen Versuche mit Ackergewächsen, ersonnen und von ihm seit mehreren Jahren bei den Feldversuchen mit Erfolg benützt worden. Obwohl die Untersuchung aus einem speziellen Bedürfnis der Praxis entsprungen ist, glaube ich doch, daß die Resultate auch ein allgemeines Interesse besitzen, weshalb ich die mehr theoretischen Ausführungen hier mitteilen möchte. Die spezielle Anwendung gehört in die Versuchspraxis, und wird anderswo mitgeteilt werden.[1])

I. Der Einfluß der Größe des Versuchsfeldes auf den mittleren Fehler.

Es sei ein rechteckiges Feld in eine Anzahl gleich großer quadratischer Parzellen geteilt. Die Seitenlänge des Quadrates sei $= 1$, die Seiten des rechteckigen Feldes seien n_1 und n_2. Das Rechteck enthält dann $n_1 n_2 = n$ quadratische Parzellen. Jede Parzelle stelle eine gewisse Größe dar, z. B. den Ertrag eines Gewächses. Die Größen, welche die einzelnen Parzellen darstellen, seien $a, b, c \ldots\ldots k$. Das arithmetische Mittel $\frac{(a+b+c+\ldots\ldots+k)}{n}$, nennen wir den „wahren“ Wert. Weiter bezeichnen wir mit „wahrem Fehler“ die Größen:

$$\Delta_1 = \left(\frac{a+b+\ldots+k}{n} - a\right),$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{a+b+\ldots+k}{n} - b\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_n = \left(\frac{a+b+\ldots+k}{n} - k\right).$$

1) Tidsskrift for Landbrugets Planteavl, redigeret af E. Rostrup, Bd. 12, Kjöbenhavn, 1905, S. 330—351.

Denken wir uns vorläufig die Verteilung der Elemente rein zufällig, so ist nach der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie der sogenannte mittlere Fehler (die mittlere Abweichung):

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}.^{1)}$$

Wir werden uns vorstellen, wie diese Größe m aus den einzelnen Größen $a, b \ldots k$ aufgebaut ist.

Nehmen wir zunächst an, es seien nur zwei Größen a und b, $n = 2$. Wir haben dann:

$$\Delta_1 = \left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{a+b}{2} - b\right) = \left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{2} = \frac{1}{2^2}(a-b)^2$$

Seien jetzt $n = 3$ Größen a, b, c vorhanden, dann wird

$$\Delta_1 = \left(\frac{a+b+c}{3} - a\right) = \frac{(b-a)+(c-a)}{3}$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{a+b+c}{3} - b\right) = \frac{(a-b)+(c-b)}{3}$$

$$\Delta_3 = \left(\frac{a+b+c}{3} - c\right) = \frac{(a-c)+(b-c)}{3}$$

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2}{3} = \frac{1}{3^2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2].$$

---

1) Gewöhnlich werden das arithmetische Mittel als der *wahrscheinlichste* Wert, die Abweichungen Δ_1, Δ_2 .... vom arithmetischen Mittel als *scheinbare* Fehler angesehen, und *der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtungen* aus einer Anzahl von n solchen nach der Formel $m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-1}}$ berechnet. Wenn hier der mittlere Fehler nach der Formel $m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$ berechnet wird, indem die Abweichungen vom arithmetischen Mittel als wahre Fehler betrachtet werden, so hat das den folgenden Grund: Bei einem Versuche werden die Parzellen mit einer Anzahl verschiedener Versuchsgegenstände beschickt. Nun sind die natürlichen Vegetationsbedingungen auf den Parzellen verschieden, und die Unterschiede in den Ernten rühren nicht nur von der verschiedenen Ertragfähigkeit der einzelnen Versuchsgegenstände, sondern auch von diesen Verschiedenheiten in den Vegetationsbedingungen her. Die letzteren geben zu den „Fehlern" Veranlassung. Um alles gleich zu halten, müßte man sämtliche Versuchsgegenstände gleichzeitig über das ganze Feld prüfen, was selbstverständlich unmöglich ist. Statt dessen werden die einzelnen Gegenstände je auf einzelnen Parzellen geprüft. Man kann sich nun denken, daß man aus der Ernte einer einzigen Parzelle schließt, welche

Mit den Größen a, b, c, d, also $n = 4$, wird

$$m^2 = \frac{1}{4^2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2]$$

usw.

Und mit n Größen:

$$m^2 = \frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{1}{n^2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + \cdots\cdots \quad \cdots]. \tag{1}$$

Die Anzahl der Summanden zwischen den Klammern ist offenbar

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Bezeichnen wir mit $\pm \mu'$ die mittlere Differenz zwischen zwei beliebigen Größen $a, b, \ldots \; k$, d. h.

$$\mu' = \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + \cdots\cdots}{\frac{n(n-1)}{2}}},$$

so wird:

$$m^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \mu'^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n} \mu'^2.$$

Wenn n eine große Zahl ist, wird somit

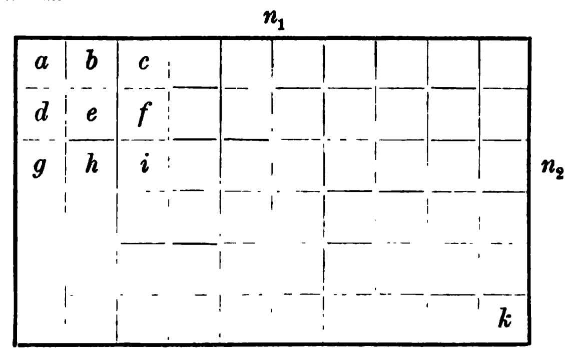
$$\mu'^2 = 2m^2,$$

was mit der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie übereinstimmt.

Kehren wir nun zu dem anfangs betrachteten Rechteck zurück. Wenn wir die Formel (1) auf die Größen, welche die quadratischen Parzellen repräsentieren, anwenden, so wird $n = n_1 n_2$. Nehmen wir nun an, daß die mittlere Differenz zwischen zwei Größen eine Funktion des Abstandes der quadratischen Parzellen, zu welchen die Größen gehören, ist, so lassen sich die Differenzenquadrate in (1) nach den Abständen der zugehörigen Parzellen klassifizieren. Die Seite jedes Quadrates haben wir gleich eins gesetzt. Rechnen wir als Abstand zweier beliebiger Quadrate den Abstand ihrer Mittelpunkte, so sehen

Ernte man auf dem ganzen Felde erhalten haben würde, falls das ganze Feld mit dem betreffenden Gegenstande beschickt gewesen wäre. Das kann man nur *mit Annäherung* schließen. Um diese Annäherung kennen zu lernen, muß man einmal das ganze Feld *gleichartig* beschicken. Die Ernte des ganzen Feldes, oder vielmehr $\frac{1}{n}$ desselben ist dann ein „wahrer" Wert. Die Ernte einer Parzelle ist ein „beobachteter" Wert. Und die Differenz zwischen beiden ist ein „wahrer" Fehler.

wir leicht bei Betrachtung einer Figur, mit welchen Abständen wir zu rechnen haben.



Abstand 1 z. B. zwischen a und b
„ $\sqrt{2}$ „ „ a „ e
„ 2 „ „ a „ c
„ $\sqrt{5}$ „ „ a „ f
„ $\sqrt{8}$ „ „ a „ i
usw.

Eine einfache Aufzählung ergibt die Anzahl der Differenzen von den verschiedenen Ordnungen.

Für den Abstand = 1, Anzahl der Differenzen $(n_1-1)n_2+(n_2-1)n_1=A$
$\sqrt{2}$ $2(n_1-1)(n_2-1) \quad =B$
2 $(n_2-2)n_1+(n_1-2)n_2=C$
$\sqrt{5}$ $2[(n_1-2)(n_2-1)+(n_2-2)(n_1-1)]=D$
$\sqrt{8}$ $2(n_1-2)(n_2-2) \quad =E$
usw.

Bezeichnen wir mit $\pm\mu$ die mittlere Differenz für den Abstand = 1, mit $\pm p\mu$ für $\sqrt{2}$, mit $\pm q\mu$ für 2 usw. so läßt sich der mittlere Fehler der einzelnen Parzellen in folgender Form ausdrücken:

$$m^2 = \frac{\mu^2}{(n_1 n_2)^2}[A + Bp^2 + Cq^2 + Dr^2 + \cdots\cdots], \tag{2}$$

wo

$$A + B + C + \cdots\cdots = \frac{n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1)}{2}.$$

Bei der praktischen Anwendung dieser Formel wird man sich wohl gewöhnlich damit begnügen, die zwei ersten Glieder der Reihe abzusondern, welche Differenzen zwischen unmittelbar benachbarten Größen

enthalten, also die Glieder A und Bp^2. Bei den übrigen Gliedern setzen wir dann, um zu vereinfachen:

$$q^2 = r^2 = \cdots\cdots\cdots = u^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} C + D + \cdots\cdots &= \left[\frac{n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1)}{2} - (A + B)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}[(n_1 n_2)^2 - 9 n_1 n_2 + 6 n_1 + 6 n_2 - 4] \\ &= H. \end{aligned}$$

Die Formel (2) wird dann vereinfacht und mit angenäherter Gültigkeit geschrieben:

$$(3) \qquad m^2 = \frac{\mu^2}{(n_1 n_2)^2}(A + Bp^2 + Hu^2).$$

Die Größen μ, p und u sind gewisse für das Versuchsfeld eigentümliche Konstanten. Sie mögen auf den verschiedenen Teilen des Feldes verschieden sein, sind aber von der *Ausdehnung* des Feldes unabhängig und werden sich im allgemeinen aus einer relativ geringen Anzahl von Vergleichungen zwischen Elementargrößen mit hinreichender Genauigkeit ermitteln lassen. Somit erlaubt die Formel (3) zu erkennen, wie der berechnete mittlere Fehler mit der Ausdehnung des Feldes zunehmen wird.

Zur Prüfung dieser Theorie lag ein älterer Versuch von B. R. Larsen vor.[1]) Eine drei Jahr alte Wiese mit Phleum, 200 m lang, 30 m breit, wurde in 240 quadratische Parzellen von je 0,25 ar Inhalt geteilt und jede Parzelle für sich abgeerntet. Auf dem ganzen Felde betrug die Ernte 4270 kg, also auf jeder Parzelle von 0,25 ar durchschnittlich 17,8 kg. Die 240 Ernten der einzelnen Parzellen ergaben direkt:

$$m^2 = 8{,}518.$$

Aus den 434 Differenzen d_1, d_2, ... d_{434} zwischen zwei Parzellen, welche längs einer Seite aneinanderstoßen, wurde berechnet

$$\mu^2 = \frac{\Sigma d^2}{434} = 6{,}495.$$

Aus den 390 Differenzen d'_1, d'_2 ... d'_{390} zwischen Parzellen, welche in einem Eckenpunkte aneinanderstoßen, wurde berechnet:

$$p^2 \mu^2 = \frac{\Sigma d'^2}{390} = 8{,}893.$$

Um die Konstante u^2 zu erhalten, bemerken wir, daß $\pm u\mu$ die mittlere Differenz zwischen zwei beliebigen, weit voneinander belegenen Parzellen

1) Berättelse öfver Andra nordiska Landtbrukskongressen i Stockholm 1897. I. S. 17 ff.

ist. Nach der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie ist, wie schon früher bemerkt, mit großer Annäherung:

$$u^2 \mu^2 = 2m^2 = 17{,}037.$$

Wir haben nun zur Berechnung des mittleren Fehlers bei verschiedenen Feldgrößen die Konstanten:

$$\mu^2 = 6{,}495,$$
$$p^2 = 1{,}369,$$
$$u^2 = 2{,}623.$$

Mit Hilfe dieser Konstanten und der Formel (3) sind die Werte für m^2 für einige verschiedene Feldgrößen berechnet und in der beistehenden Tabelle unter „m^2 theoretisch" zusammengestellt. Nebenbei sind unter „m^2 empirisch" die unmittelbar aus dem Versuchsmaterial berechneten mittleren Fehler zusammengestellt. Bei der Berechnung der letzteren ist das folgende Verfahren benützt: Das Feld ist in eine Anzahl kleinere, gleich große Felder geteilt. Für jedes der kleineren Felder ist die Mittelernte der Parzellen berechnet, und sind die Differenzen zwischen dieser Mittelernte und den Ernten der einzelnen Parzellen ermittelt. Die Summe der Quadrate dieser Differenzen für das ganze Feld, durch deren Anzahl geteilt, gibt dann das Quadrat des mittleren Fehlers, welcher der kleineren Feldgröße entspricht.

n_1	n_2	$n_1 n_2$	A	B	H	m^2 theoretisch	m^2 empirisch
2	2	4	4	2	0	2,74	2,47
6	2	12	16	10	40	6,09	5,65
6	5	30	49	40	346	7,30	7,15
6	10	60	104	90	1576	7,87	8,09
6	20	120	214	190	6736	8,19	8,37
6	40	240	434	390	27856	8,36	8,52

II. Larsens Methode.

Wenn eine größere Anzahl von verschiedenen Versuchsgegenständen miteinander verglichen werden sollen, so wie es bei Feldversuchen häufig gemacht wird, muß man ein hinreichend großes Feld in kleinere Parzellen von je z. B. 0,25 ar Inhalt teilen. Anstatt sämtliche Parzellen mit den zu vergleichenden Versuchsobjekten zu beschicken, wird ein Teil derselben, z. B. jede dritte Parzelle, mit einem bestimmten Versuchsgegenstand beschickt. Diese Parzellen wollen wir *Maßparzellen* nennen. Die übrigen Parzellen werden mit den zu vergleichenden Versuchsgegenständen beschickt. Nun werden die Ernten dieser letzteren

Parzellen nicht unmittelbar miteinander verglichen. Statt der wirklichen Ernte einer Parzelle wird eine „ideale“ in folgender Weise berechnet: Man ermittelt die durchschnittliche Ernte der unmittelbar an die Parzelle angrenzenden Maßparzellen, sucht die Differenz zwischen diesem Durchschnitt und der wirklichen Ernte der Parzelle. Diese Differenz wird dann addiert zu bezw. subtrahiert von der für sämtliche Maßparzellen berechneten Durchschnittsernte. Die so für die Parzellen ermittelten „idealen“ Ernten werden dann in gewöhnlicher Weise miteinander verglichen.

Larsen verteilt die Parzellen nach folgendem Schema, wo die k Maßparzellen bezeichnen.

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & k & c & d & k & \dots \\ f & k & g & h & k & l & \dots \\ k & o & p & k & q & r & \dots \\ u & v & k & x & y & k & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{array}$$

Die Parzelle g z. B. grenzt an drei Maßparzellen k. Die Differenz zwischen dem Mittel aus diesen drei und der Parzelle g wird zu dem Mittel der sämtlichen k summiert. Für die am Rande des Feldes belegenen Parzellen, z. B. a, b, ..., f..., muß die „ideale“ Ernte in etwas abweichender Art berechnet werden. Wie das geschieht, ist von Larsen in der Beschreibung seiner Methode dargestellt und wird hier übergangen.

Untersuchen wir nun, wie der mittlere Fehler dieser „idealen“ Ernten sich mit der Feldgröße ändern muß. Wir wollen annehmen, daß alle Vergleichsparzellen gegenüber den angrenzenden Maßparzellen in derselben Weise orientiert sind. Die Differenz d_i zwischen einer Vergleichsparzelle und dem Durchschnitt der angrenzenden Maßparzellen ist dann von der Größe des Feldes unabhängig. Die „ideale“ Ernte einer Vergleichsparzelle ist, wenn wir die durchschnittliche Ernte der Maßparzellen mit M bezeichnen: $M + d_i$. Die wahren Fehler:

$$\frac{[(M + d_i)]}{n} - (M + d_i)$$

werden sich nur unwesentlich von d_i unterscheiden. Der mittlere Fehler wird deshalb von der Feldgröße unabhängig sein. Eine Prüfung mit dem früher benützten Material bestätigt dies vollständig. Von den 240 Parzellen wurden 80 als Maßparzellen angesehen. Unter „Feldgröße“ ist die Anzahl der Versuchsparzellen angegeben.

Feldgröße	Quadrat des mittleren Fehlers
8	3,81
40	3,86
80	3,90
160	3,88

Diese Berechnungsweise ist indessen unzulässig, wenn man den mittleren Fehler der nach Larsens Methode berechneten idealen Ernten mit dem mittleren Fehler sämtlicher Parzellen vergleichen will. Als „wahren" Wert darf man nicht den Durchschnitt der berechneten „idealen" Ernten ansehen, sondern vielmehr den Durchschnitt sämtlicher Parzellen, sei es, daß die Parzellen als Versuchs- oder daß sie als Maßparzellen benützt worden sind.

Es sei i die Ernte einer gewissen Versuchsparzelle. Das Mittel der angrenzenden Maßparzellen sei k_i, und $i - k_i = d_i$. Wenn M der Durchschnitt sämtlicher Maßparzellen ist, so ist die „ideale" Ernte der betrachteten Parzelle $M + d_i$. Um den mittleren Fehler zu berechnen, nehmen wir die Differenz zwischen jeder einzelnen „idealen" Ernte und dem Durchschnitt D *sämtlicher* Parzellen:

$$\begin{aligned} \Delta_i' &= (M + d_i) - D \\ &= (M - D) + (i - k_i). \end{aligned}$$

Wir bemerken jetzt, daß, wenn überwiegend $i > k_i$, dann wahrscheinlich auch $D > M$ ist. Denn M ist ausschließlich aus denselben Parzellen wie die k_i gebildet, aber D ist aus sämtlichen Parzellen gebildet, sowohl den i als den Ernten der Maßparzellen (in unserem Beispiel überwiegend den i). Die zwei Summanden $(M - D)$ und $(i - k_i)$ müssen also vorwiegend entgegengesetzte Vorzeichen haben. Das erste Glied wird mit wachsender Feldgröße sich rasch der Null nähern. Das zweite Glied, $i - k_i = d_i$, ist aber von der Feldgröße unabhängig. Der Zahlenwert von Δ_i' — und bei der Berechnung des mittleren Fehlers kommt es auf das Vorzeichen nicht an — muß deshalb mit wachsender Feldgröße zunehmen, und der mittlere Fehler wird sich dem Grenzwert $\pm d$ nähern. Das Gesetz, nach welchem dieses Anwachsen stattfindet, habe ich nicht festgestellt, und es läßt sich wohl auch schwer auf einfache Gestalt bringen. Wie das Anwachsen bei dem von uns betrachteten Versuchsfelde stattfindet, habe ich beispielsweise berechnet. Der dritte Teil der Parzellen ist als Maßparzelle benützt, die übrigen $\frac{2}{3}$ als Versuchsparzellen. Die Kolumne „Feldgröße" gibt die Anzahl n der Versuchsparzellen an, die zweite Kolumne das aus Vergleich mit

dem Durchschnitt G sämtlicher Parzellen des Feldes berechnete Quadrat des mittleren Fehlers.

Feldgröße	Quadrat des mittleren Fehlers
$n =$ 8	3,38
20	3,77
40	3,82
80	3,96
160	4,12.

Ergebnisse.

1. Bei Anwendung der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie auf Elemente, welche in einer bestimmten geometrischen Lage festgehalten sind, und bei welchen der Unterschied zwischen zwei beliebigen Elementen mit wachsender Entfernung zunimmt, nimmt der berechnete mittlere Fehler mit wachsender Anzahl der Elemente zu. Das Gesetz des Anwachsens ist in dem von uns betrachteten Falle durch die Formel (2) gegeben.

2. Durch Anwendung von „Maßparzellen" nach Larsens Methode läßt sich der mittlere Fehler bedeutend herabdrücken. Bei dieser Methode wird auch der mittlere Fehler mit wachsender Anzahl der Elemente zunehmen, er nähert sich aber rasch einer Grenze, welche nur von der Differenz zwischen den zusammenstoßenden Elementen abhängt.

Die Perspektive der Brüder van Eyck.

Von Karl Doehlemann in München.

1. Auch unter den großen Künstlern aller Zeiten wird es wenige geben, die durch ihre Werke den Streit der sich oft direkt widersprechenden Meinungen in gleichem Maße herauf beschworen haben, wie die Brüder Hubert und Jan van Eyck. Welche Partien an dem berühmten Genter Altar von dem älteren der Brüder, Hubert, herrühren, wie die nicht bezeichneten Bilder sich unter die beiden Brüder verteilen und chronologisch zu ordnen sind, in welchem Umfange beide Künstler von ihren Vorgängern abhängen und wieviel von ihren Entdeckungen auf ihre Schüler überging, alles das sind Fragen, die sich bei dem Mangel genauer geschichtlicher Angaben fast nur durch das sorgfältigste Studium der vorhandenen Werke beantworten lassen. Da ist es denn sicher mit Freude zu begrüßen, wenn zu den

mehr oder minder doch auf subjektivem Empfinden beruhenden Kriterien, wie sie die künstlerische Analyse eines Bildes liefert, ein neues hinzugefügt wird, das rein formaler Natur ein objektives Moment berücksichtigt: das ist die perspektivische Zeichnung. Herr Dr. G. Josef Kern[1]) hat sich der dankenswerten Arbeit unterzogen, die Bilder der Brüder Eyck, welche durch das Vorhandensein von Architektur eine Kontrolle der genauen perspektivischen Konstruktion ermöglichen, in dieser Richtung zu untersuchen, was auch deswegen wünschenswert war, weil über diesen Punkt die Anschauungen ebenfalls weit auseinander gehen. Auch die Zeit vor den Eycks (Broederlam), sowie Petrus Christus, ein Schüler Jan van Eycks, finden Berücksichtigung. Der Abhandlung sind 14 Tafeln beigefügt, welche in starker Verkleinerung Umrißzeichnungen wiedergeben, die der Verfasser nach den größten erhältlichen Photographien der betreffenden Werke, meistenteils unter gleichzeitiger Benutzung der Originale, angefertigt hat. In den Tafeln finden wir die Konstruktionslinien eingetragen, außerdem sind die Reduktion gegenüber dem Original, sowie die Koordinaten der Flucht- und Schnittpunkte angegeben.

Nach der Richtigkeit der Konstruktion ordnet der Verfasser die Bilder der Eyck in eine Reihe und kommt zu dem Schlusse, daß unter den datierten, bzw. dem Jan van Eyck ziemlich allgemein zugeschriebenen Werken die Madonna des Kanzlers Rolin (Paris, Louvre) als perspektivisch beste Leistung an das Ende dieser Entwicklung zu setzen ist, wobei er noch weiter folgert, daß dieses Bild jedenfalls später als 1436 gemalt sein müsse.[2]) Den Fortschritt, den die perspektivische Darstellung im 15. Jahrhundert in den Niederlanden gemacht hat, faßt Kern in folgende Resultate zusammen: Die Eycksche Linearperspektive nimmt eine Mittelstellung zwischen der Perspektive Broederlams und der Perspektive Masaccios ein. Die Flandrischen Quattrocentisten haben wahrscheinlich die Brunellescosche Lehre nicht gekannt, und die Entwicklung hat sich bei den Gebrüdern van Eyck und bei Petrus Christus, soweit wir sie an ihren Werken verfolgen können, unabhängig von Italien vollzogen.

Um ferner darzutun, daß die Verbindung von Theorie und Praxis kein Vorrecht der italienischen Renaissance, daß vielmehr auch Jan

1) Die Grundzüge der linear-perspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder van Eyck und ihrer Schule. I. Die perspektivische Projektion. Mit 3 Zeichnungen im Text und 14 Tafeln. 36 S. Leipzig. E. A. Seemann. 1904. Preis geb. 6 Mark.

2) Die Unwahrscheinlichkeit dieser Datierung habe ich an anderer Stelle besprochen: Mitteilungen der Gesellschaft für vervielfältigende Kunst, Okt. 1905.

van Eyck sich mit Studien über die Perspektive beschäftigt habe, weist der Verfasser darauf hin, daß man kein Recht habe, dem Geschichtsschreiber Bartholomaeus Facius, der 1456 eine Lebensbeschreibung der berühmtesten Männer jener Zeit schrieb, jede Verlässigkeit abzusprechen. Dieser erwähnt aber, daß sich Jan van Eyck besonders mit der Geometrie und mit den Künsten beschäftigt habe, die ihm als Hilfsmittel für die Malerei dienen konnten. Wenn wir auf dem Arnolfini-Bilde einen Konvexspiegel und in ihm das Spiegelbild des Gemaches dargestellt sehen, so spricht dies ja allerdings für diese Auffassung. Der letzte Abschnitt des Buches ist der mittelalterlichen Wissenschaft der Perspektive und ihrer Verbreitung in Nordeuropa gewidmet. Hier wird namentlich auf den Polen Vitellio hingewiesen, der im 13. Jahrhundert die Optik des Arabers Alhazen (etwa 1000 n. Chr.) ins Lateinische übertrug und dadurch die Perspektive Euklids dem Norden überlieferte. Interessant ist folgende Stelle aus diesem Buche: „Parallele Linien scheinen nach der Tiefe zusammenzufliehen, *niemals* aber wird man sie sich wirklich schneiden sehen.“ Der Verfasser bemerkt mit Recht, daß diese Ansicht der Verbreitung der Perspektive, d. h. der Lehre vom Fluchtpunkt nur hinderlich sein konnte. In der Tat haben ja noch Alberti und Lionardo da Vinci, trotz ihrer Kenntnis des Fluchtpunktsatzes, hierin Schwierigkeiten gefunden. Ich möchte hinzufügen, wie geeignet diese Betrachtungen sind, um die gewaltige Abstraktion erkennen zu lassen, die in der Einführung der *unendlich fernen Elemente* enthalten ist. Denn durch Einführung des unendlich fernen Punktes umgeht doch der moderne Mathematiker *formal* diese große Schwierigkeit.

2. Was nun die soeben erwähnten, etwas allgemein gehaltenen Sätze betrifft, in welche Kern das Resultat seiner Untersuchungen über die Eycksche Perspektive (im wesentlichen) zusammenfaßt, so sind sie wohl als richtig anzuerkennen. Etwas präziser könnte man die Eycksche Perspektive vielleicht dadurch definieren, daß er die Tiefenlinien im Bilde im allgemeinen von außen nach innen verlaufen oder sich drehen läßt (wobei unter Tiefenlinien die auf der Bildebene senkrecht stehenden Geraden verstanden sein mögen), und daß er parallelperspektivische Konstruktionen vermeidet. Mit den Behauptungen und Schlußfolgerungen aber, die sich im *einzelnen* in dem Buche finden, kann ich mich nicht einverstanden erklären. So folgert z. B. der Verfasser (S. 18) aus der Zeichnung der Fußböden des Genter Altars, daß Jan van Eyck das Gesetz von der Flucht der Tiefenlinien, sofern sie *einer* Ebene angehören, im Jahre 1432 gekannt habe. Nun könnte man allerdings meinen, es sei nichts leichter als das zu konstatieren: man hat ja nur nötig, sich mit einem Lineal zu bewaffnen, die Linien

auf der Photographie nachzuzeichnen und zu sehen, ob sie durch einen Punkt gehen oder nicht. *Praktisch* verhält sich die Sache aber doch anders und es verliert dies Kriterium etwas von seiner mathematischen Schärfe, ja es tritt auch hier ein gewisser subjektiver Faktor auf. Denn wenn die Konstruktionslinien auf dem Bilde bzw. auf der Vorzeichnung auch mathematisch richtig gezeichnet waren, so werden sie schon durch den Farbenauftrag etwas ungenau. Weiter verzieht sich die Leinwand, die Holztafel wirft sich. Endlich werden die Linien ja auf der photographischen Reproduktion nachgefahren. Lassen wir die etwaigen Fehler des Objektivs außer acht, so werden doch die Kopien in den Bädern verzerrt und zwar nach verschiedenen Richtungen verschieden stark und schließlich bildet das Aufziehen der Kopien eine letzte Fehlerquelle. Es ist also kein Wunder, daß das nachprüfende Lineal in seinen Stellungen Abweichungen erleidet und daß ein noch so genau konstruiertes Bild kleine Ungenauigkeiten zeigt. Indes wird die Kontrolle von Bildern, die sicher perspektivisch richtig gezeichnet sind, den Anfänger bald belehren, welchen Grad von Genauigkeit er vernünftigerweise von den Konstruktionslinien verlangen darf, sodaß er sich von Pedanterie und Optimismus gleichzeitig ferne hält.

3. Hat nun Jan van Eyck das *Gesetz* vom gemeinsamen Fluchtpunkt der Tiefenlinien einer Ebene, z. B. einer Bodenfläche, gekannt? Solche Fußbodenmuster finden wir auf zahlreichen Bildern des Künstlers und ich habe die Nachmessungen an den Photographien selbst durchgeführt: viele lassen sich sogar auch an den Kernschen Tafeln schon vornehmen.

Betrachten wir zunächst die *Außen*seiten des Genter Altars, so zeigt uns das linke innere Bild — es stellt einen Durchblick auf eine Straße dar — den am *besten* konstruierten Fußboden, welchen Kern merkwürdigerweise nicht abbildet und auch nicht erwähnt. Dieses System von Tiefenlinien darf wohl als mathematisch richtig konstruiert bezeichnet werden. Der Fußboden rechts daneben — wir sehen in dem Bilde eine gotische Nische mit Waschgerät und Handtuch — zeigt schon einige Abweichungen, indem die äußerste Tiefenlinie rechts jedenfalls nicht mehr durch den gemeinsamen Schnittpunkt der andern geht; auf ihn bezieht sich Kern bei seiner oben zitierten Behauptung. Betrachten wir weiter die beiden äußeren Bilder links und rechts, also den Engel der Verkündigung und die betende Maria, so stimmen die beiden Fußböden auch nicht angenähert.

Von der Innenseite des Altars erwähnt Kern noch den Boden in der Darstellung Gottvaters; aber schon die beigegebene Tafel läßt erkennen, daß hier von einem Gesetz bei der Konstruktion nicht die Rede sein kann.

Besser stimmt wieder der Fußboden in dem Bilde des Arnolfini und seiner Frau (London, Nationalgalerie), aber hier kann man nur wenig Tiefenlinien verfolgen. Die Tiefenlinien der Decke zeigen nach der Kernschen Tafel keinen gemeinsamen Fluchtpunkt (die Decke ist so dunkel, daß ich auf der Photographie diese Linien nicht mehr sehe). Endlich können wir diese ermüdende, aber notwendige Betrachtung damit abschließen, daß wir konstatieren, daß auch auf der Rolin-Madonna des Louvre, sowie auf der Madonna des Kanonikus Pala (Brügge, Akademie) datiert von 1436, die Tiefenlinien der Bodenflächen das mathematische Gesetz vom Fluchtpunkt nicht erfüllen.

Nun könnte man hier allerdings einwenden, daß Jan van Eyck das Gesetz vom Fluchtpunkte kannte, daß er aber vielleicht mit Überlegung, also aus ästhetischen Gründen, von ihm abwich. Das halte ich aber, wie auch Kern richtig bemerkt, für sehr wenig wahrscheinlich. Später, im 16. Jahrhundert, haben die Künstler oft sich solche Freiheiten gestattet. Daß aber Jan van Eyck ein Gesetz entdeckt, um es nach kurzer Zeit schon nicht mehr zu beachten, liegt gewiß nicht im Sinne jener Zeit. Dann bleibt mir aber kaum etwas anderes übrig, als anzunehmen, daß Jan das Gesetz vom Fluchtpunkt der Tiefenlinien einer Ebene, das heißt dessen mathematisch präzisen Ausdruck, *überhaupt nicht gekannt* hat. Daß der zuerst erwähnte Fußboden ziemlich genau mit der Theorie in Übereinstimmung sich befindet, muß ich für ein Spiel des Zufalls halten. Hatte der Künstler die Anschauung sich ausgebildet, daß die Tiefenlinien im allgemeinen gegen eine mittlere Stelle zusammenlaufen, so konnte er gegebenen Falles diese Stelle auch einmal zu einem Punkte zusammenschrumpfen lassen.

4. Natürlich hat Jan dann das Gesetz vom Fluchtpunkt der Tiefenlinien *im Raume* auch nicht erkannt und die Rolin-Madonna gibt dafür doch einen unanfechtbaren Beweis. Petrus Christus dagegen scheint das genannte Gesetz zu kennen. Für Jan van Eyck aber kann ich aus der von Kern gegebenen Reihe keine eigentliche Entwicklung herauslesen: gewiß zeigt das eine Bild größere perspektivische Verstöße als das andere, aber die tastende Unsicherheit des Empirikers geht durch alle hindurch und statt einen stetigen *Fortschritt* in der Perspektive zu beobachten, habe ich eher den Eindruck, daß der Künstler probiert und tastet. Wenn dann Jan an Stelle eines Augpunktes ein ganzes *Gebiet* annahm, so trat naturgemäß an Stelle eines Horizontes ein ganzer *Streifen* und so erkläre ich die verschiedenen Horizonte, die Kern konstatiert, der eben in betreff der mathematischen Genauigkeit doch zu geringe Anforderungen an eine perspektivische Zeichnung stellt.

Überhaupt möchte ich der Zeit der Brüder van Eyck in bezug auf Darstellung noch ein ziemliches Maß von Naivität zuschreiben und deswegen scheint mir auch die folgende Auffassung Kerns etwas gewagt: auf dem Verkündigungsbild (Petersburg, Eremitage) laufen die Tiefenlinien der Seitenwand gegen eine andere „Stelle" hin als die des Fußbodens; wo beide Ebenen zusammenstoßen; da ergibt sich für *unser* Auge eine Unzuträglichkeit. Kern spricht nun die Ansicht aus (S. 13), daß der Künstler der Schwierigkeit, die Ebene des Fußbodens mit der Ebene der Wand in einen räumlichen Zusammenhang zu bringen, durch eine geschickte Anordnung des Engels begegnet. Derselbe soll also diese Übergangsstelle verdecken. Ob da nicht dem Künstler ein größeres Raumgefühl zugeschrieben wird, als seine ganze Darstellung in bezug auf die Linienführung verrät? In perspektivischer Hinsicht beleidigten offenbar diese Linien das Auge des Künstlers nicht; er hatte also keinen Grund, die Übergangsstelle durch den Engel zu maskieren, wie er ja auch den Zusammenhang zwischen Seitenwand und Decke durchaus frei ließ.

5. Was endlich noch die Bedeutung der Perspektive Euklids betrifft, so wird meines Erachtens dieselbe leicht überschätzt. Euklid und seine Nachfolger im Mittelalter geben nur eine Theorie der Erscheinung, das heißt Betrachtungen über die *Gesichtswinkel*, unter denen die Gegenstände z. B. gleich lange Strecken erscheinen. Den wesentlichen Schritt, die Sehstrahlenpyramide mit einer Ebene zu schneiden und statt der Winkel den auf dieser Ebene sich ausbildenden *Schnitt* zu studieren, tat erst Brunellesco. Die Sätze, welche sich auf die Gesichtswinkel beziehen, sind aber sehr verschieden von denen, welche über das Bild in der schneidenden Ebene ausgesagt werden können. Mancher moderne Künstler, der einen Menschen an dem Fuß eines Turmes und einen gleich großen in der gleichen Tiefe auf der Plattform des Turmes zu zeichnen hat, zaudert vielleicht einen Moment, ob nicht der Mann auf dem Turme im Bilde kleiner sein müsse. Er ist doch weiter vom Beschauer entfernt! Aber wir *betrachten* ja das Bild und dann entspricht dem Manne oben auch der kleinere Gesichtswinkel. Um also über die theoretischen Kenntnisse des Nordens ins klare zu kommen, müßte man wissen, wer hier den Übergang von den Gesichtswinkeln zur Bildebene und damit zur wirklichen Abstraktion der Perspektive ausgeführt hat, sofern dies unabhängig von Brunellesco geschehen ist.

Wenn zum Schlusse Christian Wiener in seiner vorzüglichen Darstellung der Entwicklung der Perspektive (Lehrbuch der darstellenden Geometrie 1. Bd. S. 9) über Jan van Eyck bemerkt: „in der Linien-

perspektive zeigt er die Kenntnis des Fluchtpunktes, der freilich nicht immer einheitlich gewahrt ist, eine *mathematische* Kenntnis der Perspektive besaß er nicht", so kann ich das nur so verstehen, daß der Begriff Fluchtpunkt nicht im mathematischen Sinne, sondern als ein größeres oder kleineres Gebiet aufgefaßt wird, und dann geben meine Ausführungen für diese Behauptung geradezu den Beweis. Man wird Jan van Eyck in bezug auf die Perspektive als einen Praktiker bezeichnen müssen, der mit ungewöhnlich scharfer Beobachtungsgabe ausgestattet, aber doch nur auf empirischer Grundlage, das parallelperspektivische System seiner Vorgänger verließ und die perspektivische Zeichnung insofern verbesserte, als er die Bilder paralleler Geraden um einen Fluchtpunktbezirk sich drehen ließ.

München, Jan. 1905.

Katoptrisches Okular.

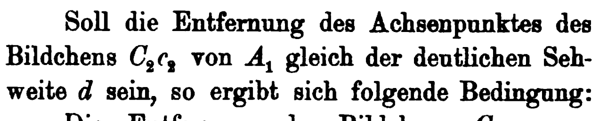
Von Felix Biske in Straßburg i. E.

Unter Verwendung eines Reflektors wird die aufgehobene chromatische Aberration selbst durch die achromatischen dioptrischen Okulare teilweise wieder eingeführt. Ein vollständig achromatisches kann nur ein katoptrisches Okular sein. Ein solches könnte nach demselben Prinzipe wie die Reflektoren konstruiert werden.

Vom großen Spiegel des Reflektors wird ein reelles Bildchen des Objektes gebildet, das durch den kleinen konvexen oder konkaven Spiegel in den Scheitel des großen, oder durch den kleinen ebenen Spiegel in eine um 90^0 gegen die Achse geneigte Richtung, im allgemeinen in Cc entworfen sei (Figur). Es sei vom konkaven Spiegel S_1 mit dem Fokus F_1 ein zum letzten Bildchen konjugiertes in $C_1 c_1$ gebildet und dieses vom konkaven oder konvexen Spiegel S_2 mit dem Fokus F_2 in ein imaginäres Bildchen in $C_2 c_2$ verwandelt, welches zur Beobachtung gelangt. Die Dimensionen des Okulares ergeben sich folgendermaßen.

Es seien zuerst die Strahlen von dem Punkte des entfernten Objektes, der in der Achse des Reflektors liegt, berücksichtigt. Von diesen Strahlen werden die von der Peripherie des großen Spiegels reflektierten hinter dem Bildchen Cc einen Lichtkegel bilden, dessen Öffnung $A_1 CS_1 = \alpha$ bekannt ist; dagegen werden die von der Peripherie des kleinen Spiegels abgegrenzten Strahlen einen Schattenkegel bilden, dessen Öffnung $A_1 CB = \beta$ auch bekannt ist. Der Spiegel S_1 sei in den Lichtkegel in der Entfernung $CA_1 = a_1$ hingestellt, sodaß er dessen

Durchschnitt ausfüllt und der Spiegel S_2 in den Schattenkegel, in der Entfernung $A_1 A_2 = l$, sodaß er auch dessen Durchschnitt ausfüllt.



Soll die Entfernung des Achsenpunktes des Bildchens $C_2 c_2$ von A_1 gleich der deutlichen Sehweite d sein, so ergibt sich folgende Bedingung:

Die Entfernung des Bildchens $C_1 c_1$ vom Spiegel S_1, dessen Fokalweite f_1 und dessen Höhe h_1 sei, wird[1])

$$(1) \qquad b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} - \frac{1}{8}\left(\frac{a_1 - 2f_1}{a_1 - f_1}\right)^2 \frac{h_1^2}{f_1},$$

für den Achsenstrahl ist sie ohne das zweite Glied im zweiten Teile.

Da $C_1 A_2 = l - b_1$, so wird die Entfernung des Bildchens $C_2 c_2$ vom Spiegel S_2, dessen Fokalweite f_2 und dessen Höhe h_2 sei, für den Achsenstrahl

$$b_2 = \frac{(l - b_1) f_2}{(l - b_1) \mp f_2},$$

wo das obere Zeichen für konkaven, das untere für konvexen Spiegel gilt, und da diese gleich $\mp (d - l)$ sein soll, so ergibt sich nach Substitution

$$\text{(I)} \qquad b_2 = \frac{\left(l - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right) f_2}{l - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} \pm f_2} = \mp (d - l).$$

Sollen noch die peripherischen Strahlen nach der Reflexion vom Spiegel S_1 durch Spiegel S_2 aufgefangen werden und die Größe des letztern dem Durchschnitte des Schattenkegels höchstens gleich sein, so ergibt sich noch folgende Bedingung:

Es ist mit genügender Genauigkeit

$$h_2 = \frac{a_2}{b_1} h_1,$$

oder da $h_1 = a_1 \operatorname{tg} \alpha$ und $h_2 \overline{\gtrless} (a_1 - l) \operatorname{tg} \beta$ sein soll, so ist nach Substitution

$$\text{(II)} \qquad \frac{\pm\left(l - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right)}{\frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}} \cdot a_1 \operatorname{tg} \alpha \overline{\gtrless} (a_1 - l) \operatorname{tg} \beta.$$

Sollen weiter die peripherischen Strahlen nach der Reflexion von S_1 und S_2 durch die Öffnung des Schattenkegels im Spiegel S_1 austreten,

1) Handw. d. Astron. Bd. I S. 743 (1897).

und diese Öffnung die Größe der Augenpupille p nicht überschreiten, so muß der Achsenpunkt des Bildchens C_2c_2 hinter oder mindestens in C liegen, was weitere folgende Bedingung ergibt

(III) $$a_1 \gtreqless d,$$

und es muß

(IV) $$\frac{h_2 \cdot d}{d-l} \leqq p.$$

Es seien die Strahlen vom Rande des Objektes berücksichtigt, so werden diese hinter dem Bildchen Cc einen Lichtkegel bilden, der durch c geht und mit der Achse einen Winkel $A_1GD = \alpha'$ einschließt, und einen Schattenkegel, der durch c geht und mit der Achse einen Winkel $A_1EB' = \beta'$ bildet. Der Spiegel S_1 soll den neuen Lichtkegel, der Spiegel S_2 den neuen Schattenkegel ausfüllen.

Die Bedingung der deutlichen Sehweite des Bildchens C_2c_2 gibt dieselbe Gleichung (I).

Die Bedingung der gleichen Größe des Spiegels S_2 mit dem Durchschnitte des Schattenkegels ergibt auch die Gleichung (II), in welcher aber der zweite Teil gleich wird:

(II′) $$\gtreqless A_2E \operatorname{tg}\beta' \gtreqless (a_1 - l + Cc \operatorname{ctg}\beta') \operatorname{tg}\beta'.$$

Die Bedingung noch, daß die peripherischen Randstrahlen des Bildchens C_2c_2 durch die Öffnung des Schattenkegels im Spiegel S_1 austreten sollen, die kleiner als die Augenpupille sein muß, ergibt, daß der Durchschnitt dieser Strahlen c_2B' mit der Achse hinter oder in E liegen muß, folglich

(III′) $$a_1 \gtreqless d - (Cc + C_2c_2) \operatorname{ctg}\beta'$$

und

(IV′) $$\frac{h_2\,(d - C_2c_2 \operatorname{ctg}\beta')}{d - C_2c_2 \operatorname{ctg}\beta' - l} \leqq p.$$

Die Bedingung weiter, daß die Vergrößerung des Okulares ein bestimmtes Maß überschreiten soll, ergibt, daß die Größe des Bildchens C_2c_2, da die des Bildchens Cc gegeben ist, größer als $m \cdot Cc$ sein muß.

Die Größe des Bildchens C_1c_1, das nahe vom Fokus F_1 entsteht, ist

$$C_1c_1 = -\frac{Cc \cdot f_1}{a_1 - f_1};$$

da C_1c_1 auch nahe dem Fokus F_2 liegt, so ist:

$$C_2c_2 = \mp \frac{C_1c_1 \cdot f_2}{a_2 \mp f_2},$$

und da diese $\mp m \cdot Cc$ sein muß, so ergibt sich nach Substitution:

$$(V') \qquad \pm \frac{\frac{Cc \cdot f_1}{a_1 - f_1} \cdot f_2}{l - \frac{a_1 - f_1}{a_1 f_1} \mp f_4} = \mp m \cdot C.$$

Die Gleichungen bezw. Ungleichungen (I) bis (IV) oder (I') bis (V') enthalten die vier Unbekannten a_1, l, f_1, f_2. Damit die sphärische Aberration der Kugelspiegel nicht sehr störend wirkt, muß h_1 gegen f_1 und h_2 gegen f_2 verhältnismäßig klein sein, infolge der Gleichung (I); oder es muß der Spiegel S_1 elliptisch, dagegen der Spiegel S_2 hyperbolisch angeschliffen werden.

Beispiel. Es seien die folgenden Dimensionen des großen Reflektors zu Melbourne, der nach Cassegrainschem Typus eingerichtet ist, genommen[1])

Öffnung des Hauptspiegels	$2R = 1.219$	m
„ des kleinen Spiegels	$2r = 0.203$	„
Brennweite des Hauptspiegels	$F = 9.14$	„
„ des kleinen Spiegels	$f = 1.9$	„
Entfernung des kleinen Spiegels vom großen	$D = 7.6$	„
Öffnung in der Mitte des großen Spiegels	$2\varrho = 0.203$	„ .

Es sei der Fall des unendlich entfernten Punktes, der in der Achse des Reflektors liegt, berücksichtigt. Die oben entwickelten Formeln gelten für den allgemeinen Fall, daß der Winkel β des Schattenkegels groß genug sein kann und dann $a_1 < d$, zufolge der Gleichungen (III) und (IV), sein müßte; in dem genommenen Beispiele wird der Winkel β klein sein, und es ist nötig in der Gleichung (III) $a_1 = d$ zu nehmen, wodurch in der Gleichung (II) $h_2 = (d - l)\operatorname{tg}\beta$ wird, und die Gleichung (IV) $d \operatorname{tg}\beta \leqq p$ ergibt, was die Größe des nötigen Schattenkegels beschränkt, da p und d bekannt sind. Die übrig gebliebenen Gleichungen (I) und (II) enthalten noch die Unbekannten l, f_1, f_2, erlauben folglich willkürliche Annahme einer von diesen.

Die Entfernung des Bildchens C vom Cassegrainschen Spiegel im großen Reflektor ist $b = \frac{af}{a-f} = -7.125$ m, weil $d = F - D = 1.5$ m ist. Da der peripherische Lichtstrahl des Objektivspiegels am Rande des Cassegrainschen Spiegels zum Bildchen C reflektiert wird, so ist die Öffnung des Lichtkegels gegeben durch $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{b}$; und die Höhe

1) Dr. L. Ambronn: „Handbuch d. Astronom. Instrum.kunde" S. 1184.

des Okularspiegels S_1, zufolge $h_1 = d \operatorname{tg} \alpha$, wo $d = 25$ cm, ergibt sich zu 3.6 mm. Nimmt man den Radius der Pupille des Auges zu 2 mm an, und beziehe sich die willkürliche Annahme auf die Höhe des kleinen Spiegels S_2, die $h_2 = 1.75$ mm sei, so ist $(d - l) = h_2 \operatorname{ctg} \beta = \frac{h_2 \cdot d}{p}$, wovon ergibt sich $l = 31.3$ mm.

Im Falle des konkaven Spiegels S_2 ist $b_1 = \frac{l \cdot h_1}{h_1 + h_2} = 21.0$ mm, folglich $a_2 = l - b_1 = 10.3$ mm und somit $f_1 = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} = 19.4$ mm, dagegen $f_2 = \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} = 10.8$ mm, wo $b_2 = -(d - l) = -218.7$ mm. Im Falle des konvexen Spiegels S_2, der von derselben Höhe h_2 und in derselben Entfernung l wie der konkave Spiegel sei, ist $b_1 = \frac{l h_1}{h_1 - h_2} = 61.6$ mm, folglich $a_2 = l - b_1 = -30.3$ mm und somit $f_1 = 49.4$ mm, dagegen $f_2 = \frac{a_2 \cdot b_2}{a_2 - b_2} = 26.6$ mm, wo $b_2 = d - l = +218.7$ mm.

In diesem Beispiele ist das Verhältnis der Öffnung des Lichtkegels zu der des Schattenkegels, $h_1 : p = 1.8$ im Okulare und zufolge der Ähnlichkeit dieser Kegel auch im Objektiv. Da der Radius des Lichtkegels im Objektiv $R = 0.609$ m ist, so hätte der Radius des Schattenkegels im Objektiv zu sein $s = 0.342$ m. Die Öffnung des geometrischen Schattens vom kleinen Spiegel am großen Spiegel hat den Radius $r = 0.102$ m; es entstehen aber hinter dem kleinen Spiegel Diffraktionsringe, die einen größeren zentralen Kegel des unbrauchbaren Lichtes verursachen. In speziellen Fällen wäre es vorteilhafter, die Größe des kleinen Spiegels im Reflektor so auszuwählen, daß die Größe seines geometrischen Schattens im großen Spiegel der Öffnung des für das Okular nötigen Schattenkegels nahe gleich wäre. Ist im obigen Beispiele der Radius eines solchen kleinen Spiegels x, seine Entfernung vom Fokus F des großen Spiegels y und der Radius des für das Okular nötigen Schattenkegels in diesem kleinen Spiegel z, so ist $\frac{x}{R} = \frac{y}{F}$, $\frac{z}{x} = \frac{x}{R}$ und folglich $\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{CF - y} = \frac{x^2}{R \cdot CF - Fx}$, wo $CF = q = b + (F - D) = 8.2$ m.

Es ergibt sich aus der quadratischen Gleichung

$$x = -\frac{F \operatorname{tg} \beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{F \operatorname{tg} \beta}{2}\right)^2 + Rq \operatorname{tg} \beta} = 0.17 \text{ m};$$

folglich brauchte der Radius des kleinen Spiegels nur wenig größer zu sein, und das Verhältnis des Lichtkegels zum Schattenkegel im Objektiv wäre $R : x = 3.6$, wodurch auch die Okularspiegel vergrößert werden könnten.

Da bei den cölestischen Objekten, die einen Gesichtswinkel haben, die Größen der Bildchen klein sind, so würden die Dimensionen der Okularspiegel nicht wesentlich geändert.

Bei Einstellung auf die deutliche Sehweite können die Spiegel S_1 und S_2 gemeinsam ein wenig für Vergrößerung derselben vom Bildchen Cc entfernt, für Verkleinerung dagegen diesem Bildchen genähert werden.

In der Photometrie, speziell bei den kolorimetrischen Untersuchungen der Gestirne sind katoptrische Okulare prinzipiell notwendig, weil hier keine chromatische Aberration bleiben soll, damit die wirkliche gesamte Farbe des Objektes beobachtet werden kann.

Graphisch-analytische Ausgleichung eines ebenen Linienzuges nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Von J. Schnöckel in Aachen.

Unter den zahlreichen Reihenentwickelungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, welche I. P. Gram im Journal für Mathematik, Band 94, S. 41 und folgende aufführt, hat die Fouriersche Reihe für praktische Zwecke im besonderen Bedeutung erlangt, da sich ihre Koeffizienten mit Hilfe eines harmonischen Analysators leicht bestimmen lassen. Wesentlich schwieriger gestaltet sich die graphisch-analytische Darstellung eines ebenen Linienzuges in Form von Potenzreihen, deren Koeffizienten Momente verschiedener Ordnung der zu bestimmenden Kurve sind.[1]) Diese Aufgabe kann zwar mit dem Integraphen von Abdank-Abakanowitz gelöst werden, erfordert aber dann eben so viele Kurvenbefahrungen, wie die gesuchte Reihe Glieder enthalten soll.

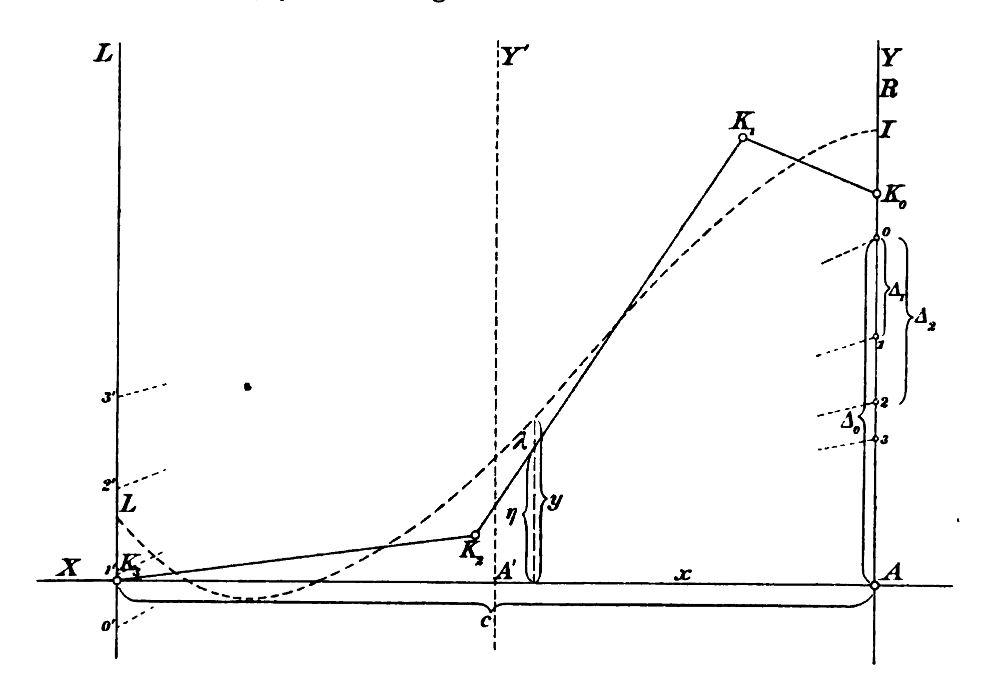
Liegen $m+1$ durch eine Potenzreihe zu interpolierende Beobachtungswerte $\eta = f(x)$ vor und trägt man sie nach Koordinaten auf Millimeterpapier auf, so lassen sich nach einem vom Verfasser in dieser Zeitschrift 51. Band (1904), Heft 1, S. 42 u. flg. angegebenen Verfahren[2]) die Momente verschiedener Ordnung des durch geradlinige Verbindung der $m+1$ Punkte entstehenden Polygons in einfacher konstruktiver Weise ermitteln. Eine zu integrierende Kurve ersetzt man zweckmäßig durch eine eckige Figur, welche sich ihr möglichst gut anschließt, und erreicht dann eine größere Genauigkeit als mit verwickelten

1) Vergl. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band I, Teil 2, S. 819 und Band II, Teil 1, S. 689. Ferner Bruns, Astronomische Nachrichten, Jahrg. 1898, S. 161.

2) Vergl. ferner Schnöckel, diese Zeitschrift 49. Band (1903), Heft 3, S. 372f.

Apparaten. Die folgenden zur Ermittelung der Koeffizienten dienenden Formeln stützen sich auf die bekannten und von Gram hergeleiteten Reihenentwicklungen[1]) nach den Kugelfunktionen $X^{(n)}$ und schließen sich der erwähnten konstruktiven Lösung des Momentenproblems eng an.

Soll die Gleichung des Linienzuges $K_0, K_1 \ldots K_m$ (für $m = 3$, siehe die Figur) derart dargestellt werden, daß $\Sigma \lambda \lambda = \Sigma (y - \eta)^2$ ein Minimum wird, so hat man das Polygon von K_0 aus gegen die Achse AY nach dem Moment $\int \eta x^n dx$ auszugleichen. Macht man der Reihe nach



$K_1R_0 \parallel K_2K_0$, $K_1R_1 \parallel K_2R_0, \ldots, K_1R_n \parallel K_2R_{(n-1)}$, so ist K_2R_n Gradiente $n$ter Ordnung für $K_0K_1K_2$. Nach $(m-1)$ maliger Ausführung dieser Konstruktion wird $K_0, K_1 \ldots K_m$ durch die Gradienten n-ter Ordnung $\overline{0K_3}$, $\overline{1K_3}, \ldots, \overline{nK_3}$ ersetzt. Wird $\overline{An} = r_n$ und $r_0 - r_n = \Delta_n$ gesetzt, so werden die Δ in der Regel kleiner als die r sein, da sich die Punkte n um den Punkt 0 zu gruppieren pflegen. Durch Einführung der Δ_n gestalten sich aber auch die folgenden Formeln einfacher. Nach vollzogener Ausgleichung bestimmt man die Größe z nach den Formeln

1) Vergl. M. Plarr, Comptes rendus des séances de l'académie des sciences 1857, S. 984. Ferner R. Schumann, Potenzreihenentwicklung und Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1905 (Teubners Verlag).

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
z_0 &= \Delta_0 \\
z_1 &= \Delta_0 + 2\Delta_1 \\
z_2 &= 5(2\Delta_1 - \Delta_2) \\
z_3 &= 14(2\Delta_1 - 2{,}5\Delta_2 + \Delta_3) \\
z_4 &= 30(2\Delta_1 - 4{,}5\Delta_2 + 4{,}2\Delta_3 - 1{,}4\Delta_4) \\
z_5 &= \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Setzt man $A'A = AK_m = 1$ und betrachtet $XA'Y'$ als ersten Quadranten des Koordinatensystems $\mathfrak{x}$, y, so sind die z Koeffizienten einer Reihenentwickelung von $K_0, K_1 \ldots K_m$ nach Kugelfunktionen

$$
(2)\quad 2y = z_0 X^{(0)} - z_1 X^{(1)} + z_2 X^{(2)} - z_3 X^{(3)} + - \cdots + (-1)^n z_n X^{(n)}.
$$

Um die Gleichung des gegebenen Linienzuges in Form einer Potenzreihe darzustellen, legt man die Ordinatenachse passend durch K_0 und erhält dann für die Koeffizienten der Reihe

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
y = \tfrac{1}{2}a_0 - a_1\left(\frac{x}{c}\right) + 3a_2\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 10a_3\left(\frac{x}{c}\right)^3 + 35a_4\left(\frac{x}{c}\right)^4 \\
- + \cdots (-1)^n \tfrac{1}{2}(2n)_n \cdot a_n\left(\frac{x}{c}\right)^n
\end{aligned}
$$

die nachher zu beweisenden Formeln;

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
a_0 &= z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \cdots \\
a_1 &= z_1 + 3z_2 + 6z_3 + 10z_4 + \cdots \\
a_2 &= z_2 + 5z_3 + 15z_4 + \cdots \\
a_3 &= z_3 + 7z_4 + \cdots \\
a_4 &= z_4 + \cdots \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
a_n &= (2n)_0 z_n + (2n+1)_1 z_{(n+1)} + (2n+2)_2 z_{(n+2)} + (2n+3)_3 z_{(n+3)} + \cdots
\end{aligned}
$$

In den Gleichungen (1), (3) und (4) kann die Abszisse $AK_3 = c$ jeden beliebigen Wert haben. Bricht man die Reihe (3) mit dem Gliede $a_i x^i$ ab, so werden in (1) und (4) die Δ, z und a mit dem Index $(i+1)$, $(i+2)$ ... zu Null.

Beispiel.

Der in der Figur verzeichnete Linienzug $K_0 \ldots K_3$ wird durch die Gradienten $\overline{0K_3}$, $\overline{1K_3}$, $\overline{2K_3}$, $\overline{3K_3}$ ausgeglichen. Es ergeben sich in Millimetern

$$
r_0 = \Delta_0 = +45{,}6, \quad \Delta_1 = +13{,}0, \quad \Delta_2 = +21{,}5, \quad \Delta_3 = +26{,}3
$$

Nach (1) werden hieraus berechnet

$$z_0 = +45{,}6,\quad z_1 = +71{,}6,\quad z_2 = +22{,}5,\quad z_3 = -20{,}3$$

Da $c = 100$ mm ist, folgt aus (4) in Verbindung mit (3)

$$y = +59{,}7 - 0{,}173x - 0{,}0237x^2 + 0{,}000203x^3.$$

Um nach Bestimmung des Punktes 4 in der Figur diese Gleichung noch auf den vierten Grad zu bringen, hätte man nach (3) und (4) den Koeffizienten der Reihe nach die Korrekturen $\frac{1}{2}z_4$, $\frac{10}{c}z_4$, $\frac{45}{c^2}z_4$, $\frac{70}{c^3}z_4$, $\frac{35}{c^4}z_4$ hinzuzufügen.

Der Kontrolle und Vergrößerung der Genauigkeit halber ist es erwähnenswert, daß man die Ausgleichung von K_0K_3 auch in bezug auf die Achse K_3L vornehmen darf, ohne die Formeln (1) bis (4) zu verändern. Nur z_1, z_3, z_5 usw. wechseln das Vorzeichen. Um schräge Lagen der Gradienten gegen die Achse K_3L zu vermeiden, ist in der Figur die Ausgleichung des Zuges $\overline{K_3K_2K_1K_0A}$ in K_0 abgebrochen, sodaß man zu den Längen $\overline{0'K_3}$, $\overline{1'K_3}$, $\overline{2'K_3}$, $\overline{3'K_3}$ die Größen $\overline{AK_0}$, $2\cdot\overline{AK_0}$, $3\cdot\overline{AK_0}$, $4\cdot\overline{AK_0}$ zu addieren hat, um r_0, r_1, r_2 und r_3 und daraus die Δ zu erhalten. Für das Beispiel findet sich

$$AK_0 = 51{,}5\quad \overline{0'K_3} = -6{,}2\quad \overline{1'K_3} = +0{,}8\quad \overline{2'K_3} = +12{,}2$$
$$\overline{3'K_3} = +24{,}2$$

und daraus

$$\Delta_0 = +45{,}3,\quad \Delta_1 = -58{,}5 \text{ usw.}$$
$$z_0 = +45{,}3,\quad z_1 = +71{,}7 \text{ usw.}$$

Die Mittelbildung aus den beiden auf verschiedenen Wegen erhaltenen z vergrößert die Genauigkeit der Analysierung sehr erheblich.

Ableitung der Reihen (1) bis (4).

Die Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten z in (2) lautet nach Gram (s. o.)

$$z_n = (-1)^n(2n+1)\int_{-1}^{+1}\eta X^{(n)}d\mathfrak{x}.$$

Setzt man für die Kugelfunktion $X^{(n)}$ den aus der Ivoryschen Gleichung entwickelten Ausdruck

$$X^{(n)} = \frac{1}{2^n}[(2n)_n\mathfrak{x}^n - n_1(2n-2)_n\mathfrak{x}^{n-2} + \cdots]$$

ein, so erhält man

$$(5)\quad z_n = \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}\left[(2n)_n\int_{-1}^{+1}\eta\mathfrak{x}^n d\mathfrak{x} - n_1(2n-2)_n\int_{-1}^{+1}\eta\mathfrak{x}^{n-2}d\mathfrak{x} + - \cdots\right].$$

Mit Hilfe des binomischen Satzes kann man für $\mathfrak{x} = AA' - 1 = x - 1$ das Moment $\int\limits_{-1}^{+1} \eta \mathfrak{x}^p d\mathfrak{x}$ als lineare Funktion der Momente $\int\limits_0^2 \eta x^p dx$ von der nullten bis $p$ten Ordnung darstellen und findet in Rücksicht auf die in Anmerkung 2) S. 430 erwähnte Abhandlung

$$(6)\quad \int\limits_{-1}^{+1} \eta \mathfrak{x}^p d\mathfrak{x} = (-1)^p \cdot 2\left(\frac{p_0 r_0}{1 \cdot 2} - \frac{p_1 2^1 r_1}{2 \cdot 3} + \frac{p_2 2^2 r_2}{3 \cdot 4} - + \cdots \frac{p_i 2^i r_i}{(i+1)(i+2)}\right).$$

Nach Einsetzen in (5) ergibt sich, wenn alle mit r_i behafteten Glieder zusammengefaßt werden, für den Koeffizienten von r_i in z_n

$$(7)\quad \frac{(-1)^i(2n+1)}{(i+1)(i+2)2^{n-i-1}}\left[n_0(n)_i(2n)_n - n_1(n-2)_i(2n-2)_n + n_2 \cdot (n-4)_i(2n-4)_n - + \cdots\right].$$

Hiernach sind die Gleichungen (1) zu berechnen, wenn $r_i = r_0 - \Delta_i$ gesetzt wird.

Aus (6) folgt auch, daß sich die Gleichungen (1) und (7) nicht ändern, wenn die Momentenachse AY mit K_3L vertauscht wird, weil $AA' = K_3A'$ ist.

Um die Reihen (3) und (4) zu entwickeln, ersetzt man in der Ivoryschen Formel $\mathfrak{x}$ durch $x - 1$:

$$X^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} D_x^n (-x)^n (2-x)^n$$

und erhält nach dem binomischen Satz

$$X^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} D_x^{(n)} \left(x^n - \frac{n_1}{2^1} x^{n+1} + \frac{n_2}{2^2} x^{n+2} - + \cdots \frac{n_i}{2^i} x^{n+i}\right)$$

Durch Differenzieren wird, wenn man alle Glieder summiert,

$$X^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum (-1)^i n_i (n+i)_i n! \left(\frac{x}{2}\right)^i$$
$$= (-1)^n \sum (-1)^i (2i)_i (n+i)_{2i} \left(\frac{x}{2}\right)^i.$$

Die Summierung von (2) nach n ergibt nun

$$2y = (-1)^i (2i)_i \left(\frac{x}{2}\right)^i \sum (n+i)_{2i} z_n.$$

Setzt man nach der Reihe $i = n,\ n+1,\ \ldots,$ so folgt für die Koeffizienten der Gleichung

$$y = \alpha_0 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + - \cdots (-1)^n \alpha_n x^n$$

allgemein

$$\alpha_n = \frac{(2n)_n}{2^{n+1}}[(2n)_0 z_n + (2n+1)_1 z_{n+1} + (2n+2)_2 z_{n+2} + \cdots]$$

Hieraus ergeben sich die Formeln (3) und (4) für

$$\alpha_n = \frac{(2n)_n}{2^{n+1}} a_n.$$

Die Einführung des Maßstabverhältnisses $AK_3 = c$ wird durch Einsetzen von $\frac{2x}{c}$ anstatt x erreicht.

Tangentenkonstruktion mit Hilfe des Spiegellineals.

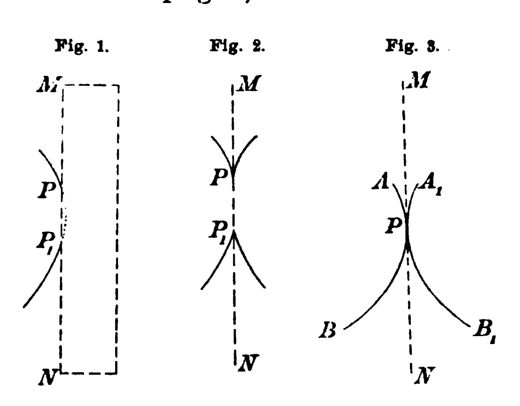
Von K. MACK in Hohenheim.

Der Zweck des von dem verstorbenen Prof. E. Reusch in Tübingen angegebenen Spiegellineals[1]) ist die Konstruktion der Normalen irgend einer Kurve in einem beliebigen Punkt. Das Instrumentchen besteht im wesentlichen in einer geeigneten ebenen spiegelnden Fläche, die längs der Kante eines kleinen Lineals senkrecht zum Zeichnungsblatt angebracht ist. Die Normale einer Kurve im Punkt P wird dadurch erhalten, daß die Linealkante durch P hindurchgelegt und das Lineal durch Drehung um P in diejenige Stellung gebracht wird, in welcher das vor dem Spiegel liegende Kurvenstück und sein Spiegelbild sich ohne Knickung aneinander anschließen.

Handelt es sich um die *Tangente* der Kurve im Punkte P, so kann man natürlich derart verfahren, daß man zunächst mit Hilfe des Spiegellineals in der eben geschilderten Weise die Normale zeichnet und sodann durch P die zu ihr Senkrechte zieht. Die Aufgabe läßt sich aber auch ganz direkt mit Hilfe des Spiegellineals lösen, und es nimmt beinahe Wunder, daß Reusch in seiner oben zitierten Notiz nicht auf diese Möglichkeit hingewiesen hat. Man denke sich in Punkt P (s. Fig. 1) das Spiegellineal MN so angelegt, daß seine Richtung angenähert in die Richtung der Tangente fällt; wenn, wie wir voraussetzen, beide Richtungen nicht genau zusammenfallen, so wird die Linealkante die Kurve in einem benachbarten Punkte P_1 zum zweiten Mal schneiden. Da das Kurvenstück PP_1 vom Spiegellineal ver-

1) E. Reusch. Das Spiegellineal. Carls Rep. f. Exp. Phys. **16**, 255, 1880.

deckt ist, und in letzterem die nicht verdeckten benachbarten Kurventeile sich spiegeln, so wird der Anblick der in Fig. 2 wiedergegebene sein. Man braucht nun bloß mit dem Spiegellineal diejenige kleine Drehung um P auszuführen, welche bewirkt, daß die Länge des Stückes PP_1 gleich Null wird. Es läßt sich dies mit aller Genauigkeit erreichen, vorausgesetzt daß die auf dem Zeichnungsblatt aufruhende Kante des Spiegellineals ganz scharf ist, d. h. daß die spiegelnde Fläche bis an das Zeichnungsblatt herunterreicht. Träfe letztere Bedingung nicht zu, wäre vielmehr, wie dies bei manchen Ausführungen des Spiegellineals der Fall ist, jene Kante abgestumpft, so würde das Spiegelbild gerade von den dem Lineal zunächst liegenden Kurventeilen fehlen; die Reduktion der Länge PP_1 auf Null ließe sich dann nicht genügend genau durchführen. Ich möchte vermuten, daß bei dem ursprünglichen Reuschschen Modell diese untere Spiegelkante nicht in genügender Schärfe hergestellt war, und daß deshalb Reusch von der direkten Benutzung des kleinen Apparats zur Tangentenkonstruktion absah. Heutzutage ist es mit Hilfe einer Glasschleifmaschine leicht möglich, für genügende Schärfe jener Kante zu sorgen.



In Fig. 3 ist das Spiegellineal in richtiger tangentialer Stellung gezeichnet; das Spiegelbild des Kurventeils PA sei PA_1, dasjenige von PB sei PB_1. Faßt man nun die Linienzüge APB_1 und A_1PB ins Auge, so ist klar, daß beide in P einen Wendepunkt haben. Man hat also für die richtige tangentiale Stellung des Lineals P das weitere Kriterium, daß die Kurventeile AP und PB_1 einerseits, A_1P und PB andererseits, im Punkt P ohne Knickung ineinander übergehen.

Hohenheim, den 3. Dezember 1904.

Kleinere Mitteilungen.

Guccia-Medaille.

Der Circolo Matematico di Palermo (Via Ruggiero Settimo 30) gibt in einem Rundschreiben vom 1. November 1904, unterzeichnet von seinem Präsidenten M. L. Albeggiani, folgendes bekannt. Er wird bei dem IV. internationalen Mathematiker-Kongreß, der im Jahre 1908 in Rom stattfinden soll, einen internationalen Preis für Geometrie erteilen. Dieser Preis, der nach seinem Stifter „Guccia-Medaille" heißt, wird aus einer kleinen tragbaren Goldmedaille und einer Summe von 3000 Lire bestehen.

Die Theorie der algebraischen Raumkurven ist bekanntlich seit den Arbeiten, die durch den Steinerschen Preis von 1882 hervorgerufen wurden, vernachlässigt worden. Die großen Fortschritte der Geometrie, welche durch die synthetischen, algebraischen und funktionentheoretischen Methoden erreicht wurden, haben diese Theorie nicht berührt, sodaß weder die fundamentalen Betrachtungen, die in den erwähnten Arbeiten begonnen wurden, noch andere Fragen, die man stellen könnte, Gegenstand späterer Arbeiten gewesen sind. Geht man ferner vom dreidimensionalen Raume zu höheren Räumen über, so begegnet man für die algebraischen Kurven (insbesondere was ihre Einteilung, das Studium der kanonischen Kurven gegebenen Geschlechts usw. angeht), einer Menge von wichtigen Fragen, mit denen sich bis jetzt noch niemand beschäftigt hat. Auch kennt man über die algebraischen Raumkurven nur wenige Sätze, welche die Realitätsverhältnisse oder einen gegebenen Rationalitätsbereich betreffen. Betrachtungen dieser Art haben den Circolo Matematico di Palermo bewogen, in Übereinstimmung mit den Absichten des Stifters, die Guccia-Medaille

einer Abhandlung zu erteilen, welche die Theorie der algebraischen Raumkurven wesentlich fördert.

Hierbei sollen jedoch in keiner Weise die Probleme und Methoden der Untersuchung im voraus beschränkt werden.

Wenn keine der zur Bewerbung eingesandten, auf die genannte Theorie bezüglichen Arbeiten des Preises würdig befunden wird, so kann er

einer Abhandlung zugesprochen werden, die einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der algebraischen Kurven oder anderer algebraischer Mannigfaltigkeiten bezeichnet.

Die eingereichten Abhandlungen dürfen noch nicht veröffentlicht sein. In einer der vier Sprachen: italienisch, französisch, deutsch oder englisch abgefaßt und, abgesehen von den Formeln, mit der Schreibmaschine geschrieben, sind sie dem Präsidenten des Circolo Matematico di Palermo vor dem 1. Juli 1907 in drei Exemplaren einzureichen. Sie müssen mit einem Motto versehen und von einem verschlossenen Umschlag begleitet sein, der außen das Motto und innen Namen und Wohnort des Verfassers zeigt. Die gekrönte

Abhandlung wird in den „Rendiconti“ oder einer anderen Publikation des Circolo Matematico di Palermo abgedruckt. Der Verfasser erhält 200 Sonderabdrücke kostenfrei.

Wenn überhaupt keine der eingereichten Abhandlungen des Preises würdig befunden wird, so kann dieser einer schon veröffentlichten Arbeit zugesprochen werden, die sich auf die oben genannten Theorien bezieht, falls sie zwischen dem Zeitpunkt der Veröffentlichung dieses Programms und dem 1. Juli 1907 erschienen ist.

Den Preis erteilt der Circolo Matematico di Palermo gemäß der Entscheidung einer internationalen Kommision von drei Mitgliedern, die aus den Herren: Max Nöther, Professor an der Universität Erlangen, Henri Poincaré, Professor an der Universität Paris, Corrado Segre, Professor an der Universität Turin besteht. In einer der Sitzungen des IV. internationalen Mathematiker-Kongresses, der 1908 in Rom tagt, wird der Bericht der Kommission verlesen, der Preis erteilt und der Name des gekrönten Gelehrten bekannt gegeben werden.

Bücherschau.

R. Marcolongo, Meccanica razionale, Parte I: Cinematica, Statica, VII u. 271 S., 3 Lire; Parte II: Dinamica, Principii di idrodinamica, VI u. 324 S., 3 Lire. Milano, Ulrico Hoepli, 1905.

Die von der Verlagsbuchhandlung Ulrico Hoepli herausgegebene Sammlung kleiner, billiger Handbücher enthielt bereits ausgezeichnete Werke aus der höheren Mathematik und der Physik, es fehlte jedoch eins über theoretische Mechanik. Diese Lücke ist jetzt durch die beiden Bändchen der *Meccanica razionale* von Herrn Marcolongo in trefflicher Weise ausgefüllt worden. Die Bändchen sind bestimmt, den Studierenden der Universitäten und technischen Hochschulen, Anstalten, die in Italien vereinigt sind, als Führer zu dienen, und decken sich dementsprechend zum großen Teil mit dem Inhalt der Vorlesungen, die der Verfasser in Messina gehalten hat. Der Reihe nach wird die Kinematik, Statik und Dynamik materieller Punkte und starrer Körper behandelt, und den Schluß bildet ein kurzer Abriß der Hydrostatik und Hydrodynamik. Man findet darin nicht nur eine knappe, aber recht klare Übersicht über die klassischen Theorien, sondern es sind auch die neueren und neuesten Forschungen herangezogen worden. Da es in Italien an einer Sammlung von Aufgaben aus der Mechanik fehlt, hat der Verfasser den einzelnen Kapiteln Aufgaben hinzugefügt, im ganzen über 200; die Lösungen sind teils angegeben, teils angedeutet. Sehr dankenswert sind auch die zahlreichen Zitate und historischen Anmerkungen, die, wie Herr Marcolongo in der Vorrede mit Recht bemerkt, geeignet sind, das Interesse des Studierenden zu erwecken und zu beleben. Was die Methode der Darstellung betrifft, so ist von den Begriffen und Bezeichnungen der Vektorrechnung ein glücklicher Gebrauch gemacht worden, wobei dem Verfasser das Vorbild von F. Castellano, *Lezioni di meccanica razionale*, Turin 1894 und A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik* zu statten

gekommen ist, bildet doch ohne Zweifel gerade die Mechanik für die Anwendung der Vektorrechnung eines der schönsten und dankbarsten Gebiete. Daß in dem ersten Kapitel der Kinematik die Grundlagen der Vektorrechnung auseinandergesetzt werden, ist freilich nur ein unter den gegenwärtigen Umständen erklärlicher Notbehelf, denn diese Grundlagen gehören nicht in die Mechanik, sondern in die Geometrie; es ist dringend zu wünschen, daß überall diese jedem Mathematiker unentbehrlichen Kenntnisse entweder durch eine kleine selbständige Vorlesung oder durch entsprechende Abschnitte in den Vorträgen über analytische oder synthetische Geometrie zugänglich gemacht würden.

Hannover. PAUL STÄCKEL.

Rudolf Lämmel. Untersuchungen über die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten. (80 S.) Zürich, Jean Frey, 1904.

Die kleine Schrift, von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der Züricher philosophischen Fakultät als Inauguraldissertation approbiert, stellt sich im wesentlichen als eine erkenntnistheoretische Studie im Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Ihr Verfasser hält eine Prüfung und Berichtigung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie für umso notwendiger, als diese Lehre bei dem heutigen Streben nach Mathematisierung der Naturwissenschaften immer mehr an Bedeutung gewinnt und selbst auf die Festlegung der Fundamente der exakten Wissenschaften Einfluß zu nehmen berufen ist.

Nach einer Kritik des v. Kriesschen Wahrscheinlichkeitsbegriffes, den der Verfasser ablehnt, einmal weil er sich nicht streng verwirklichen lasse und zum andern das Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu eng begrenze, sucht er die Paradoxie, die er darin erblickt, daß hierher gehörige Probleme häufig mehrfache Lösungen zuließen, als eine notwendige Folge der Natur der Sache nachzuweisen. Er geht nun daran, zu zeigen, wie man trotzdem brauchbare numerische Wahrscheinlichkeiten ermitteln könne. Von den drei Methoden, die er unterscheidet, gibt die erste, die intuitive, da sie auf bloßen subjektiven, jeder Kontrole unzugänglichen Erwägungen beruht, zu einer weiteren Untersuchung keinen Anlaß. Umso ausführlicher behandelt der Verf. die zweite Methode, die er als Methode der Hypothesenbildung bezeichnet; in der richtigen Durchführung des Prozesses, den sie erfordert, erblickt er mit Recht die eigentliche Schwierigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und schreibt Wahrscheinlichkeiten, die nach dieser Methode gefunden worden, den relativ größten Erkenntniswert zu. Er zerlegt den Hypothesenprozeß, der zur Lösung des Problems: „Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gewisses A die Eigenschaft x habe?" führt, in drei Akte: H_1, Feststellung der Menge jener A, die überhaupt in Betracht kommen; H_2, Feststellung jener Teilmenge der A, welcher das Prädikat x eigen ist; H_3, Bewertung der einzelnen A durch Zuordnung einer in der Natur des Problems begründeten Valenz. Was die Durchführung dieses Gedankenganges kennzeichnet, das ist die Einführung des Cantorschen Mengenbegriffs. Von der Natur der Mengen, welche die sämtlichen A (mögliche „Fälle") und die mit dem Merkmal x begabten unter ihnen (günstige „Fälle") bilden, hängt die Wahr-

scheinlichkeitsdefinition ab. Durch Kombinierung der Mengeneigenschaften: abzählbar, nicht abzählbar; nirgends dicht, stellenweise dicht, überall dicht; ohne Inhalt, mit Inhalt — werden 12 verschiedene Mengenarten konstruiert, und durch paarweise Verbindung dieser (nach dem Prinzip der Variationen mit Wiederholung) würden sich 144 Typen von Wahrscheinlichkeitsaufgaben ergeben; davon entfallen aber manche als praktisch unmöglich. Eine Auswahl dieser Typen wird nun der speziellen Behandlung zugeführt, so der Typus (a, a): beide Mengen abzählbar; (c, c): beide Mengen von der Mächtigkeit eines Kontinuums (geometrische Wahrscheinlichkeiten); (c, a): die mögliche Menge von der Mächtigkeit eines Kontinuums, die günstige abzählbar usw. Vieler dieser Typen werden sich nur im Gebiete der Zahlentheorie verwirklichen lassen.

Wo nun der Hypothesenprozeß unausführbar ist, und es ist dies bei dem größten Teile der praktischen Anwendungen der Fall, da tritt die dritte Methode in Wirksamkeit, die der Verf. als die statistische bezeichnet: es ist die Beobachtung des Geschehens unter Trennung der beobachteten Fälle nach ihren durch das Problem unterschiedenen Eigenschaften.

Den Abschluß der erkenntnistheoretischen Untersuchung bildet ein Versuch der Aufstellung eines Minimalsystems (von Axiomen und Definitionen) der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie solche Versuche in unserer Zeit auf verschiedenen Gebieten der Mathematik unternommen worden sind.

Im zweiten Teile werden einige spezielle Probleme behandelt; das erste betrifft Fragen über die durch einen unendlichen Kettenbruch erzeugbaren Zahlen; das zweite ein nach Gyldén benanntes, auf die Konvergenz gewisser Reihen bezügliches Problem; das dritte ist eine Verallgemeinerung des Nadelproblems dahingehend, daß die Nadel vermöge ihrer die Distanz der Parallelen übertreffenden Länge mehrere Parallelen zugleich kreuzen kann.

Die Schrift ist der Aufmerksamkeit der an der Wahrscheinlichkeitstheorie Interessierten zu empfehlen.

Wien. Czuber.

Josef F. Heller, k. k. Direktor der deutschen Staatsrealschule in Pilsen, **Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der darstellenden Geometrie für Realschulen.** I. Teil für die 5. Klasse. 2. nach dem Lehrplan vom Jahre 1899 umgearbeitete Auflage. Mit 5 Tafeln, enthaltend 127 Figuren. 103 S. Wien 1903, Hölder. Pr. geh. 1 K 68 h, geb. 2 K 18 h.

Diese durchweg einfachen, aber ganz instruktiven Elementaraufgaben, welche in rechtwinkliger Projektion durchzuführen sind, beziehen sich auf Punkte, Gerade und Ebenen und ihre gegenseitigen Beziehungen, auf die Einführung neuer Projektionsebenen, Drehung um eine Achse, Schatten ebener Figuren und Darstellung des Kreises. Die zu verwendenden Elemente sind durch ihre Koordinaten gegeben.

München, März 1905. Karl Doehlemann.

Neue Bücher.[1])

Arithmetik.

1. Rogel, Franz, Das Rechnen mit Vorteil. Eine gemeinfaßliche, durch zahlzahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. Leipzig, Teubner. M. —.80.

Astronomie und Geodäsie.

2. Bauschinger, Julius, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. Leipzig 1906, Engelmann. M. 34.— ; geb. M. 37.—.
3. Gast, Paul, Über Luftspiegelungen im Simplon-Tunnel. Habilitationsschrift Darmstadt. Stuttgart 1904, Wittwer.
4. Hessen, Kurt, Die rechnerische Bearbeitung der Messungen von Monddistanzen. (Astronom. Abhandlungen Nr. 10.) Kiel. (Hamburg, Mauke Söhne.) M. 2.50.

Darstellende Geometrie.

5. Hartwig, Th., Leitfaden der konstruierenden Stereometrie. Darstellung der Raumformen im Schrägbilde, nebst einigen Anwendungen von Schrägbildern auf dem Gebiete der theoret. und rechn. Stereometrie, darstell. Geometrie, Mineralogie, mathem. Geographie u. Physik. Wien, Fromme. M. 1.—
6. Körber, Strahlendiagramm zur vereinfachten Herstellung perspektivischer Zeichnungen. Zum Gebrauch f. Architekten, Ingenieure, Kunstgewerbetreibende und Landschaftsgärtner. (1 Bl. auf Pauspapier m. Fig.) Berlin, Ernst & Sohn. M. 1.50.
7. Regis, Domenico, Corso di applicazioni della geometria descrittiva nella r. scuola d'applicazione per gl'ingegneri in Torino. Fasc. V. Torino. L. 3.— .
8. Vonderlinn, J., Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. (Sammlung Göschen Nr. 260.) Leipzig, Göschen. Geb. in Leinw. —.80.

Mechanik.

9. Appell, Paul, Cours de mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales. 2ème éd. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 12.—
10. Bach, C., Elastizität und Festigkeit. 5. verm. Aufl. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 18.—.
11. Duhem, P., Les origines de la statique. I. Paris, Hermann. Frs. 10.—.
12. Keck, Wilh., Vorträge über Elastizitätslehre als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke. 2. verm. Aufl., neu bearb. v. Ludw. Hotopp. 1. Teil. Hannover, Helwing. M. 8.—; geb. in Leinw. M. 9.—
13. Linders, Olof, Zur Klarstellung der Begriffe Masse, Gewicht, Schwere und Kraft. Leipzig, Jäh & Schunke. M. 1.—
14. Milankovitch, M., Beitrag zur Theorie der Betoneisenträger. Wien, Lehmann & Wentzel.
15. Routh, E. J., The elementary part of a treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies. Being part I of a treatise on the whole subject. With numerous examples. 7th ed. revised and enlarged. London, Macmillan. 14 s.

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1905.

Physik.

16. Abraham, Henri, et Langevin, Paul, Les quantités élémentaires d'électricité. Ions, électrons, corpuscules. Mémoires réunis. (Société française de Physique. Collection de mémoires relatifs à la Physique. 2ème série.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 35.—
17. Abraham, M., Theorie der Elektrizität, II. Bd., Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 10.—
18. Berndt, Geo. W., Physikalisches Praktikum. 1. Teil. Halle 1906, Marbold. M. 3.80; geb. in Leinw. M. 4.—
19. Bouasse, H., Essais des matériaux. Notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes. (Bibliothèque de l'élève ingénieur.) Paris, Gauther-Villars. Frs. 5.—
20. Clark, Alex., Molecular forces and Newtonian laws. Glasgow, Holmes. 3 s. 6 d
21. J. Classen, Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 4.—.
22. Dressel, Ludwig, Elementares Lehrbuch der Physik, nach den neuesten Anschauungen für höhere Schulen und zum Selbstunterricht. 3. verm. und umgearb. Aufl. 2 Bde. Freiburg i. B., Herder. M. 16; geb. in Leinw. M. 17.60.
23. Fortschritte, die, der Physik im J. 1904. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 60. Jahrg. 2. Abtlg. Elektrizität und Magnetismus. Optik des gesamten Spektrums, Wärme. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 32.—
24. Frick, J., Physikalische Technik oder Anleitung zu Experimentalvorträgen, sowie zur Selbstherstellung einfacher Demonstrationsapparate. 7., vollkommen umgearbeitete und stark vermehrte Aufl. v. Otto Lehmann. I. Bd. 2. Abtlg. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 24.—; geb. M. 26.—.
25. Friedmann, Herm., Über ein physikalisches Endlichkeitsprinzip und den allgemeinsten Ausdruck der Naturgesetzlichkeit. Jurjew-Dorpat, Krüger. M. 1.80.
26. Gleichen, Alexander, Vorlesungen über photographische Optik. Leipzig. Göschen. M. 9.—.
27. Graetz, Leo, Das Licht und die Farben. 6 Vorlesungen. („Aus Natur und Geisteswelt" Nr. 17.) 2. Aufl. Leipzig, Teubner. M. 1.—; geb. in Leinw. M. 1.25.
28. Keferstein, Hans, Strahlengang und Vergrößerung in optischen Instrumenten. Eine Einführung in die neueren optischen Theorien. (Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft, Heft 5.) Berlin, Springer. M. 1.60.
29. Kolbe, Bruno, Einführung in die Elektrizitätslehre. Vorträge. II. Dynamische Elektrizität. 2., verb. u. verm. Aufl. Berlin, Springer. M. 3.—; geb. in Leinw. 3.80.
30. Marchis, L., Thermodynamique. (Bibliothèque de l'élève ingénieur.) t. II. Introduction à l'étude des machines thermiques. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 5.—.
31. Meyer, Jul., Einführung in die Thermodynamik auf energetischer Grundlage. Halle, Knapp. M. 8.—.
32. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. (In 4 Bdn.) 10. umgearb. u. verm. Aufl. hrsg. v. Leop. Pfaundler. 1. Bd. Mechanik und Akustik. 1. Abtlg. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 7.—.
33. Poynting, J. H., and Thomson, J. J., A textbook of Physics. Properties of matter. 3 rd ed. carefully revised. London, Griffin. 10 s. 6 d.
34. Riecke, Eduard, Lehrbuch der Physik zum eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen. 2 Bde. 3. verb. u. verm. Aufl. 1. Mechanik, Molekularerscheinungen und Akustik, Optik. 2. Magnetismus und Elektrizität, Wärme. Leipzig, Veit & Co. zus. M. 25.—; geb. in Leinw. M. 27.—.
35. Righi, Aug., Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen (Radioaktivität, Jonen, Elektronen.) Aus dem Ital. v. B. Dessau. Leipzig, Barth. kart. M. 2.80.

36. ROHR, M. v., Die optischen Instrumente. („Aus Natur und Geisteswelt" Nr. 88.) Leipzig, Teubner. M. 1.—; geb. in Leinw. M. 1.25.
37. SCHREBER, K., und SPRINGMANN, P., Experimentierende Physik. Zugleich vollständig umgearb. Ausg. v. Henri Abrahams Recueil d'expériences élémentaires de physique. 1. Bd. Leipzig, Barth. M. 3.60; geb. in Leinw. 4.40.
38. WIEN, W., Über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. Leipzig, Teubner.
39. WINCKELMANN, A., Handbuch der Physik. 2. Aufl. V. Bd. 1. Hälfte. Elektrizität und Magnetismus. II. Leipzig, Barth. M. 16.—

S. auch Nr. 3.

Tafeln.

40. BIDSCHOF, FRDR., und VITAL, ARTH., Fünfstellige mathematische und astronomische Tafeln. Zum Gebrauche für Mathematiker, Astronomen, Geographen und Seeleute zusammengestellt und mit Formelsammlungen versehen. Ster.-Ausg. Wien, Deuticke. geb. in Leinw. M. 7.50.

Verschiedenes.

41. SCHUBERT, HERMANN, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. I. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 4.

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

ABRAHAM, H., et LANGEVIN, P., Les quantités élémentaires d'électricité, Ions, électrons, corpuscules. 1er et 2d fascicules, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 16.

ABRAHAM, M., Theorie der Elektrizität, II, s. N. B. 17.

APPELL, P., Cours de mécanique, s. N. B. 9.

BAILLAUD, B., et BOURGET, H., Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Avec une préface de Emile Picard. Tome II. (18 octobre 1889 — 15 décembre 1894.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 16.—.

BAUSCHINGER, J., Bahnbestimmung der Himmelskörper, s. N. B. 2.

BOUASSE, H., Essais des matériaux, s. N. B. 19.

CLASSEN, J., Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes, s. N. B. 21.

DRESSEL, L., Elementares Lehrbuch der Physik, s. N. B. 22.

DUHEM, P., Les origines de la statique, s. N. B. 11.

FRICK, J., Physikalische Technik. 7. Aufl. I. Bd. 2. Abtlg., s. N. B. 24.

GAST, P., Über Luftspiegelungen im Simplon-Tunnel, s. N. B. 3.

GLEICHEN, A., Vorlesungen über photographische Optik, s. N. B. 26.

GLINZER, E., Lehrbuch der Elementargeometrie. 1. Tl. Planimetrie. 9. verb. Aufl. Leipzig, Degener. M. 1.80.

GOURSAT, EDOUARD, Cours d'analyse mathématique. Tome II. Theorie des fonctions analytiques. Equations différentielles Équations aux dérivées partielles. Éléments du calcul des variations. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 20.—.

GUICHARD, C., Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux. („Scientia" Nr. 25.) Paris, Gauthier-Villars. Cartonné Frs. 2.—.

HEFFTER, L., und KÖHLER, C., Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Bd. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 14.—.

HERMITE, CHARLES, Oeuvres. Publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Tome I. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 18.—.

Holzmüller, Gustav, Die Planimetrie für das Gymnasium. 1. Tl. Von Quarta bis Untersekunda einschließlich reichend. 2. Aufl. Leipzig und Berlin, Teubner. geb. M. 2.40.

Jessen, K., und Girndt, M., Leitfaden der Baustofflehre für Baugewerkschulen. Leipzig und Berlin.

Wien, W., Über Elektronen, s. N. B. 38.

Keferstein, H., Strahlengang und Vergrößerung in optischen Instrumenten, s. N. B. 28.

Körber, Strahlendiagramme, s. N. B. 6.

Schubert, H., Auslese, s. N. B. 41.

Linders, O., Zur Klarstellung der Begriffe Masse usw., s. N. B. 13.

Lobatschewsky, N. J., Pangéometrie, ou précis de géometrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. Réimpression fac-similé conforme à l'édition originale. Paris, Hermann. Frs. 5.—.

Marchis, M. L., Thermodynamique. II. s. N. B. 30.

Marti, C., The weather-forces of the planetary atmospheres. Printed as manuscript. Nidau, Printer E. Weber.

Milankovitch, M., Betoneisenträger, s. N. B. 14.

Müller, H., und Plath, J., Lehrbuch der Mathematik zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrer-Prüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. Leipzig und Berlin 1906, Teubner.

Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie, s. N. B. 32.

Newest, Th., Gegen die Wahnvorstellung vom heißen Erdinnern. Einige Weltprobleme. II. Teil. Populär-wissenschaftliche Abhandlnng. Wien 1906, Konegen. M. 1.50.

Rogel, Franz, Das Rechnen mit Vorteil, s. N. B. 1.

Rohr, M. v., Die optischen Instrumente, s. N. B. 36.

Russell, John Wellesley, Elementary treatise on pure Geometry. With numerous examples. New and revised edition. Oxford, Clarendon Press. Cloth. 9 s.

Schoute, P. H., Mehrdimensionale Geometrie. II. Die Polytope. (Sammlung Schubert XXXVI.) Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 10.—.

Schröder, Richard, Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung. Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen, sowie zum Selbstunterricht. Leipzig, Teubner. kart. M. 1.60.

Schütte, Fritz, Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien. Leipzig und Berlin, Teubner. M. — 80.

Stolz, Otto, und Gmeiner, J. Anton, Einleitung in die Funktionentheorie. 2. umgearb. u. verm. Aufl. der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. (Teubners Lehrbücher, Bd. XIV.) 2. Abtlg. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 9.—. (Vollständig in 1 Bd. geb. M. 15.—.)

Weber, Heinr., und Wellstein, Jos., Enzyklopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. 2. Bd. Elemente der Geometrie. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.—.

Wieleitner, Heinrich, Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904. Beilage zum Jahresbericht des Königl. humanistischen Gymnasiums zu Speyer für das Schuljahr 1904/05. Leipzig, Göschen. brosch. M. 1.50.

Wieleitner, Heinr., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. (Sammlung Schubert XLIII.) Leipzig, Göschen. geb. 10.—.

Wilson, J. Cook, On the traversing of geometrical figures. Oxford, Clarendon Press. Cloth 6 s.






3 2044 102 937 547